

Feuille d'exercices n° 8

Exercice 1. Soit X un espace de Banach réflexif, et $\varphi \in X^*$. Montrer qu'il existe $x \in B_X$ tel que $\varphi(x) = \|\varphi\|$.

Exercice 2. Soit X un espace de Banach non réflexif. Montrer qu'il existe un convexe $C \subseteq X^*$ qui est fermé en norme mais n'est pas préfaiblement fermé.

Exercice 3. Soit X, Y deux espaces de Banach, et $T: X \rightarrow Y$ une surjection linéaire et continue. On suppose que X est réflexif; montrer que Y est réflexif.

Exercice 4. Soit H un espace de Hilbert séparable. On dit que $T: H \rightarrow H$ est un *opérateur de Hilbert-Schmidt* s'il existe une base orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de H telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \|T(e_n)\|^2 < +\infty$.

1. Soit $T: H \rightarrow H$ un opérateur et $(e_i)_{i \in \mathbf{N}}, (f_i)_{i \in \mathbf{N}}$ deux bases hilbertiennes de H .
 - (a) Montrer que $\sum_{i=0}^{+\infty} \|T(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \|T^*(e_i)\|^2$.
 - (b) En considérant $\sum_{i,j} |\langle T(e_i), f_j \rangle|^2$, montrer que $\sum_{i=0}^{+\infty} \|T(e_i)\|^2 = \sum_{j=0}^{+\infty} \|T(f_j)\|^2$.
2. Montrer que tout opérateur de Hilbert-Schmidt est compact.
3. Étant donnée une suite bornée $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ on définit $S: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ en posant $S(x) = (u_n x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ (cf. exercice 9).
 - (a) Montrer que S est compact si, et seulement si, $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers 0.
 - (b) Donner un exemple d'opérateur compact qui n'est pas de Hilbert-Schmidt.

Exercice 5.

1. Soit E un espace de Banach et $T: E \rightarrow E$ un opérateur compact. Rappeler pourquoi tout élément non nul de $\sigma(T)$ est une valeur propre de T .
2. On considère l'opérateur $T: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ défini par $T(x)(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ \frac{1}{n}x(n-1) & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$.
Montrer que T est compact et déterminer ses valeurs propres.

Exercice 6. Soit $E = C([0, 1], \mathbf{C})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Soit K une fonction continue de $[0, 1]^2$ dans \mathbf{C} . Pour $x \in [0, 1]$ on pose $T(f)(x) = \int_0^x K(x, y)f(y)dy$.

1. Montrer que $T: E \rightarrow E$ est bien définie et continue.
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ puis déterminer $\sigma(T)$.
3. Montrer que T est compact (indication : Ascoli).

Exercice 7. Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} et $P: E \rightarrow E$ un projecteur continu. On suppose que $P \notin \{0, \text{id}\}$. Montrer que $\sigma(P) = \text{vp}(P) = \{0, 1\}$.

Exercice 8. Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} et $S, T: E \rightarrow E$ des applications linéaires continues.

1. Montrer que $\sigma(ST) \setminus \{0\} = \sigma(TS) \setminus \{0\}$ (on pourra considérer $I + T(\lambda I - ST)^{-1}S$).
2. Montrer que si S ou T est inversible alors $\sigma(ST) = \sigma(TS)$.
3. Donner un exemple où on n'a pas $\sigma(ST) = \sigma(TS)$.

Exercice 9.

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ une suite bornée. On définit $T: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ en posant $T((x_n)_{n \in \mathbf{N}}) = (u_n x_n)_{n \in \mathbf{N}}$.
 - Montrer que T est bien définie et continue.
 - Montrer que chaque u_n est une valeur propre de T .
 - Montrer que si $\lambda \notin \overline{\{u_n : n \in \mathbf{N}\}}$ alors $\lambda \notin \sigma(T)$.
- Ètant donnée une partie A de \mathbf{C} , donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une application linéaire continue $T: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ telle que $A = \sigma(T)$.

Exercice 10.

- On définit $T: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ en posant $T(x)(n) = x(n+1)$ pour tout $x \in \ell^2$.
 - Montrer que T est bien définie, continue et déterminer sa norme.
 - Montrer que tout $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $|\lambda| < 1$ est valeur propre de T .
 - Déterminer $\sigma(T)$ ainsi que l'ensemble des valeurs propres de T .
- On définit $S: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ en posant pour $x \in \ell^2$ $S(x)(0) = 0$ et $S(x)(n) = x(n-1)$ pour $n \geq 1$.
 - Montrer que S est bien définie, continue et déterminer sa norme.
 - Montrer que S n'a pas de valeur propre.
 - Montrer que $T^* = S$ puis déterminer le spectre de S .

Exercice 11. Pour $f \in L^2([0, 1], \mathbf{C})$ et $t \in [0, 1]$ on pose $T(f)(t) = tf(t)$.

- Montrer que $T: L^2([0, 1], \mathbf{C}) \rightarrow L^2([0, 1], \mathbf{C})$ est linéaire et continue.
- Montrer que T n'a pas de valeur propre.
- Soit $\lambda \in [0, 1[$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $[\lambda, \lambda + \varepsilon] \subseteq [0, 1]$. On note f_ε la fonction caractéristique de $[\lambda, \lambda + \varepsilon]$ et on pose $g_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} f_\varepsilon$. En considérant $(T - \lambda \text{id})(g_\varepsilon)$, montrer que $\lambda \in \sigma(T)$.
- Montrer que si $\lambda \in \mathbf{C} \setminus [0, 1]$ alors $\lambda \notin \sigma(T)$, puis déterminer $\sigma(T)$.

Exercice 12. (Issu de l'examen 2023)

On note E l'espace des fonctions continues et bornées de \mathbf{R} dans \mathbf{C} , muni de $\|\cdot\|_\infty$. On considère $T: E \rightarrow E$ définie par $T(f)(x) = f(x+1)$ pour $f \in \mathbf{R}$.

- Montrer que $\sigma(T) \subseteq \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 1\}$ (on pourra commencer par calculer la norme de T).
- Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ et $f: x \mapsto e^{i\alpha x}$. Montrer que f est un vecteur propre de T .
- Déterminer l'ensemble des valeurs propres de T .
- Montrer que T est inversible. En utilisant l'égalité $T - \lambda \text{id} = T(\text{id} - \lambda T^{-1})$ et en calculant $\|T^{-1}\|$, déterminer $\sigma(T)$.

Exercice 13. (Issu de l'examen 2023)

Soit E, F deux espaces de Banach et $T: E \rightarrow F$ un opérateur compact.

- Soit $x \in E$ et $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E qui converge vers x pour $\sigma(E, E^*)$.
 - Montrer que $T(x)$ est la seule valeur d'adhérence possible de $(T(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ dans $(F, \|\cdot\|)$.
 - Montrer que $(T(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $T(x)$ dans $(F, \|\cdot\|)$.
- On suppose E réflexif. Montrer la réciproque du résultat de la question précédente : si T est linéaire, continu et tel que $(T(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ converge fortement vers $T(x)$ dès que $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge faiblement vers x , alors T est compact.
- Cette réciproque est-elle valide pour tous les espaces de Banach E, F ?