Feuille d'exercices n° 7

Exercice 1.

1. Déterminer l'ensemble des points extrémaux de la boule unité fermée de $L^1([0,1])$.
2. Montrer qu'il n'existe pas d'espace de Banach X tel que $L^1([0,1])$ soit isométrique à X^*.
   (il n'existe pas d'espace de Banach X tel que $L^1([0,1])$ soit isomorphe à X^* ; c'est plus difficile à démontrer)
3. Reprendre les deux premières questions de cet exercice avec $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ au lieu de $L^1([0,1])$.
4. L'espace $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ est-il réflexif ?

Exercice 2. Soit (X,d) un espace métrique compact et $\mathbb{P}$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes sur X.

1. Expliquer pourquoi on peut identifier $\mathbb{P}$ à $\{\varphi \in C(X,\mathbf{R})^* \colon \varphi(1) = \|\varphi\| = 1\}$.
2. Montrer que $\mathbb{P}$ est convexe et préfaiblement compact.
3. Montrer que les points extrémaux de $\mathbb{P}$ sont exactement les mesures de Dirac.
4. Soit μ une mesure de probabilité borélienne sur X, $f_1, \dots, f_n \in C(X)$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ positifs de somme 1 ainsi que $x_1, \dots, x_m \in X$ tels que
$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \left| \int_X f_i d\mu - \sum_{j=1}^m \alpha_j f_i(x_j) \right| < \varepsilon$$

Exercice 3. Soit K un compact convexe d'un espace de Banach E et μ une mesure de probabilité borélienne sur K.

1. Montrer qu'il qu'il existe un point $x \in K$ tel que l'on ait $\displaystyle\int_K f d\mu = f(x)$ pour tout $f \in E^*$ (on pourra commencer par considérer le cas où μ est une combinaison convexe de mesures de Dirac, puis utiliser l'exercice précédent).
2. Montrer qu'un tel point x est unique. On l'appelle le *barycentre* de la mesure μ.

Exercice 4. Une matrice $M \in M_n(\mathbf{R})$ est dite *bistochastique* si ses coefficients sont positifs, et la somme des termes de chaque ligne et chaque colonne vaut 1. On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices bistochastiques dans $M_n(\mathbf{R})$.

1. Montrer que $\mathcal{B}_n$ est convexe et compact.
2. Montrer que les matrices de permutation sont les points extrémaux de $\mathcal{B}_n$ (on pourra montrer qu'un point extrémal a au plus $2n-1$ coefficients non nuls, en minorant la dimension de l'espace des matrices dont le somme des coefficients sur chaque ligne et chaque colonne vaut 0).
3. Montrer que toute matrice bistochastique est une combinaison convexe de matrices de permutations (*théorème de Birkhoff–von Neumann*).

Exercice 5. (issu de l'examen 2024)

1. Soit x un point extrémal d'un ensemble convexe C. On suppose qu'il existe x_1, x_2, x_3, x_4 dans C tels que $x = \dfrac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$. Montrer que $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x$.

Dans les suite, on considère les espaces de Banach
$$\ell^1(\mathbf{Z}^2) = \{f \colon \mathbf{Z}^2 \to \mathbf{R} \colon \sum_{(n,m)\in\mathbf{Z}^2} |f(n,m)| < +\infty\} \quad ; \quad \ell^\infty(\mathbf{Z}^2) = \{f \colon \mathbf{Z}^2 \to \mathbf{R} \colon f \text{ est bornée}\}$$
munis de leurs normes usuelles. L'espace $\ell^\infty(\mathbf{Z}^2)$ s'identifie au dual de $\ell^1(\mathbf{Z}^2)$. Une fonction $f \colon \mathbf{Z}^2 \to \mathbf{R}$ est *harmonique* si elle vérifie la condition
$$\forall (n,m) \in \mathbf{Z}^2 \quad f(n,m) = \frac{1}{4}\left(f(m-1,n) + f(m+1,n) + f(m,n-1) + f(m,n+1)\right)$$

2. Soit K l'ensemble des fonctions de $\mathbf{Z}^2$ dans $\mathbf{R}$ qui sont harmoniques et à valeurs dans $[-1,1]$. Montrer que K est une partie convexe de $\ell^\infty(\mathbf{Z}^2)$ qui est compacte pour la topologie préfaible.
3. À l'aide du résultat de la première question de l'exercice, montrer que l'ensemble K possède uniquement deux points extrémaux que l'on précisera.
4. Montrer que toute fonction harmonique bornée sur $\mathbf{Z}^2$ est constante.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe, K un compact convexe de E et A un sous-ensemble de K. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalents :

1. $K = \overline{\mathrm{co}(A)}$.
2. $\mathrm{Ext}(K) \subseteq \overline{A}$.

Exercice 7. Soit X un espace vectoriel normé. En utilisant le théorème de Banach–Alaoglu, montrer qu'il existe un espace topologique compact K et une application linéaire isométrique $T\colon X \to (C(K, \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$.
Dans le cas où X est séparable, montrer qu'il existe un compact K comme ci-dessus qui est de plus métrisable.

Exercice 8. Soit X un espace de Banach réflexif, et $\varphi \in X^*$. Montrer qu'il existe $x \in B_X$ tel que $\varphi(x) = \|\varphi\|$.

Exercice 9. Soit X, Y deux espaces de Banach, et $T\colon X \to Y$ une surjection linéaire et continue. On suppose que X est réflexif ; montrer que que Y est réflexif.

Exercice 10. Soit X un espace de Banach non réflexif. Montrer qu'il existe un convexe $C \subseteq X^*$ qui est fermé en norme mais n'est pas fermé pour $\sigma(X^*, X)$.

Exercice 11. Soit X un espace de Banach réflexif et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'élements de X

1. On suppose $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ bornée. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une sous-suite faiblement convergente.
   Ce résultat reste-t-il vrai quand X n'est pas réflexif ?
2. On suppose que $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy pour tout $\varphi \in X^*$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement.

Exercice 12. Soit X un espace de Banach réflexif, et F un sous-espace vectoriel fermé. On munit le quotient $Y = X/F$ de la norme quotient, définie(comme dans le partiel) par $\|x + F\| = \inf\{\|x + f\| \colon f \in F\}$

1. Rappeler pourquoi on a bien défini une norme sur Y, et pourquoi Y est un espace de Banach.
2. Montrer que Y est réflexif sans utiliser le résultat de l'exercice 9 (on pourra commencer par essayer de montrer que Y^* est réflexif et utiliser la réflexivité de X^*).