
Feuille d'exercices n^o 8

Exercice 1. Soit X, Y, Z trois espaces de Banach et $S: Y \to Z$, $T: X \to Y$ deux applications linéaires continues. Montrer que si S est compact alors ST est compact, et que si T est compact alors ST est compact.

Exercice 2. Soit H un espace de Hilbert séparable. On dit que $T: H \to H$ est un *opérateur de Hilbert-Schmidt* s'il existe une base orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de H telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \|T(e_n)\|^2 < +\infty$.

1. Soit $T: H \to H$ un opérateur et $(e_i)_{i\in\mathbf{N}}$, $(f_i)_{i\in\mathbf{N}}$ deux bases hilbertiennes de H.
   (a) Montrer que $\sum_{i=0}^{+\infty} \|T(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \|T^*(e_i)\|^2$.
   (b) En considérant $\sum_{i,j} |\langle T(e_i), f_j\rangle|^2$, montrer que $\sum_{i=0}^{+\infty} \|T(e_i)\|^2 = \sum_{j=0}^{+\infty} \|T(f_j)\|^2$.
2. Montrer que tout opérateur de Hilbert-Schmidt est compact.
3. Étant donnée une suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on définit $S: \ell^2 \to \ell^2$ en posant $S(x) = (u_n x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (cf. exercice 5).
   (a) Montrer que S est compact si, et seulement si, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0.
   (b) Donner un exemple d'opérateur compact qui n'est pas de Hilbert-Schmidt.

Exercice 3. Soit E un espace de Banach réel ou complexe, S_E la sphère unité de E et $T \in \mathcal{L}(E)$ telle que $0 \notin \overline{T(S_E)}$

1. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in E$ on ait $T(x) \geq \delta\|x\|$.
2. Montrer que $T(E)$ est fermé dans E.
3. Montrer que si T est de plus compact alors T est de rang fini.

Exercice 4. Soit $E = C([0,1], \mathbf{C})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Soit K une fonction continue de $[0,1]^2$ dans $\mathbf{C}$. Pour $x \in [0,1]$ on pose $T(f)(x) = \int_0^x K(x,y) f(y) dy$.

1. Montrer que $T: E \to E$ est bien définie et continue.
2. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ puis déterminer $\sigma(T)$.
3. Montrer que T est compact (indication : Ascoli).

Exercice 5.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{C}^N$ une suite bornée. On définit $T: \ell^2 \to \ell^2$ en posant $T((x_n)_{n\in\mathbf{N}}) = (u_n x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
   (a) Montrer que T est bien définie et continue.
   (b) Montrer que chaque u_n est une valeur propre de T.
   (c) Montrer que si $\lambda \notin \overline{\{u_n : n \in \mathbf{N}\}}$ alors $\lambda \notin \sigma(T)$.
2. Ètant donnée une partie A de $\mathbf{C}$, donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une application linéaire continue $T: \ell^2 \to \ell^2$ telle que $A = \sigma(T)$.

Exercice 6. Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et $P: E \to E$ un projecteur continu. On suppose que $P \notin \{0, \mathrm{id}\}$. Montrer que $\sigma(P) = \mathrm{vp}(P) = \{0, 1\}$.

Exercice 7.

1. On définit $T\colon \ell^2 \to \ell^2$ en posant $T(x)(n) = x(n+1)$ pour tout $x \in \ell^2$.
   (a) Montrer que T est bien définie, continue et déterminer sa norme.
   (b) Montrer que tout $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $|\lambda| < 1$ est valeur propre de T.
   (c) Déterminer $\sigma(T)$ ainsi que l'ensemble des valeurs propres de T.
2. On définit $S\colon \ell^2 \to \ell^2$ en posant pour $x \in \ell^2$ $S(x)(0) = 0$ et $S(x)(n) = x(n-1)$ pour $n \geq 1$.
   (a) Montrer que S est bien définie, continue et déterminer sa norme.
   (b) Montrer que S n'a pas de valeur propre.
   (c) Montrer que $T^* = S$ puis déterminer le spectre de S.

Exercice 8. Pour $f \in L^2([0,1], \mathbf{C})$ et $t \in [0,1]$ on pose $T(f)(t) = tf(t)$.

1. Montrer que $T\colon L^2([0,1], \mathbf{C}) \to L^2([0,1], \mathbf{C})$ est linéaire et continue.
2. Montrer que T n'a pas de valeur propre.
3. Soit $\lambda \in [0,1[$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $[\lambda, \lambda+\varepsilon] \subseteq [0,1]$. On note f_ε la fonction caractéristique de $[\lambda, \lambda+\varepsilon]$ et on pose $g_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} f_\varepsilon$. En considérant $(T - \lambda id)(g_\varepsilon)$, montrer que $\lambda \in \sigma(T)$.
4. Montrer que si $\lambda \in \mathbf{C} \setminus [0,1]$ alors $\lambda \notin \sigma(T)$, puis déterminer $\sigma(T)$.

Exercice 9. Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et $S, T\colon E \to E$ des applications linéaires continues.

1. Montrer que $\sigma(ST) \setminus \{0\} = \sigma(TS) \setminus \{0\}$ (on pourra considérer $I + T(\lambda I - ST)^{-1}S$).
2. Montrer que si S ou T est inversible alors $\sigma(ST) = \sigma(TS)$.
3. Donner un exemple où on n'a pas $\sigma(ST) = \sigma(TS)$.

Exercice 10. Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments appartenant au complémentaire de $\sigma(T)$ convergeant vers $\lambda \in \mathbf{C}$. On suppose de plus que $(T - \lambda_n I)^{-1}$ est bornée dans $L(E)$. Montrer que $\lambda \notin \sigma(T)$.

Exercice 11. (Issu de l'examen 2023)

On note E l'espace des fonctions continues et bornées de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, muni de $\|\cdot\|_\infty$. On considère $T\colon E \to E$ définie par $T(f)(x) = f(x+1)$ pour $f \in \mathbf{R}$.

1. Montrer que $\sigma(T) \subseteq \{z \in \mathbf{C} \colon |z| \leq 1\}$ (on pourra commencer par calculer la norme de T).
2. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ et $f\colon x \mapsto e^{\mathrm{i}\alpha x}$. Montrer que f est un vecteur propre de T.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de T.
4. Montrer que T est inversible. En utilisant l'égalité $T - \lambda\mathrm{id} = T(\mathrm{id} - \lambda T^{-1})$ et en calculant $\|T^{-1}\|$, déterminer $\sigma(T)$.

Exercice 12. (Issu de l'examen 2023)

Soit E, F deux espaces de Banach et $T\colon E \to F$ un opérateur compact.

1. Soit $x \in E$ et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E qui converge vers x pour $\sigma(E, E^*)$.
   (a) Montrer que $T(x)$ est la seule valeur d'adhérence possible de $(T(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ dans $(F, \|\cdot\|)$.
   (b) Montrer que $(T(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $T(x)$ dans $(F, \|\cdot\|)$.
2. On suppose E réflexif. Montrer la réciproque du résultat de la question précédente : si T est linéaire, continu et tel que $(T(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge fortement vers $T(x)$ dès que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement vers x, alors T est compact.
3. Cette réciproque est-elle valide pour tous les espaces de Banach E, F ?