Feuille d'exercices n° 7 : points extrémaux

Exercice 1.

1. Déterminer l'ensemble des points extrémaux de la boule unité fermée de $L^1([0,1])$.
2. Montrer qu'il n'existe pas d'espace de Banach X tel que $L^1([0,1])$ soit isométrique à X^*.
(il n'existe pas d'espace de Banach X tel que $L^1([0,1])$ soit *isomorphe* à X^* ; c'est plus difficile à démontrer)
3. Les espaces ℓ^1 et $L^1([0,1])$ sont-ils isomorphes ? (indication : penser au lemme de Riemann–Lebesgue et faire un lien avec la convergence faible).
4. Reprendre les deux premières questions de cet exercice avec $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ au lieu de $L^1([0,1])$.
5. L'espace $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ est-il réflexif ?

Exercice 2. Soit (X,d) un espace métrique compact et $\mathbb{P}$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes sur X.

1. Expliquer pourquoi on peut identifier $\mathbb{P}$ à $\{\varphi \in C(X,\mathbf{R})^* : \varphi(1) = \|\varphi\| = 1\}$.
2. Montrer que $\mathbb{P}$ est convexe et préfaiblement compact.
3. Montrer que les points extrémaux de $\mathbb{P}$ sont exactement les mesures de Dirac.
4. Soit μ une mesure de probabilité borélienne sur X, $f_1, \dots, f_n \in C(X)$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ positifs de somme 1 ainsi que $x_1, \dots, x_m \in X$ tels que
$$\forall i \in \{1,\dots,n\} \quad \left| \int_X f_i d\mu - \sum_{j=1}^m \alpha_j f_i(x_j) \right| < \varepsilon$$

Exercice 3. Soit K un compact convexe d'un espace de Banach E et μ une mesure de probabilité borélienne sur K.

1. Montrer qu'il qu'il existe un point $x \in K$ tel que l'on ait $\displaystyle\int_K f d\mu = f(x)$ pour tout $f \in E^*$ (on pourra commencer par considérer le cas où μ est une combinaison convexe de mesures de Dirac, puis utiliser l'exercice précédent).
2. Montrer qu'un tel point x est unique. On l'appelle le *barycentre* de la mesure μ.

Exercice 4. Une matrice $M \in M_n(\mathbf{R})$ est dite *bistochastique* si ses coefficients sont positifs, et la somme des termes de chaque ligne et chaque colonne vaut 1. On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices bistochastiques dans $M_n(\mathbf{R})$.

1. Montrer que $\mathcal{B}_n$ est convexe et compact.
2. Montrer que les matrices de permutation sont les points extrémaux de $\mathcal{B}_n$ (on pourra montrer qu'un point extrémal a au plus $2n-1$ coefficients non nuls, en minorant la dimension de l'espace des matrices dont le somme des coefficients sur chaque ligne et chaque colonne vaut 0).
3. Montrer que toute matrice bistochastique est une combinaison convexe de matrices de permutations (*théorème de Birkhoff–von Neumann*).

Exercice 5. (issu de l'examen 2024)

1. Soit x un point extrémal d'un ensemble convexe C. On suppose qu'il existe x_1, x_2, x_3, x_4 dans C tels que $x = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$. Montrer que $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x$.

Dans les suite, on considère les espaces de Banach
$$\ell^1(\mathbf{Z}^2) = \{f : \mathbf{Z}^2 \to \mathbf{R} : \sum_{(n,m)\in\mathbf{Z}^2} |f(n,m)| < +\infty\} \quad ; \quad \ell^\infty(\mathbf{Z}^2) = \{f : \mathbf{Z}^2 \to \mathbf{R} : f \text{ est bornée}\}$$
munis de leurs normes usuelles. L'espace $\ell^\infty(\mathbf{Z}^2)$ s'identifie au dual de $\ell^1(\mathbf{Z}^2)$. Une fonction $f : \mathbf{Z}^2 \to \mathbf{R}$ est *harmonique* si elle vérifie la condition
$$\forall (n,m) \in \mathbf{Z}^2 \quad f(n,m) = \frac{1}{4}\left(f(n-1,m) + f(n+1,m) + f(n,m-1) + f(n,m+1)\right)$$

2. Soit K l'ensemble des fonctions de $\mathbf{Z}^2$ dans $\mathbf{R}$ qui sont harmoniques et à valeurs dans $[-1,1]$. Montrer que K est une partie convexe de $\ell^\infty(\mathbf{Z}^2)$ qui est compacte pour la topologie préfaible.
3. À l'aide du résultat de la première question de l'exercice, montrer que l'ensemble K possède uniquement deux points extrémaux que l'on précisera.
4. Montrer que toute fonction harmonique bornée sur $\mathbf{Z}^2$ est constante.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe, K un compact convexe de E et A un sous-ensemble de K. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalents :

1. $K = \overline{\mathrm{co}(A)}$.
2. $\mathrm{Ext}(K) \subseteq \overline{A}$.

Exercice 7. Soit X un compact métrisable.

1. On note δ_x la mesure de Dirac en x. Montrer que $\pm\delta_x$ est un point extrémal de la boule unité B de $C(X)^*$.
2. Montrer que $x \mapsto \delta_x$ est un homéomorphisme de X sur $\{\delta_x : x \in X\}$ muni de la topologie $*$-faible.
3. Montrer que $B = \overline{\mathrm{co}}(\{\pm\delta_x : x \in X\})$, où l'adhérence est calculée pour la topologie $*$-faible, puis déterminer l'ensemble des points extrémaux de B (on pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent).

Exercice 8. Soit K, L deux espaces compacts métrisables, et $T\colon C(K) \to C(L)$ une isométrie linéaire et surjective.

1. Montrer que $T^*\colon C(L)^* \to C(K)^*$ est une isométrie linéaire surjective.
2. Soit E_K l'ensemble des points extrémaux de la boule unité de $C(K)^*$, et E_L l'ensemble des points extrémaux de la boule unité de $C(L)^*$. Montrer que $T^*(E_L) = E_K$.
3. On note δ_x la mesure de Dirac en un point x. Montrer qu'il existe deux applications $f\colon L \to \{-1, 1\}$ et $g\colon L \to K$ telles que pour tout $x \in L$ on ait $T^*(\delta_x) = f(x)\delta_{g(x)}$.
4. Montrer que f et g sont continues.
5. Montrer que g est un homéomorphisme de L sur K.
6. Énoncer le résultat démontré dans cet exercice (*théorème de Banach–Stone*).