
Feuille d'exercices n° 8

Exercice 1.

1. Déterminer l'ensemble des points extrémaux de la boule unité fermée de $L^1([0,1])$.
2. Montrer qu'il n'existe pas d'espace de Banach X tel que $L^1([0,1])$ soit isométrique à X^*.
   (en fait il n'existe pas d'espace de Banach X tel que $L^1([0,1])$ soit isomorphe à X^*, mais c'est plus difficile à démontrer)
3. Reprendre les deux premières questions de cet exercice avec $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ au lieu de $L^1([0,1])$.
4. L'espace $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ est-il réflexif ?

Exercice 2. Soit (X,d) un espace métrique compact et $\mathbb{P}$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes sur X.

1. Expliquer pourquoi on peut identifier $\mathbb{P}$ à $\{\varphi \in C(X,\mathbf{R})^* \colon \varphi(1) = \|\varphi\| = 1\}$.
2. Montrer que $\mathbb{P}$ est convexe et préfaiblement compact.
3. Montrer que les points extrémaux de $\mathbb{P}$ sont exactement les mesures de Dirac.
4. Soit μ une mesure de probabilité borélienne sur X, $f_1, \ldots, f_n \in C(X)$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ positifs de somme 1 ainsi que $x_1, \ldots, x_m \in X$ tels que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \qquad \left| \int_X f_i d\mu - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j f_i(x_j) \right| < \varepsilon$$

Exercice 3. Soit K un compact convexe d'un espace de Banach E et μ une mesure de probabilité borélienne sur K.

1. Montrer qu'il qu'il existe un point $x \in K$ tel que l'on ait $\int_K f d\mu = f(x)$ pour tout $f \in E^*$ (on pourra commencer par considérer le cas où μ est une combinaison convexe de mesures de Dirac, puis utiliser l'exercice précédent).
2. Montrer qu'un tel point x est unique. On l'appelle le *barycentre* de la mesure μ.

Exercice 4. Soit X un espace vectoriel normé. En utilisant le théorème de Banach–Alaoglu, montrer qu'il existe un espace topologique compact K et une application linéaire isométrique $T \colon X \to (C(K,\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$.
Dans le cas où X est séparable, montrer qu'il existe un compact K comme ci-dessus qui est de plus métrisable.

Exercice 5. Soit X un espace de Banach réflexif, et $\varphi \in X^*$. Montrer qu'il existe $x \in B_X$ tel que $\varphi(x) = \|\varphi\|$.

Exercice 6. Soit X, Y deux espaces de Banach, et $T \colon X \to Y$ une surjection linéaire et continue. On suppose que X est réflexif ; montrer que que Y est réflexif.

Exercice 7. Soit X un espace de Banach non réflexif. Montrer qu'il existe un convexe $C \subseteq X^*$ qui est fermé en norme mais n'est pas fermé pour $\sigma(X^*, X)$.

Exercice 8. Soit X un espace de Banach réflexif et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'élements de X

1. On suppose $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ bornée. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une sous-suite faiblement convergente.

   Ce résultat reste-t-il vrai quand X n'est pas réflexif ?

2. On suppose que $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy pour tout $\varphi \in X^*$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement.

Exercice 9. Soit X un espace de Banach réflexif, et F un sous-espace vectoriel fermé. On munit le quotient $Y = X/F$ de la norme quotient, définie par $\|x + F\| = \inf\{\|x + f\| \colon f \in F\}$

1. Montrer que l'on a bien défini une norme sur Y, et que Y est un espace de Banach.
2. Montrer que Y est réflexif (on pourra commencer par essayer de montrer que Y^* est réflexif).