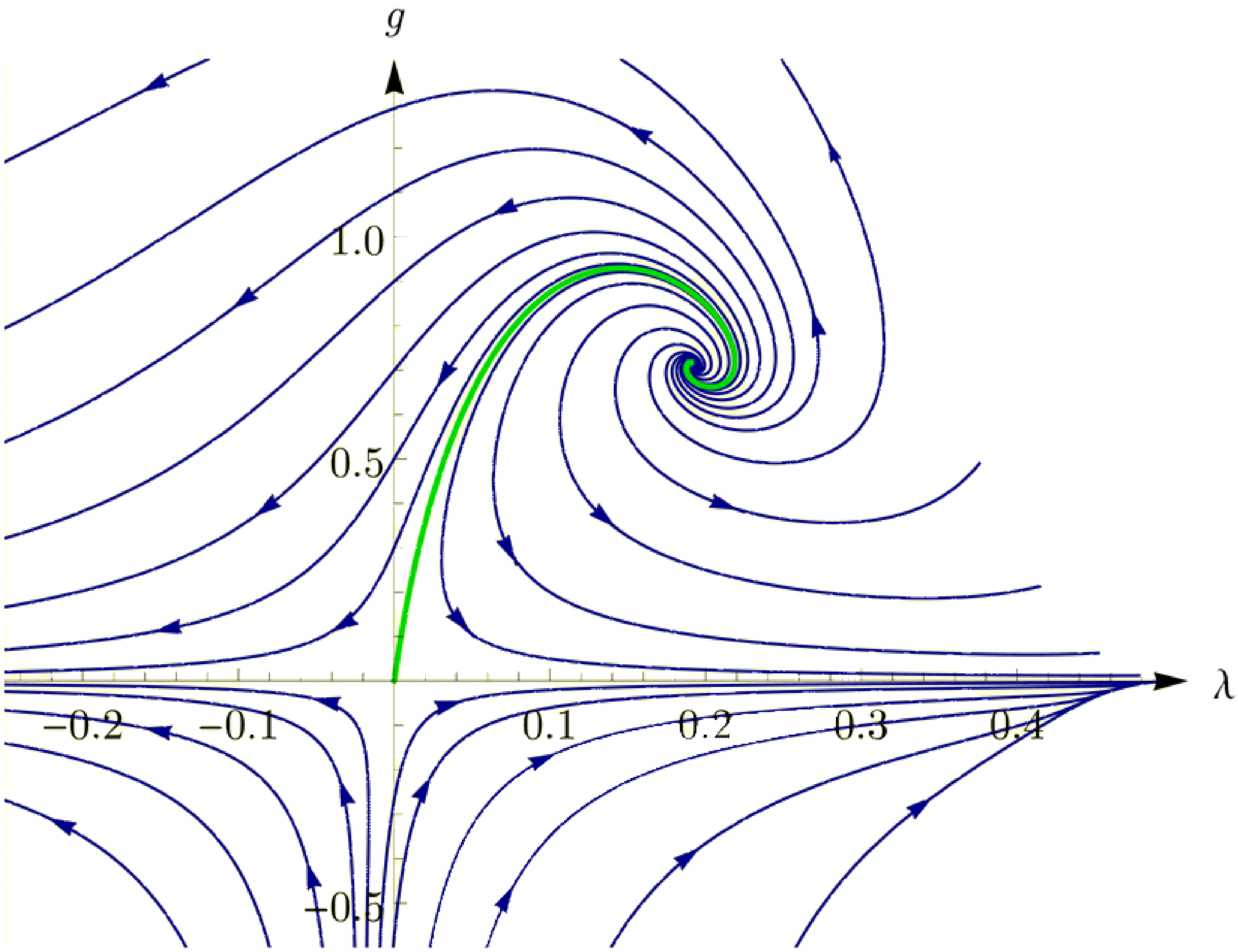
Topologie et Équations différentielles

Université Lyon I – Semestre d'automne 2020-2021



Responsable du cours : J. Melleray.
Chargé.e.s de TD : E. Fouassier, S. Gauthier, J. Melleray.

Table des matières

I

Topologie

Avant de commencer

Ce document a été rédigé pour accompagner l'enseignement du module "Topologie et Équations différentielles" au semestre d'automne 2020-2021. Il a été préparé en partie en prévision de possibles difficultés liées à la situation sanitaire, mais n'a pas pour vocation de se substituer aux cours magistraux ni aux séances de travaux dirigés.
Le contenu est plus vaste que ce que nous pourrons couvrir en un semestre ; certaines sections sont explicitement annoncées comme étant hors-programme, mais ce sera certainement aussi le cas d'autres parties du texte.
Les premiers chapitres de chaque partie, intitulés "Révisions", rappellent brièvement des notions importantes pour pouvoir bien comprendre ce qui est présenté dans le reste du cours. Il est important de les lire, de vous assurer que vous les comprenez, et le cas échéant de pallier à d'éventuelles lacunes.
Dans la partie "Topologie", un certain nombre d'exercices émaillent le texte (en particulier le chapitre 2, consacré aux espaces métriques) ; ils sont signalés par un des deux logos suivants :

Il s'agit d'exercices permettant de vérifier que vous avez compris une définition ou un théorème qui vient d'être discuté ; ils ne doivent normalement pas poser de problèmes si le cours a été bien assimilé jusque-là. Ces exercices doivent être traités au fur et à mesure de l'avancement du cours.

Ce sont des exercices pouvant être un peu plus difficiles, apparaissant habituellement à la fin d'une section. Certains seront traités en TD, d'autres ont pour but d'approfondir une notion qu'on n'aura que peu de temps pour discuter. Aucun de ces exercices n'est censé être d'une difficulté prohibitive, mais il est possible d'avancer dans le cours sans les traiter (il arrivera néanmoins parfois que le cours utilise le résultat d'un de ces exercices).

Un avertissement est de rigueur : ce texte vient d'être rédigé, et n'a pas encore été utilisé comme support d'enseignement ; il est certain qu'il comporte son lot de fautes de frappe et erreurs plus ou moins graves. Pour les signaler, ou poser des questions sur des points que vous ne comprenez pas, n'hésitez pas à poser des questions en cours ou en TD, ou à envoyer un message à melleray@math.univ-lyon1.fr.

L'état d'avancement du cours, au fil du semestre, pourra être suivi en ligne à l'adresse accessible en cliquant sur le code ci-contre (depuis le fichier .pdf) ou en le scannant avec un téléphone (pour la version papier)

Bonne lecture.

Quantités résolues, quantités non résolues, quantités inconnues ; c'était ça la topologie ! La stratosphère de la pensée humaine ! Au vingt-quatrième siècle peut-être serait-elle utile à quelqu'un, mais pour l'instant...

Le pavillon des cancéreux
A. Soljenytsine

Première partie

Topologie

Chapitre 1

Révisions

Dans ce chapitre, on va brièvement rappeler quelques propriétés qu'on utilisera dans le reste du cours, et qui sont normalement déjà connues ; ainsi que fixer un peu de vocabulaire.

1.1 Un peu de théorie des ensembles

Définition 1.1
Un ensemble X sera dit *dénombrable* s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur X ; et *au plus dénombrable* si X est fini ou dénombrable.

Théorème 1.2
Soit X, Y deux ensembles.

- Si Y est au plus dénombrable, et s'il existe une injection $f\colon X \to Y$, alors X est au plus dénombrable.
- Si X est au plus dénombrable, et s'il existe une surjection $f\colon X \to Y$, alors Y est au plus dénombrable.
- Si A, B sont deux ensembles au plus dénombrables, alors $A \times B$ est au plus dénombrable.
- Si pour tout $i \in \mathbb{N}$ A_i est une partie au plus dénombrable, alors $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ est au plus dénombrable.

En particulier, $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$ est dénombrable, ainsi que $\mathbb{N}^*$, donc $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable ; l'application

$$(n, m) \mapsto \frac{n}{m}$$

est une surjection de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{Q}$. Par conséquent :

Théorème 1.3
L'ensemble $\mathbb{Q}$ de tous les nombres rationnels est un ensemble dénombrable.

Définition 1.4

Soit X, Y deux ensembles, et $f\colon X \to Y$ une fonction.

- Pour tout $A \subseteq X$ on note

$$f(A) = \{y \in Y \colon \exists x \in A \ f(x) = y\}$$

l'image de A par f.
- Pour tout $B \subseteq Y$, on note

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \colon f(x) \in B\}$$

l'image réciproque de B par f.

Attention!

On utilise la notation $f^{-1}(B)$ même si f n'admet pas d'inverse ; rappelons que $f\colon X \to Y$ admet un inverse f^{-1} si, et seulement si, f est une bijection.
Quand cela se produit, pour $B \subseteq X$, on a bien l'égalité

$$\{x \in X \colon \exists y \in B \ f^{-1}(y) = x\} = \{x \in X \colon f(x) \in B\}$$

Autrement dit, l'image réciproque de B par f est bien égale à l'image de B par f^{-1} quand f est une bijection ; mais la notation $f^{-1}(B)$ a toujours un sens, que f soit bijective ou non.

Théorème 1.5

Soit X, Y deux ensembles, et $f\colon X \to Y$ une fonction. Alors on a :

- Pour tout $A, B \subseteq X$, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- Pour tout $A, B \subseteq Y$, $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
- Pour tout $A, B \subseteq Y$, $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Notons qu'on a toujours $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$, mais qu'il n'y a pas toujours égalité entre ces deux ensembles (si nécessaire, l'exemple d'une fonction constante devrait vous en convaincre).

Théorème 1.6

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$. Alors A admet un plus petit élément, qu'on note $\min(A)$.

C'est cette propriété des entiers qui permet de justifier les démonstrations par récurrence.

Théorème 1.7 (Principe des tiroirs)

Soit X un ensemble infini, et $A_1, \ldots, A_n$ des parties de X telles que $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Alors il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que A_i est infini.

Cet énoncé nous sera utile dans le cas où $X = \mathbb{N}$; on utilisera aussi la propriété suivante des sous-ensembles de $\mathbb{N}$.

Théorème 1.8
Soit A un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$. Alors il existe une fonction $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et telle que

$$A = \varphi(\mathbb{N}) = \{\varphi(n) \colon n \in \mathbb{N}\}$$

1.2 Quelques propriétés de $\mathbb{R}$

On va utiliser sans démonstration des propriétés fondamentales de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, qu'on rappelle brièvement.

Théorème 1.9 (Inégalité triangulaire)
Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Alors on a

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \text{et} \quad ||x| - |y|| \leq |x-y|$$

Théorème 1.10
L'ensemble $(\mathbb{R}, <)$ est *archimédien*, c'est-à-dire que, pour tout $x > 0$ et tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.

Cet énoncé a une conséquence très souvent utilisée en analyse.

Théorème 1.11
Soit x un réel positif ou nul. Alors $x = 0$ si, et seulement si, $x \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

En particulier, pour montrer qu'un réel x est nul, il suffit de montrer que $|x| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Énonçons une autre conséquence du fait que $(\mathbb{R}, <)$ est archimédien.

Théorème 1.12
Soit $x \in \mathbb{R}$, et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $|q - x| \leq \varepsilon$ (on dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$).

Définition 1.13
Soit A une partie de $\mathbb{R}$, et $x \in \mathbb{R}$. On dit que

- x est un *majorant* de A si $a \leq x$ pour tout $a \in A$.
- x est la *borne supérieure* de A si x est un majorant de A, et $x \leq y$ pour tout majorant y de A. On note alors $x = \sup(A)$.
- x est un *minorant* de A si $a \geq x$ pour tout $a \in A$.
- x est la *borne inférieure* de A si x est un minorant de A, et $x \geq y$ pour tout minorant y de A. On note alors $x = \inf(A)$.

Définition 1.14
Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit que A est *majorée* si A admet un majorant, c'est-à-dire s'il existe M tel que $a \leq M$ pour tout $a \in A$.
- On dit que A est *minorée* si A admet un minorant, c'est-à-dire s'il existe m tel que $a \geq m$ pour tout $a \in A$.
- On dit que A est *bornée* si A est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|a| \leq M$ pour tout $a \in A$.

Théorème 1.15 (Axiome de la borne supérieure)
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ à la fois majorée et non vide. Alors A admet une borne supérieure.

Symétriquement, si A est minorée et non vide alors A admet une borne inférieure.
Il arrivera parfois qu'on s'autorise à parler de borne supérieure même quand A n'est pas majorée, ou de borne inférieure même quand A n'est pas minorée ; si A n'est pas majorée on écrira $\sup(A) = +\infty$, et si A n'est pas minorée alors $\inf(A) = -\infty$.

Théorème 1.16 (Caractérisations de la borne supérieure)
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, et $x \in \mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $x = \sup(A)$.
2. x est un majorant de A, et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a \in A$ tel que $a \geq x - \varepsilon$.
3. x est un majorant de A, et il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers x (c'est-à-dire telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n - x| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$).

Donnons un exemple d'utilisation de la notion de borne supérieure.

Théorème 1.17
Soit (x_n) une suite de réels qui est à la fois croissante et majorée. Alors (x_n) est convergente.

Démonstration. Soit $A = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$, et $x = \sup(A)$. Montrons que (x_n) converge vers x.
Pour cela, fixons $\varepsilon > 0$; par la caractérisation d'une borne supérieure rappelée ci-dessus, il existe n tel que $x - \varepsilon \leq x_n$; puisque (x_n) est croissante, et $x_n \leq x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $x - \varepsilon \leq x_m \leq x$ pour tout $m \geq n$.
Cela montre que (x_n) converge vers x. $\square$

Définition 1.18
Soit I une partie de $\mathbb{R}$. Alors I est un *intervalle* s'il satisfait la propriété suivante :
Pour tout $x, y \in I$ et tout z tel que $x \leq z \leq y$, on a $z \in I$.

Soit I un intervalle non vide. Notons $M = \sup(I)$ (éventuellement, $+\infty$), et $m = \inf(I)$ (éventuellement, $-\infty$). Soit $z \in \mathbb{R}$ tel que $m < z < M$.
Par caractérisation des bornes supérieure et inférieure d'un ensemble, il existe $x, y \in I$ tels que $x < z$ et $z < y$; puisque I est un intervalle, on en déduit que $z \in I$.
On vient d'établir que $]\inf(I), \sup(I)[\subseteq I$.
Ceci nous montre que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont d'une des quatre formes suivantes (selon que $\inf(I), \sup(I)$ appartiennent ou non à I) :

- $]a, b[$, avec éventuellement $a = -\infty$, $b = +\infty$. On convient que $]a, a[= \emptyset$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
- $[a, b[$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
- $]a, b]$, avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$.
- $[a, b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ (on dit alors que I est un *segment*).

Chapitre 2

Espaces métriques

2.1 Distances : définitions, vocabulaire, premières propriétés

La notion d'*espace métrique* telle qu'on va la présenter maintenant, et l'utiliser dans ce cours, cherche à donner un sens mathématique précis aux propriétés que doit satisfaire une façon de mesurer l'écart entre des éléments d'un même ensemble. Ces propriétés sont modelées sur celles de la longueur d'un vecteur dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Définition 2.1

Soit X un ensemble. Une *distance* sur X est une fonction $d\colon X \times X \to [0, +\infty[$ satisfaisant les propriétés suivantes :

1. $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. (séparation)
2. $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x)$. (symétrie)
3. $\forall x, y, z \in X \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (inégalité triangulaire)

On dit alors que (X, d) est un *espace métrique*.

La première des trois propriétés ci-dessus est appelée *axiome de séparation* : elle dit en particulier que deux points distincts sont nécessairement à distance strictement positive.
La deuxième propriété est l'*axiome de symétrie*.
Enfin, la troisième est appelée *inégalité triangulaire*. C'est peut-être la moins intuitive ; dans $\mathbb{R}^2$, muni de sa notion usuelle de distance, elle correspond au fait que la longueur d'un côté d'un triangle est toujours inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Une conséquence de l'inégalité triangulaire est l'idée intuitive que, si x est proche de y et y est proche de z, alors x est proche de z (deux points sont "proches" quand leur distance est petite).
Cela a aussi une conséquence à plus grande échelle : si x et y sont proches, et z est un point quelconque de X, alors les distances $d(x, z)$ et $d(y, z)$ sont proches l'une de l'autre.

Théorème 2.2

Soit (X, d) un espace métrique. Pour tout $x, y, z \in X$, on a $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$.

Démonstration. Soit $x, y, z \in X$.
On a $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, donc $d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y)$.
On obtient de même $d(y,z) - d(x,z) \leq d(x,y)$.
On a donc $-d(x,y) \leq d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y)$ c'est-à-dire

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$$

□

Exemple 2.3

Un exemple fondamental d'espace métrique est $\mathbb{R}$ muni de la distance définie par, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$d(x,y) = |x - y|$$

Plus généralement, beaucoup des distances que nous rencontrerons proviennent d'une *norme*, dont nous rappelons la définition maintenant.

Définition 2.4

Soit X un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une *norme* sur X est une fonction $\|\cdot\| \colon X \to [0, +\infty[$ satisfaisant les conditions suivantes :

1. $\forall x \in X \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (séparation)
2. $\forall x, y \in X \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (resp. $\lambda \in \mathbb{C}$) $\forall x \in X \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (homogénéité)

On dit alors que $(X, \|\cdot\|)$ est un *espace normé*.

On reviendra plus en détail sur les espaces vectoriels normés plus tard dans le cours. Pour l'instant, notons le fait fondamental suivant.

Théorème 2.5

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors la fonction $d \colon X \times X \to [0, +\infty[$ définie par

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

est une distance sur X.

On dira que d définie comme ci-dessus est la distance *induite par* $\|\cdot\|$.

Démonstration. Pour tout $x, y \in X$ on a

$$\begin{aligned} d(x,y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \|x - y\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = y \end{aligned}$$

Ceci montre que d vérifie l'axiome de séparation. La symétrie vient du fait que, pour tout $x, y \in X$, on a

$$\|x - y\| = \|-(y - x)\| = \|y - x\|$$

Pour vérifier l'inégalité triangulaire, on prend $x, y, z \in X$ et on écrit

$$\begin{aligned} d(x,y) + d(y,z) &= \|x-y\| + \|y-z\| \\ &\geq \|(x-y)+(y-z)\| \\ &= \|x-z\| \\ &= d(x,z) \ . \end{aligned}$$

□

Les distances issues d'une norme sont celles avec lesquelles nous travaillerons principalement. L'ensemble X ne sera pas forcément un espace vectoriel tout entier, c'est pourquoi la remarque suivante sera importante : si (X,d) est un espace métrique, et $A \subseteq X$, alors la restriction de d à A munit A d'une structure d'espace métrique.
La distance discrète qu'on introduit maintenant donne un exemple de distance très différente de ce à quoi on est habitué ; quand on réfléchit à un énoncé portant sur tous les espaces métriques, il peut être fructueux de commencer par se demander si cet énoncé est valide pour un ensemble muni de la distance discrète.

Exemple 2.6

Soit X un ensemble. On définit une fonction $d \colon X \times X \to [0,+\infty[$ en posant

$$\forall x, y \in X \quad d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrons que d est une distance sur X, appelée *distance discrète*.
Premièrement, $d(x,y) = 0$ est bien équivalent à $x = y$.
Ensuite, on a pour tout x, y tel que $x \neq y$ l'égalité $d(x,y) = d(y,x) = 1$. On voit donc que dans tous les cas $d(x,y) = d(y,x)$.
Pour vérifier l'inégalité triangulaire, fixons $x, y, z \in X$.
Si $x = z$ alors on a l'inégalité $d(x,z) = 0 \leq d(x,y) + d(y,z)$.
Si $x \neq z$ alors on doit avoir $x \neq y$ ou $z \neq y$, par conséquent $d(x,y) = 1$ ou $d(y,z) = 1$, ce dont on déduit

$$d(x,z) = 1 \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Définition 2.7

Soit (X,d) un espace métrique, $x \in X$ et $r \geq 0$. On définit :

- La *boule ouverte* de centre x et de rayon r par

$$B(x,r) = \{y \in X \colon d(x,y) < r\}.$$

- La *boule fermée* de centre x et de rayon r par

$$B_f(x,r) = \{y \in X \colon d(x,y) \leq r\}.$$

Pour $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, $B(x,r) =]x-r, x+r[$ et $B_f(x,r) = [x-r, x+r]$.

Exercice 2.8

Déterminer les boules ouvertes et les boules fermées d'un ensemble X muni de la distance discrète.

Définition 2.9

Soit (X,d) un espace métrique, et A une partie de X. On dit que A est *bornée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $d(a,a') \leq M$ pour tout $a, a' \in A$.

Notons que, si A est bornée et $a_0 \in A$ est fixé, alors il existe une constante M telle que pour tout $a \in A$ on a $d(a,a_0) \leq M$, donc $A \subseteq B_f(a_0, M)$.
Réciproquement, s'il existe $R \geq 0$ et $a_0 \in A$ tel que $A \subseteq B_f(a_0, R)$ alors pour tout $a, a' \in A$ on a

$$d(a,a') \leq d(a,a_0) + d(a_0,a') \leq 2R$$

et donc A est bornée.
On peut donc penser à une partie bornée A comme étant une partie qui est contenue dans une boule de rayon fini (et cette boule peut être centrée en n'importe quel point de A).

Définition 2.10

Soit (X,d) un espace métrique, et A une partie bornée. On appelle *diamètre* de A la quantité

$$\sup\{d(a,b) \colon a, b \in A\}$$

Exemple 2.11

1. Un ensemble muni de la distance discrète est borné.
2. Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, $\mathbb{N}$ n'est pas borné. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $d(n,0) = n$, donc $\{d(i,j) \colon i, j \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$ n'est pas majoré.
   L'ensemble $[0,1]$ est borné, de diamètre égal à 1 : pour le montrer, prenons $x, y \in [0,1]$. On a alors $d(x,y) = |y-x|$; par symétrie, on peut supposer que $y \geq x$, et on a alors

   $$0 \leq x \leq y \leq 1$$

   On en déduit que $y - x \leq 1$, donc $d(x,y) \leq 1$, ce qui montre que $[0,1]$ est borné, et de diamètre plus petit que 1. Comme par ailleurs $d(0,1) = 1$, on conclut que

   $$\text{diam}([0,1]) = \sup\{d(x,y) \colon x, y \in [0,1]\} = 1$$

   De même, $]0,1[$ est borné, et de diamètre plus petit que 1 puisque $]0,1[\subseteq [0,1]$. Et on a aussi, en utilisant un raisonnement similaire à celui ci-dessus :

   $$\text{diam}(]0,1[) = \sup\{d(x,y) \colon x, y \in]0,1[\} = \sup\{]0,1[\} = 1$$

   Donc $]0,1[$ est lui aussi de diamètre égal à 1.

La notion de distance va nous permettre de définir une notion générale de convergence de suites dans un espace métrique. On veut en particulier pouvoir parler de suites convergentes dans $\mathbb{R}^d$, et pour cela il est important de pouvoir parler de *produits* d'espaces métriques.

Théorème 2.12
Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Alors d_1 et d_∞ définies pour (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans $X \times Y$ par

$$\begin{aligned} d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &= d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2) \; ; \\ d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &= \max(d_X(x_1,x_2), d_Y(y_1,y_2)) \end{aligned}$$

sont des distances sur $X \times Y$. On appellera d_∞ la *distance produit* de d_X et d_Y.

Avant de passer à la preuve, notons qu'on vient de voir deux choix possibles de distance sur le produit de deux espaces métriques ; et il y en aurait d'autres. Immédiatement après avoir vérifié que ce sont bien des distances, on va se convaincre que ces deux choix sont, en un sens qu'on va rendre précis, équivalents.

Démonstration. Les applications d_1 et d_∞ sont à valeurs dans $[0, +\infty[$ et sont clairement symétriques puisque d_X et d_Y le sont.
Pour vérifier l'axiome de séparation pour d_1, considérons $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$. On a alors

$$\begin{aligned} d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = 0 &\Leftrightarrow d_X(x_1,x_2) = 0 \text{ et } d_Y(y_1,y_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ et } y_1 = y_2 \\ &\Leftrightarrow (x_1,y_1) = (x_2,y_2) \end{aligned}$$

La démonstration que d_∞ vérifie l'axiome de séparation est similaire.
Vérifions maintenant l'inégalité triangulaire : soit (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (x_3, y_3) dans $X \times Y$. Alors,

$$\begin{aligned} d_1((x_1,y_1),(x_3,y_3)) &= d_X(x_1,x_3) + d_Y(y_1,y_3) \\ &\le d_X(x_1,x_2) + d_X(x_2,x_3) + d_Y(y_1,y_2) + d_Y(y_2,y_3) \\ &= d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) + d_1((x_2,y_2),(x_3,y_3)). \end{aligned}$$

Ceci établit l'inégalité triangulaire pour d_1. Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} d_X(x_1,x_3) &\le d_X(x_1,x_2) + d_X(x_2,x_3) \\ &\le \max(d_X(x_1,x_2), d_Y(y_1,y_2)) + \max(d_X(x_2,x_3), d_Y(y_2,y_3)) \\ &\le d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) + d_\infty((x_2,y_2),(x_3,y_3)) \end{aligned}$$

De même, $d_Y(y_1, y_3) \le d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + d_\infty((x_2, y_2), (x_3, y_3))$. Ainsi,

$$d_\infty((x_1,y_1),(x_3,y_3)) = \max(d_X(x_1,x_3), d_Y(y_1,y_3)) \le d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) + d_\infty((x_2,y_2),(x_3,y_3))$$

$\square$

Définition 2.13
Soit X un ensemble, et d_1, d_2 deux distances sur X. On dit que d_1, d_2 sont *Lipschitz-équivalentes* s'il existe des constantes $m, M > 0$ telles que

$$\forall x, y \in X \quad md_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq Md_1(x,y)$$

Exemple 2.14
Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Alors les distances d_1 et d_∞ définies plus haut sont Lipschitz-équivalentes.
En effet, on a pour tout $(x,y),(x',y') \in X \times Y$ les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{rcl} d_\infty((x,y),(x',y')) & = & \max(d_X(x,x'), d_Y(y,y')) \\ & \leq & d_X(x,x') + d_Y(y,y') \\ & = & d_1((x,y),(x',y')) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} d_1((x,y),(x',y')) & = & d_X(x,x') + d_Y(y,y') \\ & \leq & 2\max(d_X(x,x'), d_Y(y,y')) \\ & \leq & 2d_\infty((x,y),(x',y')) \end{array}$$

On a ainsi établi que $d_\infty \leq d_1 \leq 2d_\infty$.

2.2 Suites dans un espace métrique

Rappelons qu'une *suite* à valeurs dans un ensemble X est une fonction de $\mathbb{N}$ dans X, c'est-à-dire un élément de $X^{\mathbb{N}}$.
On utilisera diverses notations suivant le contexte : une même suite pourra être notée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\geq 0}$ ou simplement (x_n).
On s'autorisera également à appeler "suites" des fonctions de $[n_0, +\infty[$ dans $\mathbb{N}$, pour $n_0 \in \mathbb{N}$ fixé ; on écrira alors $(x_n)_{n\geq n_0}$.
L'intérêt principal de la notion de distance, pour nous, est de pouvoir formaliser la notion de suites convergentes : une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x si et seulement si la distance $d(x_n, x)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Avec des quantificateurs, on obtient la définition suivante.

Définition 2.15
Soit (X, d) un espace métrique, $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de X et $x \in X$. On dit que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x si :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ d(x_n, x) \leq \varepsilon\ ,$$

c'est-à-dire si :

$$d(x_n, x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Attention à l'ordre des quantificateurs !
Informellement, une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x si, quand n devient grand, x_n devient arbitrairement proche de x.

Théorème 2.16 (Unicité de la limite)
Soit (X,d) un espace métrique et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de X qui converge vers $x \in X$. Si $(x_n)_{n\geq 0}$ converge aussi vers $x' \in X$, alors $x' = x$.

Démonstration. Supposons qu'une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge à la fois vers x et x' ; fixons $\varepsilon > 0$.
On peut trouver $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N_1$, et $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x') \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N_2$.
Pour $n \geq \max(N_1, N_2)$ on a à la fois $d(x_n, x) \leq \varepsilon$ et $d(x_n, x') \leq \varepsilon$, ce qui entraîne (par l'inégalité triangulaire) que

$$d(x, x') \leq d(x, x_n) + d(x_n, x') \leq 2\varepsilon$$

Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on conclut que $d(x, x') = 0$, donc $x = x'$. $\square$

Théorème 2.17
Soit (X,d) un espace métrique et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite convergente d'éléments de X. Alors $(x_n)_{n\geq 0}$ est bornée.

Démonstration. Notons x la limite de (x_n), et appliquons la définition de la convergence pour $\varepsilon = 1$ (n'importe quelle constante > 0 ferait aussi bien l'affaire).
Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x) \leq 1$ pour tout $n \geq N$. Notons

$$R = 1 + \sum_{n=0}^{N-1} d(x_n, x)$$

Alors $d(x_n, x) \leq R$ pour tout $n \leq N-1$, et aussi pour tout $n \geq N$: par conséquent, $d(x_n, x) \leq R$ pour tout n, ce qui montre que $(x_n)_{n\geq 0}$ est bornée.

$\square$

Exercice 2.18
Soit X un ensemble, et d la distance discrète sur X. Soit (x_n) une suite d'éléments de X. Montrer que (x_n) converge dans (X,d) si, et seulement si, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n, m \geq N \quad x_n = x_m$$

(On dit alors que la suite (x_n) est *stationnaire*)

Voyons maintenant comment décrire les suites convergentes dans un espace muni d'une distance produit.

Théorème 2.19

Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On munit $X \times Y$ de la distance produit d_∞ définie au théorème 2.12.
Alors une suite $\big((x_n, y_n)\big)_{n\geq 0}$ d'éléments de $X \times Y$ converge vers (x, y) si, et seulement si, $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x et $(y_n)_{n\geq 0}$ converge vers y.

Par exemple, dans $\mathbb{R}^d$ muni de la distance induite par $\|\cdot\|_\infty$, on retrouve le fait qu'une suite est convergente si et seulement si chaque suite de coordonnées converge.

Démonstration. Supposons pour commencer que $\big((x_n, y_n)\big)_{n\geq 0}$ converge vers (x, y) dans $X \times Y$. Fixons $\varepsilon > 0$; alors on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait

$$d_\infty((x_n, y_n), (x, y)) \leq \varepsilon$$

Autrement dit, pour tout $n \geq N$ on a simultanément $d_X(x_n, x) \leq \varepsilon$ et $d_Y(y_n, y) \leq \varepsilon$.
Ceci prouve que $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x et que $(y_n)_{n\geq 0}$ converge vers y.

Supposons maintenant que $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x et $(y_n)_{n\geq 0}$ converge vers y. Fixons $\varepsilon > 0$.
On peut trouver $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $d_X(x_n, x) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N_1$, $d_Y(y_n, y) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N_2$.
Alors, si on pose $N = \max(N_1, N_2)$, on obtient que pour tout $n \geq N$

$$d_\infty((x_n, y_n), (x, y)) = \max\left(d_X(x_n, x), d_Y(y_n, y)\right) \leq \varepsilon$$

Ceci montre que $\big((x_n, y_n)\big)_{n\geq 0}$ converge vers (x, y) dans $(X \times Y, d_\infty)$. □

Exercice 2.20

Soit X un ensemble, et d, δ deux distances Lipschitz-équivalentes sur X. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de X, et $x \in X$. Montrer que $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x dans (X, d) si, et seulement si, $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x dans (X, δ).

En particulier, on voit que dans un espace produit, d_1 et d_∞ ont les mêmes suites convergentes (on dira bientôt que ces distances sont *topologiquement équivalentes*).
Notons qu'il est possible de mettre, sur un même ensemble X, des distances qui n'ont pas les mêmes suites convergentes. C'est par exemple ce qui arrive si on munit $\mathbb{R}$ de la distance discrète et de la distance induite par la valeur absolue.

Définition 2.21

Soit X un ensemble, et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de X.
Une *suite extraite* de $(x_n)_{n\geq 0}$, également appelée *sous-suite*, est une suite de la forme $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ où $(n_k)_{k\geq 0}$ est une suite strictement croissante d'entiers.
De manière équivalente, une suite extraite est une suite de la forme $(x_{\varphi(k)})_{k\geq 0}$, où $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction *strictement croissante* (il suffit de poser pour $k \geq 0$, $\varphi(k) = n_k$).

Intuitivement : une suite extraite est obtenue en ne gardant que certains termes de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ et en oubliant les autres ; par exemple, la suite $(x_{2k})_{k\geq 0}$ est une suite extraite de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$. La résultat suivant est important à garder en tête.

☆ Théorème 2.22
Soit $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\varphi(k) \geq k$ (et en particulier $\varphi(k)$ tend vers $+\infty$).

Démonstration. Montrons le résultat par récurrence.
Pour $n = 0$, il est clair que $\varphi(0) \geq 0$ puisque $\varphi(0) \in \mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\varphi(n) \geq n$. Alors, comme φ est strictement croissante, on a

$$\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$$

Comme $\varphi(n)$ est un entier, on a donc $\varphi(n+1) \geq n+1$, ce qui permet de conclure par récurrence. □

Notons que le fait que φ ci-dessus soit *strictement* croissante est crucial ! La suite constante (x_0), par exemple, n'est pas une suite extraite de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$, même si l'application $\varphi\colon n \mapsto 0$ est croissante.

☆ Théorème 2.23
Soit $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels. Alors il existe $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que l'une des deux conditions suivantes soit satisfaite :

1. $(n_{\varphi(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
2. $(n_{\varphi(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ est constante.

Démonstration. Si jamais (n_i) prend une même valeur, disons k, une infinité de fois, alors

$$A_k = \{i\colon n_i = k\}$$

est infini. En énumérant A_k de manière strictement croissante sous la forme $\{\varphi(i)\colon i \in \mathbb{N}\}$, on obtient $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et telle que $n_{\varphi(i)} = k$ pour tout i.
Reste à traiter le cas où chaque A_k est fini.
On construit φ par récurrence : pour initialiser, posons $\varphi(0) = 0$. Supposons $\varphi(0) < \ldots < \varphi(i)$ définis, de telle façon qu'on ait aussi $n_{\varphi(0)} < \ldots < n_{\varphi(i)}$ (condition vide si $i = 0$).
Alors

$$A = \bigcup_{k\leq n_{\varphi(i)}} A_k$$

est fini. On peut donc trouver j tel que, pour tout $l \in A$, on ait $j > l$. Puisque $j \notin A$, on a aussi $n_j > n_{\varphi(i)}$.
Posons $\varphi(i+1) = j$. Comme $\varphi(i) \in A$, on a à la fois $\varphi(i+1) > \varphi(i)$, et $n_{\varphi(i+1)} > n_{\varphi(i)}$.
On continue la construction inductivement.

□

À titre d'exemple, montrons un joli résultat sur les suites de réels.

Théorème 2.24

Toute suite de réels admet une sous-suite monotone.

Démonstration. Soit (x_n) une suite de réels.
Pour cette preuve, on dira qu'un entier n est un *pic*, si pour tout $m > n$, $x_n > x_m$.
S'il y a une infinité de pics $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, alors la suite extraite $(x_{n_k})_{k \geq 0}$ est strictement décroissante.
Sinon, il existe un entier N tel qu'aucun entier $n \geq N$ n'est un pic.
On construit alors par récurrence une suite strictement croissante d'entiers (n_k) tel que la sous-suite (x_{n_k}) soit croissante : pour l'initialisation, on pose $n_0 = N$.
Supposons avoir choisi $N = n_0 < n_1 < \ldots < n_k$, tel que $x_{n_0} \leq \ldots \leq x_{n_k}$ (condition vide si $k = 0$).
Comme $n_k \geq N$, n_k n'est pas un pic et par conséquent il existe $n > n_k$ tel que $x_{n_k} \leq x_n$. On pose $n_{k+1} = n$ et on poursuit la construction. $\square$

Attention!

Notons qu'on va être parfois amené à faire plusieurs extractions de suites dans un même raisonnement (en particulier dans le chapitre sur la notion de compacité) ; en pratique, on part d'une suite $(x_n)_{n \geq 0}$, on en extrait une première sous-suite $(y_k)_{k \geq 0} = (x_{\varphi(k)})_{k \geq 0}$, et on veut à nouveau extraire une sous-suite de (y_k), de la forme $(z_l)_{l \geq 0} = (y_{\psi(l)})_{l \geq 0}$.
On voit trop souvent la formule $z_l = x_{\psi(\varphi(l))}$, alors que la formule correcte est $z_l = y_{\psi(l)} = x_{\varphi(\psi(l))}$.
Il faut bien faire attention à l'ordre dans lequel vous écrivez votre composition de fonctions !

Théorème 2.25

Soit (X, d) un espace métrique, $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de X et $x \in X$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Il existe une suite extraite $(x_{\varphi(k)})_{k \geq 0}$ de $(x_n)_{n \geq 0}$ qui converge vers x.
2. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $x_n \in B(x, \varepsilon)$.

Démonstration. Supposons qu'il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers x ; fixons $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$.
On sait qu'il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_{\varphi(n)}, x) < \varepsilon$ pour tout $n \geq M$.
Soit $N' = \max(N, M)$. Pour tout $n \geq N'$ on a à la fois $\varphi(n) \geq n \geq N$ et $d(x_{\varphi(n)}, x) < \varepsilon$, c'est-à-dire $x_{\varphi(n)} \in B(x, \varepsilon)$.
Comme $\varphi(n) \geq N' \geq N$, ceci montre que la deuxième condition ci-dessus est vérifiée.

Réciproquement, supposons la deuxième condition vérifiée, et utilisons-la pour construire une fonction $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $d(x_{\varphi(n)}, x) < 2^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Appliquer l'hypothèse avec $\varepsilon = 1$ nous permet de choisir $\varphi(0)$; supposons $\varphi(0) < \ldots < \varphi(n)$ construits.
En appliquant l'hypothèse à $N = \varphi(n) + 1$ et $\varepsilon = 2^{-(n+1)}$, on obtient l'existence d'un indice

$$i > \varphi(n) \text{ tel que } d(x_i, x) < 2^{-(n+1)}$$

Poser $\varphi(n+1) = i$ nous permet de poursuivre la construction. $\square$

Définition 2.26
Lorsqu'une des conditions équivalentes du théorème précédent est satisfaite, on dit que x est une *valeur d'adhérence* de $(x_n)_{n\geq 0}$.

Exemple 2.27
Considérons la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $x_n = (-1)^n$. Alors pour tout n, $x_{2n} = 1$ et $x_{2n+1} = -1$, ce qui montre que -1 et 1 sont des valeurs d'adhérence de (x_n).
De plus, toute $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ doit prendre une infinité de fois des valeurs paires, ou une infinité de fois des valeurs impaires ; donc si $(x_{\varphi(k)})$ est une sous-suite convergente, elle prend une infinité de fois la valeur 1 ou une infinité de fois la valeur -1, et sa limite est donc égale à 1 ou -1.
Les seules valeurs d'adhérence de (x_n) sont donc -1 et 1.

Exercice 2.28
Soit (X,d) un espace métrique. Montrer que si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite convergente alors toute suite extraite $(x_{\varphi(k)})_{k\geq 0}$ est convergente. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2.29
Donner un exemple d'espace métrique (X,d), et de suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de X, tels que (x_n) admette une unique valeur d'adhérence mais ne converge pas.

2.3 Espaces vectoriels normés

Comme on l'a déjà vu, les espaces vectoriels normés forment une classe importante d'espaces métriques ; la norme mesure simplement la distance à 0.

Définition 2.30
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $p \in [1, +\infty[$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

On pose aussi $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| \colon i \in \{1, \dots, n\}\}$.

Il est assez simple de vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$, et on le laisse en exercice. Pour ce qui est de $\|\cdot\|_p$, $1 < p < +\infty$, il est immédiat d'après la définition qu'elle est homogène et satisfait l'axiome de séparation. L'inégalité triangulaire nécessite plus de travail ; on va commencer par établir deux inégalités que vous verrez aussi, dans un cadre plus général, en théorie de la mesure.

Définition 2.31

Pour $p \in]1, +\infty[$, il existe un unique $q \in]1, +\infty[$ tel que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

On l'appelle l'*exposant conjugué* de p.
(notons qu'alors p est l'exposant conjugué de q)

Théorème 2.32 (Inégalité de Young)

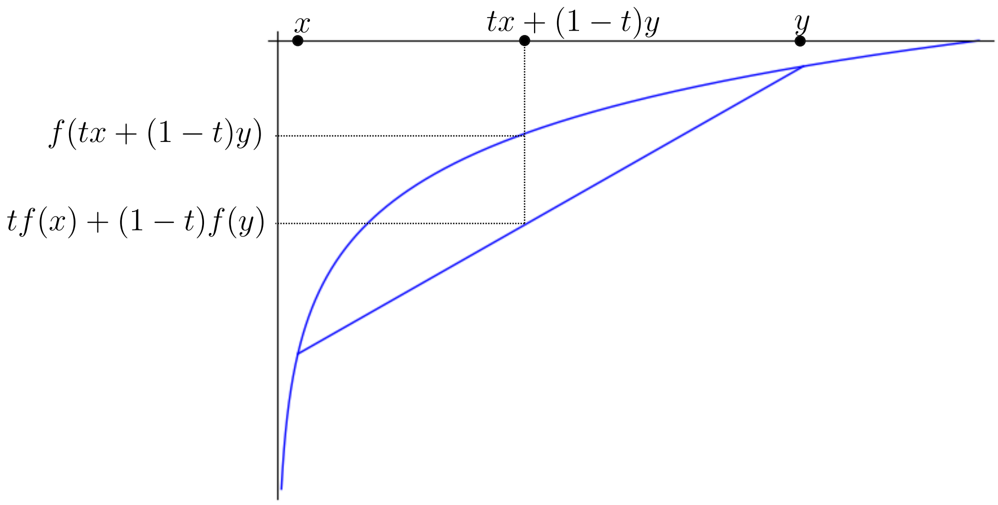
Soit $p \in]1, +\infty[$ et q son exposant conjugué. Alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$ on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Démonstration. On va utiliser la concavité de $\ln$, i.e. le fait que pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$\ln(tx + (1-t)y) \geq t\ln(x) + (1-t)\ln(y)$$

(cela découle du fait que la dérivée seconde de $\ln$ est négative).



Concavité de $\ln$: le graphe est au-dessus de ses cordes

Si on fixe $a, b > 0$ on a donc (avec $t = \frac{1}{p}$, $1 - t = \frac{1}{q}$) :

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln(ab)$$

En appliquant l'exponentielle des deux côtés, et en utilisant que $x \mapsto e^x$ est croissante, on déduit l'inégalité de Young. Dans le cas où a ou b est nul, l'inégalité se vérifie directement. $\square$

Notons que, comme $x \mapsto \ln(x)$ est en fait strictement croissante et strictement concave, on ne peut avoir égalité dans l'inégalité de Young que si $a^p = b^q$.

Remarque 2.33

Dans le cas $p = q = 2$, l'inégalité de Young s'écrit $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$, ou encore $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$, ce qui est une conséquence immédiate de l'identité remarquable

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$$

Théorème 2.34 (Inégalité de Hölder)

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $p \in]1, +\infty[$ et q son exposant conjugué. Alors on a

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|q$$

Démonstration. L'inégalité est immédiate à vérifier si x ou y est le vecteur nul, donc on suppose dans la suite qu'ils sont tous deux non nuls (ce qui nous permettra, plus bas, de diviser par $\|x\|_p$ et $\|y\|_q$). Commençons par établir le résultat dans le cas où $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$.
Par l'inégalité de Young, on a pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ que

$$|x_i y_i| \leq \frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q}$$

En sommant ces inégalités pour i entre 1 et n, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|^p}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{|y_i|^q}{q} = \frac{\|x\|_p}{p} + \frac{\|y\|_q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|x\|_p \|y\|_q$$

On a obtenu l'inégalité désirée dans le cas particulier où $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$.
Pour traiter le cas général, on utilise le fait que les deux côtés de l'inégalité sont homogènes : en posant $x' = \frac{x}{\|x\|_p}$, $y' = \frac{y}{\|y\|_q}$ on a $\|x'\|_p = \|y'\|_q = 1$, donc

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| = \|x\|_p \|y\|_q \left(\sum_{i=1}^{n} |x'_i y'_i| \right) \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

□

Étant donné le cas d'égalité de l'inégalité de Young, on peut observer qu'il y a égalité dans l'inégalité de Hölder si, et seulement si, $|x_i|^p = |y_i|^q$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.
On peut enfin justifier que $\| \cdot \|_p$ est bien une norme sur $\mathbb{R}^n$ pour $p \in [1, +\infty]$.

Théorème 2.35 (Inégalité de Minkowski)

Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $p \in [1, +\infty]$. Alors on a $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.
Par conséquent, $\| \cdot \|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.

Démonstration. On va encore ne considérer que le cas où $p \in]1, +\infty[$, les deux autres ayant déjà été évoqués. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a

$$|x_i + y_i|^p = |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + |y_i||x_i + y_i|^{p-1}$$

En sommant ces égalités et en appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient (en utilisant $q(p-1) = p$, où q est l'exposant conjugué de p) :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p &= \sum_{i=1}^{n} |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i||x_i + y_i|^{p-1} \\
&\leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{p} \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= (\|x\|_p + \|y\|_p) (\|x + y\|_p)^{p-1}
\end{aligned}$$

On vient d'obtenir

$$(\|x + y\|_p)^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) (\|x + y\|_p)^{p-1}$$

Si $\|x + y\|_p = 0$ on n'a rien à montrer ; sinon on peut diviser des deux côtés de l'inégalité par $(\|x + y\|_p)^{p-1}$ pour obtenir comme espéré que $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. □

Remarque 2.36
On a jusqu'ici évité d'utiliser l'exposant conjugué dans le cas où $p = 1, +\infty$; on va maintenant convenir que 1 et $+\infty$ sont conjugués l'un de l'autre.

Revenons quelques instants sur le cas $p = 2$ de l'inégalité de Hölder (dans ce cas on a aussi $q = 2$; on appelle $\| \cdot \|_2$ la *norme euclidienne*). On note $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$, et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la formule

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Théorème 2.37 (Inégalité de Cauchy–Schwarz)
Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$. On a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$$

avec égalité si, et seulement si, x et y sont linéairement dépendants.

Démonstration. L'inégalité se déduit immédiatement de la formule exprimant le produit scalaire en fonction des coordonnées dans la base canonique et de l'inégalité de Hölder pour le cas $p = 2$. Le cas d'égalité s'obtient aussi assez simplement à partir du cas d'égalité de l'inégalité de Hölder.
On va néanmoins présenter une preuve différente, instructive mais spécifique au cas $p = 2$. On peut supposer y non nul, sans quoi les deux côtés de l'inégalité valent 0 (et on a $y = 0x$). Considérons la fonction

$$f : t \mapsto (\|x + ty\|_2)^2.$$

On a

$$f(t) = \|x\|_2^2 + 2t\langle x, y\rangle + t^2\|y\|^2$$

Comme f est une fonction polynomiale de degré 2 et ne prend que des valeurs positives, son discriminant Δ doit être négatif ; autrement dit

$$\Delta = 4|\langle x, y\rangle|^2 - 4\|x\|_2^2\|y\|_2^2 \leq 0$$

Donc

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2\|y\|_2.$$

Ceci établit l'inégalité de Cauchy–Schwarz ; reste à étudier le cas d'égalité (toujours en supposant $y \neq 0$).

S'il existe un réel λ tel que $x = \lambda y$, alors on est bien dans le cas d'égalité.

Réciproquement, si $|\langle x, y\rangle| = \|x\|_2\|y\|_2$ alors le discriminant du polynôme introduit ci-dessus est nul, donc ce polynôme admet une racine réelle (double) t, qui vérifie donc

$$\|x + ty\|_2^2 = 0$$

Ceci entraîne que $x + ty = 0$, et démontre donc que x et y sont colinéaires. □

La notion d'équivalence lipschitzienne, déjà vue pour des distances, a une formulation simplifiée dans le cas des normes.

Définition 2.38

Soit X un espace vectoriel, et N_1, N_2 deux normes sur X.

On dit que N_1 et N_2 sont *équivalentes* s'il existe des constantes m, M strictement positives et telles que pour tout $x \in X$ on ait

$$mN_1(x) \leq N_2(x) \leq MN_1(x)$$

Comme son nom l'indique, on vient de définir une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur X.

Exercice 2.39

Montrer que deux normes N_1 et N_2 sur un même espace vectoriel X sont équivalentes si, et seulement si, leurs distances associées sont Lipschitz-équivalentes.

On reverra plus tard le théorème, normalement déjà connu et qu'il est en tout utile d'avoir déjà en tête, selon lequel toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes. On peut déjà le vérifier sur un exemple.

Exemple 2.40

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $p, q \in [1, +\infty]$. On va montrer que les normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$ sont des normes équivalentes sur $\mathbb{R}^n$.

Pour établir cela, on peut remarquer que pour tout $p \neq \infty$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\begin{aligned}(\|x\|_p)^p &= \sum_{i=1}^n |x_i|^p \\ &\leq n \max\{|x_i|^p \colon 1 \leq i \leq n\} \\ &= n(\|x\|_\infty)^p\end{aligned}$$

On en déduit que $\|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$.
De même, on voit que

$$\begin{aligned}(\|x\|_p)^p &= \sum_{i=1}^n |x_i|^p \\ &\geq \max\{|x_i|^p \colon 1 \leq i \leq n\} \\ &= (\|x\|_\infty)^p\end{aligned}$$

On a établi pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ les inégalités

$$\|x_\infty\| \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$$

Ainsi, chaque $\| \cdot \|_p$ est équivalente à $\| \cdot \|_\infty$, et elles sont donc toutes équivalentes entre elles.

On peut reformuler l'équivalence de normes en termes de boules unités : soit N_1, N_2 deux normes sur un même espace vectoriel X, telles qu'il existe $M > 0$ vérifiant $N_1(x) \leq M N_2(x)$ pour tout $x \in X$.
Alors, l'implication suivante est vérifiée pour tout $x \in X$:

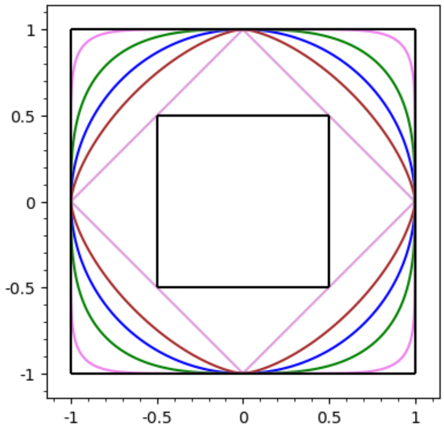
$$N_2(x) \leq 1 \Rightarrow N_1(x) \leq M$$

Autrement dit, $B_f^{N_2}(0,1) \subseteq B_f^{N_1}(0,M)$ (i).
Réciproquement, s'il existe M tel que $B_f^{N_2}(0,1) \subseteq B_f^{N_1}(0,M)$ alors on a pour tout $x \neq 0$:

$$N_2\left(\frac{x}{N_2(x)}\right) = 1 \text{ donc } N_1\left(\frac{x}{N_2(x)}\right) \leq\ M \text{ ou encore } N_1(x) \leq M N_2(x)$$

On voit donc que deux normes N_1, N_2 sont équivalentes si la boule unité de N_1 est contenue dans un multiple de la boule unité de N_2 et vice versa.
Le dessin suivant, qui représente les boules unités pour différentes valeurs de p, ainsi que la boule de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2}$ pour $\| \cdot \|_\infty$, illustre ainsi l'équivalence des normes $\| \cdot \|_p$ et $\| \cdot \|_q$ sur $\mathbb{R}^2$ pour tout $p, q \in [1, +\infty]$.

(i). Remarquez qu'on part d'un multiple de N_2 qui est plus grand que N_1, et qu'on en déduit que la boule unité de N_2 est contenue dans un multiple de la boule unité de N_1. Attention au sens de l'inclusion (plus une norme est grande, plus sa boule unité est petite)



L'équivalence des normes $\|\cdot\|_p$ en dimension 2

Pour l'instant, on n'a vu que des exemples de normes sur des espaces vectoriels de dimension finie. La situation est plus complexe (et plus intéressante aussi ?) en dimension infinie.

Définition 2.41

Pour $p \in [1, +\infty[$, on considère l'espace $\ell^p(\mathbb{N})$ formé par toutes les suites $(x_n)_{n\geq 0}$ telles que $\sum_{i=0}^{+\infty} |x_n|^p$ converge. On le note aussi ℓ^p.
On définit aussi $\ell^\infty(\mathbb{N})$: c'est l'ensemble des suites réelles bornées.

Théorème 2.42

Pour tout $p \in [1, +\infty]$ l'espace $\ell^p(\mathbb{N})$ est un espace vectoriel.
Pour $p < +\infty$, on peut le munir d'une norme, notée $\|\cdot\|_p$, en posant (pour $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^p$)

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

L'espace ℓ^∞ est lui aussi un espace vectoriel qu'on peut munir d'une norme, notée $\|\cdot\|_\infty$, en posant

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| \colon n \in \mathbb{N}\}$$

Démonstration. Commençons par le cas où p est fini, et considérons $x, y \in \ell^p$ et $N \in \mathbb{N}$.
Par l'inégalité de Minkowski, on a

$$\sum_{n=0}^{N} |x_i + y_i|^p \leq \left(\left(\sum_{i=0}^{N} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=0}^{N} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)^p$$

La série $\sum |x_i + y_i|^p$ est à termes positifs, et on vient de montrer que ses sommes partielles sont majorées par $(\|x\|_p + \|y\|_p)^p$.
Par conséquent, c'est une série convergente, et sa somme est aussi majorée par la même quantité, ce qui montre à la fois que $x + y \in \ell^p$ et $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

Il est immédiat que $0 \in \ell^p$, et que $\lambda x \in \ell^p$ dès que $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \ell^p$; et qu'alors on a

$$\|\lambda x\|_p = |\lambda|\|x\|_p$$

Ceci montre que ℓ^p est un espace vectoriel, et tout ce qui nous reste à vérifier est que $\|\cdot\|_p$ satisfait l'axiome de séparation. Pour cela, il suffit d'observer que $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p = 0$ si, et seulement si, $x_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il nous reste à traiter le cas $p = +\infty$. Pour vérifier que ℓ^∞ est un espace vectoriel, notons qu'il contient 0 (la suite nulle) et que, si $x, y \in \ell^\infty$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $|x_n| \leq \|x\|_\infty$ et $|y_n| \leq \|y\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc :

$$|(\lambda x + y)_n| = |\lambda x_n + y_n| \leq |\lambda||x_n| + |y_n| \leq \lambda\|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

On en conclut, d'une part, que $\lambda x + y$ est une suite bornée, donc ℓ^∞ est un espace vectoriel ; d'autre part, en prenant $\lambda = 1$, l'inégalité ci-dessus montre que $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ majore toutes les valeurs de $x + y$, et par définition d'une borne supérieure cela entraîne que

$$\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

On vient de démontrer l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_\infty$; l'homogénéité et la propriété de séparation ne devraient pas poser de problème et sont laissées en exercice. $\square$

Exemple 2.43

Notons en passant (on aura l'occasion de revenir sur ce type de question) que ℓ^1 est contenu dans ℓ^∞, et qu'on peut donc munir ℓ^1 de la norme induite par $\|\cdot\|_\infty$.
Soit $x \in \ell^1$. On a pour tout n

$$|x_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| = \|x\|_1$$

et donc aussi

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} \leq \|x\|_1$$

Pour $i \in \mathbb{N}$, définissons une suite x^i en posant

$$x^i(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On voit que $\|x^i\|_\infty = 1$ tandis que $\|x^i\|_1 = i + 1$.
Par conséquent, il ne peut pas exister de constante M telle que $\|y\|_1 \leq M\|y\|_\infty$ pour tout $y \in \ell^1$: sinon, en appliquant cette inégalité à $y = x^i$, on obtiendrait $M \geq i + 1$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.
On vient de montrer que, sur ℓ^1, les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Nous rencontrerons d'autres exemples d'espaces vectoriels normés de dimension infinie dans ce cours, en particulier des espaces de fonctions.

Exemple 2.44

Soit $C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel formé par toutes les fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Puisque toute fonction continue définie sur $[0,1]$ est bornée (fait qu'on redémontrera plus loin, dans un cadre plus général) on peut poser

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \colon x \in [0,1]\}$$

pour tout $f \in C([0,1],\mathbb{R})$.
Montrons que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme. Déjà, notons que pour tout $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty = 0 &\Leftrightarrow \sup\{|f(x)| \colon x \in [0,1]\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in [0,1]\ f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow f = 0 \end{aligned}$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in C([0,1],\mathbb{R})$, on vérifie immédiatement que $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\,\|f\|_\infty$.
Reste à vérifer l'inégalité triangulaire : soit $f, g \in C([0,1],\mathbb{R})$.
Pour $x \in [0,1]$, on a

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + [g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Il s'ensuit que

$$\|f+g\|_\infty = \sup\left(\{|f(x)+g(x)| \colon x \in [0,1]\}\right) \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Les espaces $(\ell^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p$ et $(C(|0,1),\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ fournissent des exemples importants d'espaces vectoriels normés de dimension infinie.
Il peut être intéressant d'avoir en tête un exemple de nature plus algébrique.

Exemple 2.45

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré au plus n, on note $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, et on pose

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|\ ; \quad \|P\|_\infty = \sup\{|a_k| \colon 0 \leq k \leq n\}$$

Montrons que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$:

- On a bien $\|0\|_1 = 0$. Réciproquement, si P est de degré au plus n avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors

$$\begin{aligned} \|P\|_1 = 0 &\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} |a_i| = 0 \\ &\Rightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\}\ a_i = 0 \\ &\Rightarrow P = 0 \end{aligned}$$

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\|\lambda P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |\lambda a_k| = |\lambda| \sum_{k=0}^{n} |a_k| = |\lambda| \cdot \|P\|_1$$

- Enfin, soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$; en notant $n = \max(\deg(P), \deg(Q))$ on peut écrire $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$. On a alors $P + Q = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) X^k$, et

$$\begin{array}{rcl} \|P+Q\|_1 & = & \sum_{k=0}^{n} |a_k + b_k| \\ & \leq & \sum_{k=0}^{n} |a_k| + \sum_{k=0}^{n} |b_k| \\ & \leq & \|P\|_1 + \|Q\|_1 \end{array}$$

On montre de même que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme.
Ces deux normes sont-elles équivalentes ?
Il est immédiat que $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_1$. Par contre, si on considère pour tout n le polynôme

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$$

alors $\|P_n\|_\infty = 1$ mais $\|P_n\|_1 = n + 1$, ce qui montre qu'il ne peut pas exister de constante M telle que $\|P\|_1 \leq M \|P\|_\infty$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$: en appliquant cette inégalité avec $P = P_n$, on obtiendrait $M \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.4 Ouverts et fermés dans un espace métrique

Si on est intéressé plus par la notion de "proximité" induite par une distance que par les valeurs exactes de la distance, on est amené au concept d'ouvert : une partie $A \subseteq X$ est ouverte quand, dès que $a \in A$, tout point suffisamment proche de a appartient à A. Autrement dit, A contient une petite boule autour de chacun de ses points.

Définition 2.46
Soit (X, d) un espace métrique. Une partie A de X est un *ouvert* si pour tout $a \in A$ il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq A$.

Il suit de la définition que l'ensemble X tout entier est un ouvert. De même, l'ensemble vide $\emptyset$ est ouvert ; pour nous en convaincre, imaginons que ce ne soit pas le cas. Alors il existerait $a \in \emptyset$ et $r > 0$ tel que $B(a, r) \not\subseteq A$; puisqu'il n'existe pas de $a \in \emptyset$, ce n'est pas le cas, et l'ensemble vide est donc bien ouvert.

Exemple 2.47

Un intervalle ouvert $]a, b[$, où $a < b$ sont deux réels, est ouvert dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Pour le voir, fixons $x \in]a, b[$. Alors $x - a > 0$ et $b - x > 0$; posons

$$r = \min(x - a, b - x)$$

Soit y tel que $|y - x| < r$. Alors $x - y$ et $y - x$ sont tous deux $> -r$, et on a donc :

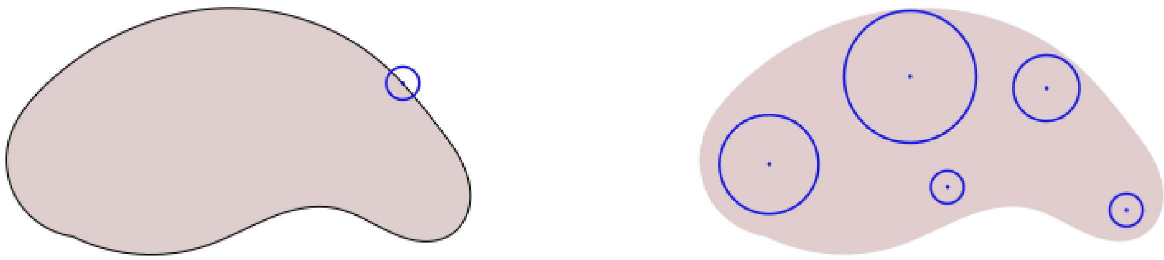
$$y - a = (y - x) + (x - a) > (x - a) - r > 0$$

De même,

$$b - y = (b - x) + (x - y) > (b - x) - r > 0$$

Donc $y \in]a, b[$: on vient de montrer que $B(x, r) \subseteq]a, b[$.
Par contre, un intervalle de la forme $[a, b[$ n'est pas ouvert dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$: en effet, pour tout $r > 0$ la boule $B(a, r)$, qui dans ce cas est égale à l'intervalle ouvert $]a - r, a + r[$, n'est pas contenue dans $]a, b[$.

Le dessin ci-dessous cherche à illustrer la définition. On y représente deux fois la même figure ; dans le dessin de gauche, le "bord" de la figure est inclus, et la partie n'est pas ouverte : si on regarde un point x sur le bord, aucune boule $B(x, r)$ n'est contenue dans la partie. Sur le dessin de droite, on a enlevé le bord de la figure et on ne garde que la partie qui est délimitée par le contour (on parlera bientôt de son "intérieur"). Alors la partie obtenue est ouverte : autour de chaque point, on peut trouver une boule ouverte centrée en ce point et contenue dans la partie. Notez bien que la boule en question dépend du point où l'on se place !



Théorème 2.48

Soit (X, d) un espace métrique, $r \geq 0$ et $x_0 \in X$.
Alors la boule ouverte $B(x_0, r)$ est un ouvert de (X, d).

Démonstration. Si $r = 0$ alors $B(x_0, r) = \emptyset$, qui est ouvert. On peut donc supposer $r > 0$ (dans la suite on ne considérera plus de boules ouvertes de rayon 0, c'était simplement un moyen de rappeler que $\emptyset$ est un ouvert...).
Soit $a \in B(x_0, r)$; on doit trouver $\rho > 0$ tel que $B(a, \rho) \subset B(x_0, r)$. On va vérifier, à l'aide de l'inégalité triangulaire, que $\rho = r - d$ convient.
Soit $z \in B(a, \rho)$. On a

$$d(x_0, z) \leq d(x_0, a) + d(a, z) = d + d(a, z) < d + \rho = r$$

Par conséquent, $B(a,\rho)$ est bien contenu dans $B(x_0,r)$. $\square$

En général, une boule fermée n'est pas ouverte (mais ça peut arriver !).
La notion d'ouvert dépend de la distance sur X ; par contre pour deux distances Lipschitz-équivalentes les ouverts sont les mêmes.

Théorème 2.49
Soit X un ensemble, et d_1, d_2 deux distances sur X. On suppose que d_1 et d_2 sont Lipschitz-équivalentes.
Alors on a l'équivalence suivante, valable pour toute partie A de X :

$$(A \text{ est ouvert dans } (X,d_1)) \Leftrightarrow (A \text{ est ouvert dans } (X,d_2))$$

Démonstration. Par hypothèse, on a $m, M > 0$ tels que $md_1 \leq d_2 \leq Md_1$.
Supposons que A soit ouvert dans (X,d_1), et fixons $a \in A$. Alors il existe $r > 0$ tel qu'on ait, pour tout $x \in X$

$$d_1(x,a) < r \Rightarrow x \in A$$

Soit $\varepsilon = mr$. Pour tout $x \in X$, on a

$$\begin{aligned} d_2(x,a) < \varepsilon \quad &\Rightarrow \quad md_1(x,a) < \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad d_1(x,a) < \frac{\varepsilon}{m} = r \\ &\Rightarrow \quad x \in A \end{aligned}$$

Donc la boule $B_{d_2}(a,\varepsilon)$ est contenue dans A, ce qui montre que A est ouvert dans (X,d_2).
La démonstration de la réciproque est identique (ou il suffit de remarquer que d_1 et d_2 jouent des rôles symétriques dans l'énoncé).

$\square$

Exemple 2.50
Soit X un ensemble, et d la distance discrète sur X. Alors toute partie de X est un ouvert : si A est une partie quelconque de X, et $a \in A$, alors on a

$$\{a\} = B(a,1) \subseteq A$$

Lemme 2.51
Soit (X,d) un espace métrique, $A \subseteq X$ et $x \in X$. Alors il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x si, et seulement si, $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ pour tout $r > 0$.

Démonstration. Supposons qu'il existe $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x, et fixons $r > 0$.
Alors il existe N tel que $d(a_n, x) < r$ pour tout $n \geq N$, en particulier $a_N \in B(x, r) \cap A$, qui est donc non vide.

Réciproquement, supposons que $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ pour tout $r > 0$. Alors pour tout n on peut trouver $a_n \in A \cap B(x, 2^{-n})$. Autrement dit, $a_n \in A$ et $d(a_n, x) < 2^{-n}$ tend vers 0 : la suite (a_n) est une suite d'éléments de A qui converge vers x. □

Le théorème suivant donne une caractérisation importante des ouverts.

☆ Théorème 2.52

Soit A une partie d'un espace métrique (X, d). Alors, A est un ouvert si, et seulement si, A a la propriété suivante :
Pour toute suite (x_n) d'éléments de X qui converge vers un élément de A, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que x_n appartient à A pour tout $n \geq N$.

Démonstration. Supposons qu'il existe une suite (x_n) qui converge vers x et soit telle pour tout $N \in \mathbb{N}$ on puisse trouver $n \geq N$ avec $x_n \notin A$.
Alors on peut construire par récurrence $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_{\varphi(n)} \notin A$ pour tout n.
Puisque $(x_{\varphi(n)})$ converge vers x, le lemme 2.51 montre qu'il ne peut exister $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq A$. Par conséquent A n'est pas ouvert.

Réciproquement, si A n'est pas ouvert, il existe $x \in A$ tel que $B(x, r) \not\subseteq A$ pour tout $r > 0$, et le lemme 2.51 nous garantit l'existence d'une suite (x_n) qui converge vers x et telle que $x_n \in X \setminus A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

□

Définition 2.53

Une partie A d'un espace métrique est un *fermé* si son complémentaire $X \setminus A$ est ouvert.

L'ensemble X tout entier et l'ensemble vide sont des fermés.

☆ Théorème 2.54

Soit (X, d) un espace métrique, $r \geq 0$ et $x_0 \in X$. Alors la boule fermée $B_f(x_0, r)$ est un fermé de (X, d).

Démonstration. Soit $a \in U = X \setminus B_f(x_0, r)$, alors on a $d(a, x_0) = d > r$. On cherche à montrer que U est ouvert, donc à trouver une boule ouverte contenant a et contenue dans U.
En posant $\rho = d - r$, qui est strictement positif, on voit que pour tout $z \in B(a, \rho)$

$$d(z, x_0) \geq d(a, x_0) - d(a, z) > d - (d - r) = r$$

Donc $B(a, \rho) \subset U$, ce qui prouve que U est ouvert. □

Attention!
Il peut tout à fait exister des parties qui sont à la fois ouvertes et fermées ! C'est par exemple toujours le cas de X et $\emptyset$. On verra d'autres exemples plus loin, et ce sera important dans le chapitre sur la notion de connexité.
Par ailleurs, ce n'est pas parce qu'une partie n'est pas ouverte qu'on peut en conclure qu'elle est fermée. Il existe des parties qui ne sont ni ouvertes ni fermées, par exemple $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle.

Notons que toute propriété des ouverts se traduit, par passage au complémentaire, en une propriété des fermés.

Théorème 2.55
Soit A une partie d'un espace métrique (X, d). Alors, A est un fermé si, et seulement si : pour toute suite convergente (a_n) d'éléments de A, la limite de (a_n) appartient à A.

Démonstration. Supposons A fermé.
Soit (a_n) une suite d'éléments de A qui converge vers un élément x. Comme aucun a_n n'est dans l'ouvert $X \setminus A$, (encore moins pour tout n suffisamment grand), d'après le théorème 2.52 x ne peut appartenir à l'ouvert $X \setminus A$ et donc appartient à A.

Réciproquement, si A n'est pas fermé, c'est-à-dire si $X \setminus A$ n'est pas ouvert, alors le théorème 2.52 garantit l'existence d'une suite (x_n) d'éléments n'appartenant pas à $X \setminus A$, c'est-à-dire appartenant à A, qui converge vers un élément de $X \setminus A$. □

On voit en particulier que, pour tout $x \in X$, le singleton $\{x\}$ est un fermé (on aurait aussi pu déduire ce fait de l'égalité $\{x\} = B_f(x, 0)$ et du fait qu'une boule fermée est toujours un fermé).

Théorème 2.56
Soit (X, d) un espace métrique. On munit l'espace produit $X \times X$ de la distance produit d_∞. Alors la *diagonale*
$$\Delta_X = \{(x, x) \colon x \in X\}$$
est un fermé de $X \times X$.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Δ_X qui converge dans $(X \times X, d_\infty)$ vers $u = (x, x')$. Alors pour tout n, il existe $x_n \in X$ tel que $u_n = (x_n, x_n)$ et on a à la fois
$$x = \lim_{n\to+\infty} x_n \quad \text{et} \quad x' = \lim_{n\to+\infty} x_n$$
Donc $x = x'$, et $u \in \Delta_X$. Ceci prouve que Δ_X satisfait la caractérisation des fermés énoncée au théorème 2.55. □

On aurait aussi pu montrer, à l'aide de la distance d_∞, que le complémentaire de Δ_X dans $X \times X$ est ouvert : si $x \neq y$, alors $d(x, y) = r > 0$, et $B\left(x, \frac{r}{2}\right) \times B\left(y, \frac{r}{2}\right)$ est un ouvert de $(X \times X, d_\infty)$ qui contient (x, y) et ne rencontre pas Δ_X.

Théorème 2.57

Soit (X, d) un espace métrique. Les propriétés suivantes sont vérifiées.

1. Si $(O_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts, alors $\bigcup_{i\in I} O_i$ est également un ouvert (une **union quelconque** d'ouverts est un ouvert).
2. Si $O_1, \ldots, O_n$ sont des ouverts, alors $O_1 \cap \ldots \cap O_n$ est également un ouvert (une **intersection finie** d'ouverts est un ouvert).
3. Si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés, alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est également un fermé (une **intersection quelconque** de fermés est un fermé).
4. Si $F_1, \ldots, F_n$ sont des fermés, alors $F_1 \cup \ldots \cup F_n$ est également un fermé (une **union finie** de fermés est un fermé).

Démonstration. (1) Soit $a \in \bigcup_{i\in I} O_i$, alors il existe $i_0 \in I$ tel que $a \in O_{i_0}$. Comme O_{i_0} est ouvert, il existe $r > 0$, tel que

$$B(a, r) \subseteq O_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i \ ,$$

ce qui permet de conclure.
(2) Soit $a \in O_1 \cap \ldots \cap O_n$, alors pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $a \in O_i$ qui est un ouvert. Ainsi, pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $r_i > 0$ tel que $B(a, r_i) \subseteq O_i$.
En posant $r = \min(r_1, \ldots, r_n) > 0$, on en déduit que la boule ouverte $B(a, r)$ est incluse dans chacun des O_i et donc que

$$B(a, r) \subseteq O_1 \cap \ldots \cap O_n$$

On vient de trouver une boule ouverte, de rayon > 0, contenant a et contenue dans $O_1 \cap \ldots \cap O_n$.
(3) On a $X \setminus \bigcap_{i\in I} F_i = \bigcup_{i\in I}(X \setminus F_i)$, qui est ouvert par (1). Ainsi, $\bigcap_{i\in I} F_i$ est fermé.
(4) On a $X \setminus (F_1 \cup \ldots \cup F_n) = (X \setminus F_1) \cap \ldots \cap (X \setminus F_n)$, qui est ouvert par (2), et donc $F_1 \cup \ldots \cup F_n$ est fermé.

□

Par conséquent, dans un espace métrique tout ensemble fini est fermé, en tant que réunion finie de fermés ; et le complémentaire d'un ensemble fini est toujours un ouvert.

Exemple 2.58

Soit $a < b$ deux réels. Alors $[a, b]$ est fermé dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
En effet, considérons une suite (x_n) d'éléments de $[a, b]$ et supposons que x_n converge vers $x \in \mathbb{R}$. Alors on a $a \leq x_n \leq b$ pour tout n, donc aussi $a \leq x \leq b$.
Pour celles et ceux qui s'inquiéteraient du caractère tautologique de l'argument ci-dessus (n'aurait-on pas utilisé le fait que $[a, b]$ est fermé pour conclure que $[a, b]$ est fermé ? Tout dépend en fait de ce qu'on connaît sur $\mathbb{R}$...) notons qu'on peut aussi dire que le complémentaire de $[a, b]$ est $]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$, qui est une union de deux ouverts (la preuve est la même que dans l'exemple où on a montré qu'un intervalle ouvert borné est ouvert), et est donc un ouvert. Par conséquent $[a, b]$ est bien fermé.

Exemple 2.59

Par contre, une intersection d'une famille infinie d'ouverts, même dénombrable, n'est pas nécessairement un ouvert (et c'est une bonne raison pour introduire les boréliens dans le cours de théorie de la mesure...) Par exemple, notons que pour tout $q \in \mathbb{Q}$ l'ensemble

$$\mathbb{R} \setminus \{q\} = \{x \in \mathbb{R} \colon x \neq q\}$$

est un ouvert (c'est le complémentaire d'un singleton). Mais

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} (\mathbb{R} \setminus \{q\})$$

n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$, puisqu'il n'existe pas d'intervalle ouvert non vide contenu dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Cet exemple donne une famille dénombrable d'ouverts dont l'intersection n'est pas un ouvert ; en passant au complémentaire, on obtient une famille dénombrable de fermés dont la réunion n'est pas un fermé. Explicitement, $\{q\}$ est fermé pour tout $q \in \mathbb{Q}$, mais

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$$

n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$.
Un autre exemple : pour tout $n > 0$, l'ensemble

$$A_n = \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$$

est ouvert. Mais $\bigcap\limits_{n \geq 1} A_n = \{0\}$ n'est pas ouvert.
Dans le même ordre d'idée : pour tout $n \geq 1$, $\left[0, 1 - \dfrac{1}{n}\right]$ est fermé mais

$$\bigcup_{n \geq 1} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] = [0, 1[$$

n'est pas fermé.

Définition 2.60

Étant donné un espace métrique (X, d), et une partie $A \subseteq X$, l'*intérieur* de A, dénoté $\mathring{A}$, est la réunion de tous les ouverts contenus dans A, c'est-à-dire

$$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{O \text{ ouvert} \\ O \subseteq A}} O$$

Par définition, $\mathring{A}$ est un ouvert, est contenu dans A, et il contient tous les autres ouverts contenus dans A : c'est le plus grand ouvert contenu dans A.

Attention!

L'intérieur de A peut tout à fait être vide même si A ne l'est pas ! Par exemple, dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, il n'existe aucun ouvert contenu dans $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q}$ est d'intérieur vide. Et il en va de même de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Donc $\mathbb{R}$ est la réunion de deux sous-ensembles qui sont chacun d'intérieur vide.

Théorème 2.61

Soit (X, d) un espace métrique, $A \subseteq X$ et $x \in A$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $x \in \mathring{A}$.
2. Pour toute suite (x_n) d'éléments de X qui converge vers x, il existe N tel que $x_n \in A$ pour tout $n \geq N$.
3. $\exists r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq A$.

Démonstration. Soit $x \in \mathring{A}$. Alors il existe un ouvert U tel que $x \in U$ et $U \subseteq A$.
Si (x_n) est une suite d'éléments de X qui converge vers x, il existe N tel que $x_n \in U$ pour tout $n \geq N$ puisque U est ouvert. Par conséquent, $x_n \in A$ pour tout $n \geq N$.
Ceci établit l'implication (1)$\Rightarrow$ (2).

Si (3) est fausse, le lemme 2.51 appliqué à $X \setminus A$ nous fournit une suite (x_n) d'éléments de $X \setminus A$ qui converge vers x, donc (2) est fausse aussi. On vient de démontrer que (2)$\Rightarrow$ (3).

Enfin, si x satisfait (3), soit r tel que $B(x, r) \subseteq A$: $B(x, r)$ est un ouvert contenant x et contenu dans A, donc $x \in \mathring{A}$.

$\square$

Exemple 2.62

Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, l'intérieur de $]0, 1]$ est égal à $]0, 1[$.
En effet, $]0, 1[$ est ouvert, contenu dans $]0, 1[$. Et $B(1, r) =]1 - r, 1 + r[$ n'est contenu dans $]0, 1]$ pour aucun $r > 0$, donc 1 n'appartient pas à l'intérieur de $]0, 1]$.

Définition 2.63

Soit (X, d) un espace métrique, et A une partie de X. L'*adhérence* de A, notée $\overline{A}$, est l'intersection de tous les fermés contenant A, c'est-à-dire

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ F \supseteq A}} F.$$

Cette fois, $\overline{A}$ est un fermé, contient A, et est contenu dans tous les autres fermés qui contiennent A : c'est le plus petit de tous les fermés contenant A.

Remarque 2.64
Il suit de la définition que A est fermé si, et seulement si, $A = \overline{A}$. De même, A est ouvert si, et seulement si, $A = \mathring{A}$.

Attention!
Il faut faire attention à la terminologie : si (X, d) est un espace métrique quelconque, $a \in A$ et $r > 0$, alors il n'est pas nécessairement vrai que l'adhérence de la boule ouverte $B(a, r)$ soit égale à la boule fermée $B_f(a, r)$.
Autrement dit, on n'a pas en général $\overline{B(a, r)} = B_f(a, r)$.
Donnons un exemple de ce phénomène : munissons $\mathbb{N}$ de la distance discrète, et considérons la boule ouverte $B(0, 1)$. Cette boule est réduite à $\{0\}$, donc $\overline{B(0, 1)} = \{0\}$. Mais, par définition de la distance discrète, on a $B_f(0, 1) = \mathbb{N}$.
Il peut aussi arriver que la boule ouverte et la boule fermée soient égales ; ainsi, dans $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$, on a

$$B(0, \sqrt{2}) = B_f(0, \sqrt{2}) =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q}$$

En passant au complémentaire, les ouverts deviennent des fermés, et vice-versa ; les notions d'intérieur et d'adhérence sont donc intimement liées, comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 2.65
Soit (X, d) un espace métrique, et $A \subseteq X$. Montrer que $\overline{X \setminus A} = X \setminus \mathring{A}$ et $\overbrace{X \setminus A}^{\circ} = X \setminus \overline{A}$.

Théorème 2.66
Soit (X, d) un espace métrique, A une partie de X et $x \in X$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $x \in \overline{A}$.
2. Pour tout ouvert U tel que $x \in U$, on a $U \cap A \neq \emptyset$.
3. Il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.

On pourrait déduire ce résultat du théorème 2.61 en raisonnant par passage au complémentaire, mais on va plutôt faire la preuve directement, quitte à répéter des arguments déjà vus.

Démonstration. Si (2) est fausse, il existe un ouvert U contenant x et tel que $A \subseteq X \setminus U$.
Comme $X \setminus U$ est fermé et contient A, on déduit $\overline{A} \subseteq X \setminus U$, donc $x \notin \overline{A}$. Cela montre (1) $\Rightarrow$ (2).
Si (2) est vérifiée, alors pour tout $r > 0$ on doit avoir $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$, et le lemme 2.51 nous fournit une suite d'éléments de A qui converge vers x. Par conséquent, (2) $\Rightarrow$ (3).
Supposons qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers $x \in X$.
Alors, pour tout fermé F contenant A, il existe aussi une suite (la même !) d'éléments de F qui converge vers x ; par conséquent, x appartient à F.
Donc x appartient à tous les fermés qui contiennent A : $x \in \overline{A}$.
Cela établit l'implication (3) $\Rightarrow$ (1). $\square$

Exemple 2.67

Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, l'adhérence de $]0,1]$ est égale à $[0,1]$.
En effet, $[0,1]$ est un fermé, qui contient $]0,1]$, donc $\overline{]0,1]}$ est contenu dans $[0,1]$. De plus, la suite $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $]0,1]$ qui converge vers 0, donc $0 \in \overline{]0,1]}$.

Exemple 2.68

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé (on considère E muni de la distance induite par sa norme). Soit $a \in E$ et $r > 0$.

1. L'intérieur de la boule fermée $B_f(a,r)$ est la boule ouverte $B(a,r)$. Pour le voir, notons déjà que $B(a,r)$ est ouvert, et contenu dans $B_f(a,r)$. Par conséquent,

$$B(a,r) \subseteq \overbrace{B_f(a,r)}^{\circ}$$

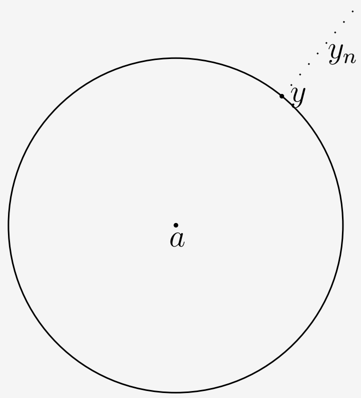
   Pour établir l'inclusion réciproque, fixons $y \in B_f(a,r) \setminus B(a,r)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons

$$y_n = y + 2^{-n}(y-a)$$

   Alors (y_n) converge vers y quand n tend vers $+\infty$. Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\|y_n - a\| = (1+2^{-n})\|y-a\| = (1+2^{-n})r > r$$

   Donc $y_n \notin B_f(x,r)$. Puisque (y_n) converge vers y, on en conclut que y n'appartient pas à l'intérieur de $B_f(a,r)$.

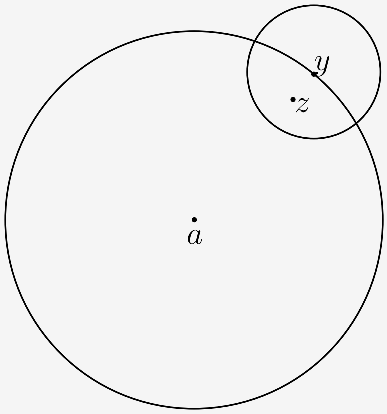


   On a établi successivement que $B(a,r) \subseteq \overbrace{Bf(a,r)}^{\circ}$ et $(B_f(a,r)\setminus B(a,r)) \cap \overbrace{Bf(a,r)}^{\circ} = \emptyset$, et donc $B(a,r) = \overbrace{Bf(a,r)}^{\circ}$.

2. De même, l'adhérence de la boule ouverte $B(a,r)$ est la boule fermée $B_f(a,r)$. On pourrait raisonner comme ci-dessus, mais on va formaliser le raisonnement un peu différemment. Comme $B_f(a,r)$ est un fermé qui contient $B(a,r)$, on a l'inclusion

$$\overline{B(a,r)} \subseteq B_f(a,r)$$

Réciproquement, soit $y \in B_f(a,r)$. On doit montrer que $y \in \overline{B(a,r)}$; c'est immédiat si $y \in B(a,r)$, donc on peut supposer $\|y-a\| = r$.
Soit $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 2r$) ; posons
$$z = y - \frac{\varepsilon}{2r}(y-a)$$



Alors $\|z-y\| = \frac{\varepsilon}{2}$, et
$$\|z-a\| = (1-\frac{\varepsilon}{2r})r < r$$
Donc $z \in B(y,\varepsilon) \cap B(a,r)$.
Comme ε était quelconque, on vient de montrer que tout ouvert contenant y doit intersecter $B(a,r)$. Par conséquent $y \in \overline{B(a,r)}$.

Théorème 2.69

Soit (X,d) un espace métrique, (x_n) une suite d'éléments de X et A l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n). Alors A est fermé dans (X,d).

Démonstration. On va montrer que $A = \overline{A}$. Pour cela, fixons $y \in \overline{A}$, et considérons un ouvert U contenant y.
Puisque $y \in \overline{A}$, il existe $a \in A \cap U$.
Comme a est une valeur d'adhérence de (x_n) et U est un ouvert contenant a, il existe n tel que $x_n \in U$ (i).
On vient de montrer que pour tout ouvert U contenant y, il existe n tel que $x_n \in U$; autrement dit, y est une valeur d'adhérence de (x_n).
Donc $\overline{A} = A$: A est fermé. □

Définition 2.70

Soit (X,d) un espace métrique, et $A \subseteq X$. On dit que A est *dense* dans X si $\overline{A} = X$.

(i). Revoir si nécessaire le théorème 2.25.

Pour montrer que A est dense dans X, on doit donc établir un des énoncés (équivalents !) suivants :

- Tout élément de X est limite d'une suite d'éléments de A.
- Pour tout ouvert non vide O de X, l'ensemble $A \cap O$ est non vide (autrement dit, on peut trouver un élément de A dans n'importe quel ouvert non vide de X).

On a déjà vu l'énoncé suivant dans les rappels au début du cours, mais il mérite d'être répété ici.

Théorème 2.71
L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dense dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Exercice 2.72
Soit (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques, A une partie dense dans (X, d_X) et B une partie dense dans $(Y_, d_Y)$. Montrer que $A \times B$ est dense dans $(X \times Y, d_\infty)$.

Exercice 2.73
Soit (X, d) un espace métrique, (x_n) une suite d'éléments de (X, d) et $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Montrer que

$$\overline{A} = A \cup \{y \in X : y \text{ est une valeur d'adhérence de } (x_n)\}$$

(On pourra utiliser le résultat de l'exercice 2.23)

2.5 Topologie associée à une distance ; base d'ouverts

Définition 2.74
Soit (X, d) un espace métrique. La *topologie* sur X définie par d est l'ensemble formé par tous les ouverts de (X, d).

Attention : une topologie est un *ensemble de parties* de X, pas un sous-ensemble de X. Par exemple, si d est la distance discrète sur X, alors la topologie associée à d est l'ensemble de toutes les parties de X (on a déjà vu que tout sous-ensemble de X est un ouvert pour la distance discrète).

Définition 2.75
Soit (X, d) un espace métrique, et $\mathcal{B}$ un ensemble de parties de X. On dit que $\mathcal{B}$ est une *base* de la topologie de (X, d) si tout élément de $\mathcal{B}$ est ouvert, et tout ouvert non vide de X est une réunion de parties appartenant à $\mathcal{B}$.

Dans la définition ci-dessus, on a spécifié que l'ouvert est non vide simplement pour éviter de se demander comment écrire l'ensemble vide comme une réunion...
Par exemple, l'ensemble formé par les boules ouvertes associées à d est une base de la topologie associée à d : par définition d'un ouvert, tout ouvert est une réunion de boules ouvertes.
Connaître une base de la topologie associée à une distance peut être utile, par exemple, pour vérifier la continuité de certaines applications.

Définition 2.76

Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On appelle *topologie produit* la topologie sur $X \times Y$ associée à la distance produit d_∞.

Théorème 2.77

Les parties de la forme $U \times V$, où U et V sont des ouverts de (X, d_X) et (Y, d_Y) respectivement, forment une base d'ouverts pour la topologie produit sur $X \times Y$.

Démonstration. Soit U, V deux ouverts de X, Y, et $(u, v) \in U \times V$.
Comme U et V sont ouverts, il existe $r_u, r_v > 0$ tels que $B_{d_X}(u, r_u) \subseteq U$ et $B_{d_Y}(v, r_v) \subseteq V$.
Soit $r = \min(r_u, r_v)$. Alors, pour tout $(x, y) \in X \times Y$ on a

$$\begin{aligned} d_\infty((x,y),(u,v)) < r \quad &\Leftrightarrow \quad d(x,u) < r \text{ et } d(y,v) < r \\ &\Rightarrow \quad d(x,u) < r_u \text{ et } d(y,v) < r_v \\ &\Rightarrow \quad x \in U \text{ et } y \in V \\ &\Rightarrow \quad (x,y) \in U \times V \end{aligned}$$

Ceci montre que $U \times V$ est un ouvert.
Pour vérifier la seconde partie de la définition d'une base d'ouverts, il suffit de noter que les boules ouvertes pour d_∞ forment une base de la topologie produit de $X \times Y$.
Or, on a pour tout $(x, y) \in X \times Y$ et tout $r > 0$ que

$$B_{d_\infty}((x,y), r) = B_{d_X}(x, r) \times B_{d_Y}(y, r)$$

Comme un ouvert de $(X \times Y, d_\infty)$ est une réunion de telles boules, et que ces boules sont de la forme $U \times V$ avec U, V ouverts dans X, Y respectivement, on obtient le résultat attendu. $\square$

Attention!

Un ouvert de $(X \times Y, d_\infty)$ est une *réunion* de parties de la forme $U \times V$, où U et V sont ouverts ; mais ce n'est pas nécessairement un produit de deux ouverts !

Définition 2.78

Un espace métrique (X, d) est *séparable* si sa topologie admet une base (au plus) dénombrable d'ouverts.

Théorème 2.79

Soit (X,d) un espace métrique. Alors (X,d) est séparable si, et seulement si, il existe une suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans X.

Il suit en particulier de ce résultat que tout espace métrique au plus dénombrable est séparable ; mais les exemples où cette notion est utile sont des espaces métriques non dénombrables, comme $\mathbb{R}$.

Démonstration. Supposons que $\mathcal{B}$ soit une base dénombrable de la topologie de (X,d). On peut supposer que tous les éléments de $\mathcal{B}$ sont non vides, et écrire $\mathcal{B} = \{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (éventuellement, avec des répétitions).
Pour tout n, on choisit $x_n \in O_n$. Vérifions que la suite (x_n) est d'image dense.
Pour cela, choisissons O un ouvert non vide de (X,d) ; par définition d'une base d'ouverts, O est une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$, donc il existe n tel que $O_n \subseteq O$, et puisque $x_n \in O_n$ on a $x_n \in O$.
On vient de montrer que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cap O \neq \emptyset$ pour tout ouvert non vide O, autrement dit $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans (X,d).

Réciproquement, soit (x_n) soit une suite d'éléments de X dont l'image est dense dans X.
Soit $\mathcal{B}$ la famille formée par toutes les boules de la forme $B(x_n,q)$, où $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{Q}_+^*$. C'est une famille dénombrable puisque $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}_+^*$ est dénombrable.
Montrons que c'est une base d'ouverts. Soit O un ouvert non vide, $y \in O$ et $r > 0$ tel que $B(y,r) \subseteq O$.
On peut trouver un rationnel $q > 0$ tel que $2q < r$ (donc $B(y,2q) \subseteq O$) et n tel que $x_n \in B(y,q)$.
Alors, $y \in B(x_n,q)$ et l'inégalité triangulaire nous permet de vérifier que $B(x_n,q) \subseteq B(y,r)$. En effet, pour tout $z \in X$ on a :

$$\begin{aligned} z \in B(x_n,q) &\Leftrightarrow d(z,x_n) < q \\ &\Rightarrow d(z,y) \leq d(z,x_n) + d(x_n,y) < 2q \\ &\Rightarrow z \in B(y,2q) \\ &\Rightarrow z \in B(y,r) \end{aligned}$$

Pour tout $y \in O$, on peut donc choisir n_y, q_y tels que $y \in B(x_{n_y}, q_{n_y}) \subseteq O$, et on a

$$O = \bigcup_{y\in O} \{y\} \subseteq \bigcup_{y\in O} B(x_{n_y}, q_{n_y}) \subseteq O$$

Donc $O = \bigcup\limits_{y\in O} B(x_{n_y}, q_{n_y})$; on vient d'écrire O comme réunion d'une famille d'éléments de $\mathcal{B}$, ce qui prouve que $\mathcal{B}$ est bien une base d'ouverts de (X,d). $\square$

Remarque 2.80

Le raisonnement ci-dessus, allié au fait que $\mathbb{Q}^k$ est dense dans $\mathbb{R}^k$, montre que tout $k \geq 1$ chaque ouvert de $\mathbb{R}^k$ est une réunion (au plus dénombrable puisque $\mathbb{Q}^k$ est dénombrable) de boules $B(x,q)$, où $x \in \mathbb{Q}^k$ et $q \in \mathbb{Q}_+^*$.
En particulier, tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une réunion au plus dénombrable de boules ouvertes.

Exercice 2.81
Soit (X, d) un espace métrique, et $\mathcal{B}$ une famille d'ouverts de X.
Montrer que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts si, et seulement si, pour tout ouvert non vide O de X et tout $x \in O$ il existe $U \in \mathcal{B}$ tel que $x \in U$ et $U \subseteq O$.

Exercice 2.82
Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques séparables. Montrer que $(X \times Y, d_\infty)$ est un espace métrique séparable.
(Par conséquent, un produit fini d'espaces métriques séparables est encore séparable)

2.6 Distances équivalentes

On a déjà vu qu'on pouvait être amené à munir un même ensemble X de différentes distances. Parfois, ces distances induisent la même topologie ; parfois non, et ce n'est pas toujours une question facile à élucider.

Définition 2.83
Soit X un ensemble, et d_1, d_2 deux distances sur X. On dit que d_1 et d_2 sont équivalentes si, pour toute partie U de X, on a l'équivalence :

$$(U \text{ est ouvert dans } (X, d_1)) \Leftrightarrow (U \text{ est ouvert dans } (X, d_2))$$

Autrement dit, deux distances sont équivalentes si elles définissent la même topologie sur X.

Théorème 2.84
Soit X un ensemble, et d_1, d_2 deux distances Lipschitz-équivalentes sur X. Alors d_1 et d_2 sont équivalentes.

Démonstration. C'est une reformulation du théorème 2.49. □

Théorème 2.85
Soit X un ensemble, et d_1, d_2 deux distances sur X. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Les distances d_1 et d_2 sont équivalentes.
2. Pour tout $x \in X$, et tout $r > 0$, il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tels que

$$B_{d_1}(x, \varepsilon_1) \subseteq B_{d_2}(x, r) \text{ et } B_{d_2}(x, \varepsilon_2) \subseteq B_{d_1}(x, r)$$

3. Pour toute suite (x_n) d'éléments de X et tout $x \in X$, la suite (x_n) converge vers x dans (X, d_1) si et seulement si elle converge vers x dans (X, d_2).
4. Pour tout $F \subseteq X$, F est fermé dans (X, d_1) si et seulement si F est fermé dans (X, d_2).

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) : Soit $x \in X$ et $r > 0$. Alors $B_{d_2}(x, r)$ est ouvert dans (X, d_2) donc aussi, puisqu'on suppose que (1) est vérifiée, dans (X, d_1). Par conséquent il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que

$$B_{d_1}(x, \varepsilon_1) \subseteq B_{d_2}(x, r)$$

L'existence de ε_2 se montre en échangeant les rôles de d_1 et d_2 dans le raisonnement précédent.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Soit $x \in X$ et (x_n) une suite d'éléments de X qui converge vers x dans (X, d_1). Fixons $r > 0$, et trouvons $\varepsilon_1 > 0$ tel que $B_{d_1}(x, \varepsilon_1) \subseteq B_{d_2}(x, r)$.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d_1(x_n, x) \leq \varepsilon_1$ pour tout $n \geq N$, donc aussi $d_2(x_n, x) < r$ pour tout $n \geq N$. Par conséquent (x_n) converge vers x dans (X, d_2), et encore une fois la réciproque se déduit en échangeant les rôles de d_1 et d_2.

(3) $\Rightarrow$ (4) : Soit F un fermé de (X, d_1), et (x_n) une suite d'éléments de F qui converge vers x dans (X, d_2). Alors (x_n) converge aussi vers x dans (X, d_1) par (3), donc $x \in F$ puisque F est fermé dans (X, d_1).
On vient de montrer que F est fermé dans (X, d_2), et la réciproque se montre de la même façon.

(4) $\Rightarrow$ (1) : Soit U une partie de X. Alors U est ouvert dans (X, d_1) ssi $X \setminus U$ est fermé dans (X, d_1) ssi $X \setminus U$ est fermé dans (X, d_2) (par (4)) ssi U est ouvert dans (X, d_2).

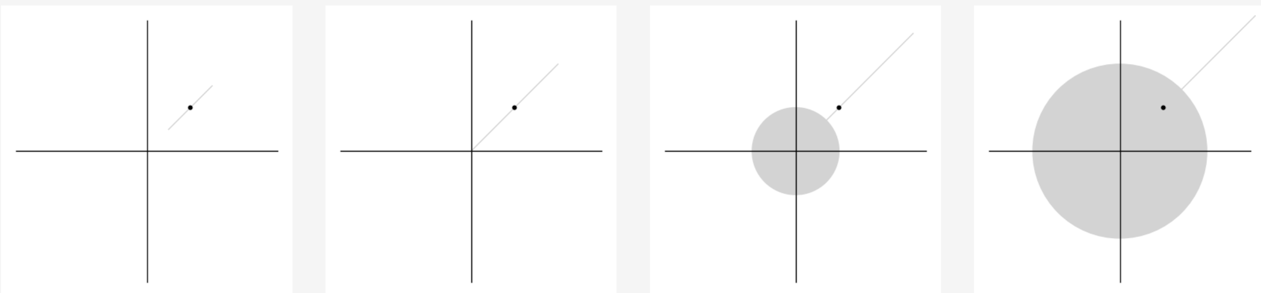
$\square$

Exemple 2.86

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$; pour $u, v \in \mathbb{R}^2$ on pose

$$d(u, v) = \begin{cases} \|u - v\|_2 & \text{si } u \text{ et } v \text{ sont colinéaires} \\ \|u\|_2 + \|v\|_2 & \text{sinon} \end{cases}$$

On va montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}^2$. Elle est fréquemment appelée *distance SNCF* : elle représente la distance pour aller d'un point à un autre par le train, avec des trains qui se dirigent tous vers Paris. Si les deux points sont sur la même ligne allant vers Paris, c'est rapide ; sinon, on change de train à Paris...



Des boules pour la distance SNCF, centrées en $(1, 1)$ et de rayons croissants.

Passons à la vérification du fait que d est une distance.

- Si $u = v$ alors $d(u, v) = 0$ (rappelons que 0 est colinéaire à tout vecteur !). Réciproquement, supposons que $d(u, v) = 0$. Si u, v sont colinéaires alors on a $\|u - v\|_2 = 0$ et donc $u = v$. Sinon, ils sont non nuls et $d(u, v) = \|u\|_2 + \|v\|_2 > 0$. Donc $d(u, v) = 0 \Rightarrow (u = v)$.

- On a bien $d(u,v) = d(v,u)$ pour tout $u, v \in \mathbb{R}^2$.
- Reste à vérifier l'inégalité triangulaire ; soit $u, v, w \in \mathbb{R}^2$. On est obligé de considérer plusieurs sous-cas :
  - Les vecteurs u, v, w sont deux à deux colinéaires. Alors $d(u,w) = \|u-v\|_2$ et de même pour $d(u,w)$, $d(v,w)$ et l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_2$ permet de conclure.
  - u et w sont colinéaires, v et w aussi, mais u et v ne le sont pas. Alors $w = 0$ et

    $$d(u,w) = \|u\|_2 \leq d(u,v) + d(v,w) = \|u-v\|_2 + \|v\|_2$$

  - u et v sont colinéaires, u et w aussi, mais v et w ne le sont pas. Alors $u = 0$ et

    $$d(u,w) = \|w\|_2 \leq d(u,v) + d(v,w) = \|v\|_2 + \|w-v\|_2$$

  - u et v ne sont pas colinéaires, u et w non plus, mais v et w le sont. Cette fois on a

    $$d(u,w) = \|u\|_2 + \|w\|_2 \leq d(u,v) + d(v,w) = \|u\|_2 + \|v\|_2 + \|v-w\|_2$$

  - u et v sont colinéaires, mais u, w ne sont pas colinéaires et v, w non plus. Alors

    $$d(u,w) = \|u\|_2 + \|w\|_2 \leq d(u,v) + d(v,w)) = \|u-v\|_2 + \|v\|_2 + \|w\|_2$$

  - Aucun de ces couples n'est colinéaire. Alors on a

    $$d(u,w) = \|u\|_2 + \|w\|_2 \leq d(u,v) + d(v,w) = \|u\|_2 + \|v\|_2 + \|v\|_2 + \|w\|_2$$

  La lectrice attentive aura peut-être remarqué qu'on n'a pas mentionné deux sous-cas, qui se ramènent aux précédents par symétrie de l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_2$.

Au terme de cette vérification fastidieuse mais pas difficile, on s'est convaincu que d est bien une distance ;
Notons que pour tout $u \in \mathbb{R}^2$ on a $d(u,0) = \|u\|_2$: les boules ouvertes centrées en 0 pour d et $\|\cdot\|_2$ sont les mêmes. Ce n'est pas le cas pour les boules centrées en d'autres points. Par exemple, la boule ouverte (pour d) centrée en $(2,0)$ et de rayon 1 est le segment $\{(x,0)\colon 1 \leq x \leq 3\}$.
La suite $(1 + \dfrac{1}{n}, 1)$ converge vers $(1,1)$ pour la distance euclidienne, mais pas pour d. On voit donc que d et $\|\cdot\|_2$ induisent des distances non équivalentes sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2.87

Soit (X,d) un espace métrique. Pour $x, y \in X$ on pose

$$\delta_1(x,y) = \min(d(x,y), 1) \quad \text{et} \quad \delta_2(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y))}$$

1. Montrer que δ_1 et δ_2 sont des distances sur X, équivalentes à d.
2. Montrer que δ_1 est Lipschitz-équivalente à d si, et seulement si, (X,d) est borné ; puis qu'il en va de même de δ_2.

3. Les distances δ_1 et δ_2 sont-elles toujours Lipschitz-équivalentes ?

2.7 Topologie induite

On a déjà noté que, si (X, d) est un espace métrique, et A est une partie de X, alors la restriction de d à $A \times A$ munit A d'une structure d'espace métrique. Notons d_A cette distance (quand il n'y a pas de risque de confusion, on la notera fréquemment d, comme la distance sur X).

Définition 2.88
Soit (X, d) un espace métrique, et $A \subseteq X$. La *topologie induite* sur A est la topologie sur A associée à la distance d_A.

Cette définition est particulièrement importante quand on manipule des espaces topologiques généraux, ce qu'on ne fera pas dans ce cours. Il est néanmoins utile de comprendre comment sont obtenus les ouverts de A muni de la topologie induite.

Théorème 2.89
Soit (X, d) un espace métrique, et A une partie de X. Pour toute partie U de A, U est ouvert dans (A, d_A) si, et seulement si, il existe un ouvert V de X tel que $U = A \cap V$.

Démonstration. Soit U un ouvert de A muni de la topologie induite. Comme les boules ouvertes forment une base de la topologie d'un espace métrique, on peut trouver un ensemble I, des éléments a_i de A et des réels $r_i > 0$ tels que

$$U = \bigcup_{i \in I} B_{d_A}(a_i, r_i)$$

Par définition de d_A, on a $B_{d_A}(a_i, r_i) = B_d(a_i, r_i) \cap A$. Posons $V = \bigcup_{i \in I} B_d(a_i, r_i)$. Alors V est ouvert dans (X, d) puisque c'est une réunion de boules ouvertes, et on a pour tout $a \in A$:

$$\begin{aligned} a \in U \quad & \Leftrightarrow \quad \exists i \in I \ a \in B_{d_A}(a_i, r_i) \\ & \Leftrightarrow \quad a \in A \text{ et } \exists i \in I \ a \in B_d(a_i, r_i) \\ & \Leftrightarrow \quad a \in A \cap V \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que V est ouvert dans X, et soit $U = A \cap V$. Si $U = \emptyset$ il n'y a rien à montrer ; sinon, soit $a \in U$, et $r > 0$ tel que $B_d(a, r) \subseteq V$. Alors

$$B_{d_A}(a, r) = B_d(a, r) \cap A \subseteq V \cap A = U$$

Donc U est bien ouvert dans (A, d_A).

$\square$

Exercice 2.90

Soit (X, d) un espace métrique et $A \subseteq X$. Soit F un sous-ensemble de A.
Montrer que F est fermé dans (A, d_A) si, et seulement si, il existe un fermé G de X tel que $F = G \cap A$.

Exemple 2.91

Soit $X = [0, 1[\cup]1, 2]$, muni de la distance induite par $|\cdot|$.
Alors $[0, 1[= X \cap] - 1, 1[$ est ouvert dans X, puisque c'est l'intersection de X et d'un ouvert de $\mathbb{R}$.
De même, $[0, 1[= [0, 1] \cap X$ est fermé dans X.
Par conséquent, $[0, 1[$ est à la fois ouvert et fermé dans X. Pourtant, il n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$...

2.8 Exemple : le cas de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

Attardons-nous un peu sur un cas fondamental : celui des ouverts de $\mathbb{R}$, muni de sa distance usuelle. On sait déjà que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Le raisonnement de la preuve du théorème 2.79 nous dit que les intervalles de la forme $]x - q, x + q[$, où $x \in \mathbb{Q}$ et $q \in \mathbb{Q}_+^*$, forment une base d'ouverts. Ces intervalles sont exactement les intervalles ouverts d'extrémités dans $\mathbb{Q}$. On en déduit le résultat suivant.

Théorème 2.92

L'espace métrique $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est séparable, et $\mathbb{Q}$ en est une partie dénombrable dense.
Une partie de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est ouverte si, et seulement si, elle peut s'écrire comme une réunion d'intervalles ouverts de la forme $]a, b[$, avec $a, b \in \mathbb{Q}$.
En particulier, tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion d'une famille au plus dénombrable d'intervalles ouverts.

Rappelons un énoncé bien connu.

Théorème 2.93

L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

En particulier, l'intersection de deux parties denses peut tout à fait être vide !

Démonstration. Fixons un ouvert non vide O de $\mathbb{R}$ et prenons $x \in O$.
Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ on a trouvé un irrationnel dans O ; sinon on peut considérer la suite $\left(x + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)$, qui est une suite d'irrationnels convergeant vers x.
Puisque O est ouvert, pour n suffisamment grand $x + \frac{\sqrt{2}}{n}$ est un irrationnel appartenant à O. $\square$

Exemple 2.94

Déterminons l'intérieur et l'adhérence de $\mathbb{Q}, [0,1] \cap \mathbb{Q},]0,1[\cap\mathbb{Q}$ (dans $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle).
On a déjà vu plusieurs fois que $\mathbb{Q}$ est d'intérieur vide (tout intervalle ouvert non vide contient des irrationnels) et est dense dans $\mathbb{R}$; donc $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$ et $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
Pour ce qui est de $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$, son intérieur est encore vide puisqu'il est contenu dans $\mathbb{Q}$. Puisque A est contenu dans le fermé $[0,1]$, on a

$$\overline{A} \subseteq [0,1]$$

Par ailleurs, tout élément de $[0,1]$ est la limite d'une suite de rationnels appartenant à $[0,1]$. Donc

$$\overline{A} \supseteq [0,1]$$

Finalement $\overline{[0,1] \cap \mathbb{Q}} = [0,1]$.

On montre de la même façon que $\overline{]0,1[\cap\mathbb{Q}} = [0,1]$ et $\overbrace{]0,1[\cap\mathbb{Q}}^{\circ} = \emptyset$.

Théorème 2.95

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Alors une et une seule des deux conditions suivantes est satisfaite :

(i) G est *monogène*, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$G = \mathbb{Z}\alpha = \{n\alpha \colon n \in \mathbb{Z}\}$$

(ii) G est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Notons déjà que ces deux conditions sont exclusives : en effet, supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $G = \{n\alpha \colon n \in \mathbb{Z}\}$.
Si $\alpha = 0$ alors $G = \{0\}$, qui n'est pas dense ; et si $\alpha \neq 0$ alors $]\alpha, 2\alpha[$ est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ qui n'intersecte pas G, donc G n'est pas dense.

Reste à démontrer qu'une des deux propriétés est vérifiée. On peut supposer que G n'est pas réduit à $\{0\}$, donc G a un élément x qui est strictement positif.
On peut donc considérer

$$\alpha = \inf\{y \in G \colon y > 0\}$$

Par définition, $\alpha \geq 0$. Montrons que $\alpha \in G$.
C'est immédiat si $\alpha = 0$. Si $\alpha > 0$, on peut trouver $g \in G$ tel que

$$\alpha < g < 2\alpha$$

Si $g \neq \alpha$ on peut aussi trouver $h \in G$ tel que

$$\alpha < h < g$$

Alors

$$g - h \in G \text{ et } 0 < g - h < \alpha$$

Cela contredit la définition de α.
On voit apparaître deux cas : soit $\alpha > 0$, soit $\alpha = 0$.

Dans le premier cas, on sait que
$$\mathbb{Z}\alpha \subseteq G$$
puisque G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ et $\alpha \in G$.
Soit $g \in G \cap \mathbb{R}^+$. Si jamais $g \notin \mathbb{N}\alpha$, trouvons $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\alpha < g < (n+1)\alpha$ (i.e. n est le plus grand entier tel que $n\alpha < g$, qui existe parce que $\mathbb{R}$ est archimédien).
On a comme ci-dessus
$$0 < g - n\alpha < \alpha$$
et $g - n\alpha \in G$. Cela contredit la définition de α. Donc $G \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{N}\alpha$, d'où $G = \mathbb{Z}\alpha$.

Supposons maintenant $\alpha = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $g \in G$ tel que
$$0 < g < \varepsilon$$
et on peut trouver $n \geq 0$ tel que
$$ng \leq x < (n+1)g$$
Alors $ng \in G$, et $|x - ng| \leq g < \varepsilon$.
Donc $G \cap \mathbb{R}^+$ est dense dans $\mathbb{R}^+$, et en multipliant par -1 on conclut que G est dense dans $\mathbb{R}$. $\square$

Exercice 2.96

1. Montrer qu'il existe une suite de réels (x_n) dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est $\mathbb{R}$ tout entier.
2. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit égal à l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite.

Chapitre 3

Fonctions continues entre espaces métriques

3.1 Fonctions continues et uniformément continues

Maintenant qu'on sait ce qu'est une distance, on peut définir la continuité pour des fonctions entre espaces métriques, plutôt que de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; on reprend la définition déjà connue en remplaçant $|x-y|$ (qui n'a a priori pas de sens dans un espace métrique) par $d(x,y)$.

Définition 3.1

Soit (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques, $f\colon X\to Y$ et $x\in X$. On dit que f est *continue en x* si :

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x'\in X\ d_X(x,x')<\delta \Rightarrow d_Y(f(x),f(x'))<\varepsilon$$

Avec des mots : f est continue en $x\in X$ si, pour tout $\varepsilon>0$, on peut trouver $\delta>0$ tel qu'on ait $d_Y(f(x),f(y))<\varepsilon$ dès que $d_X(x,y)<\delta$.
On dit que f est *continue sur X* si elle est continue en x pour tout $x\in X$, autrement dit :

$$\forall x\in X\ \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x'\in X\ d_X(x,x')<\delta \Rightarrow d_Y(f(x),f(x'))<\varepsilon$$

Ou encore (l'ordre dans lequel on écrit les deux $\forall$ ne change pas le sens de l'énoncé) :

$$\forall \varepsilon>0\ \forall x\in X\ \exists \delta>0\ \forall x'\in X\ d_X(x,x')<\delta \Rightarrow d_Y(f(x),f(x'))<\varepsilon$$

Il faut bien comprendre que, ci-dessus, δ dépend de ε *et du point x où l'on se place*. Une définition plus forte imposerait que le même δ fonctionne pour tous les $x\in X$ simultanément ; dans ce cas, on dit que f est *uniformément continue*.

Définition 3.2

Soit (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques, et $f\colon X\to Y$. On dit que f est *uniformément continue sur X* si

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in X\ \forall x'\in X\ d_X(x,x')<\delta \Rightarrow d_Y(f(x),f(x'))<\varepsilon$$

Par rapport à la définition de la continuité, on a remplacé "$\forall x \in X\ \exists \delta > 0$" par "$\exists \delta > 0\ \forall x \in X$" : δ dépend toujours de ε, mais ne dépend plus de x.

Remarque 3.3

Comme ε est quelconque dans les définitions ci-dessus, on peut y remplacer les inégalités strictes par des inégalités larges sans changer le sens des définitions (et on ne s'en privera pas, en pratique, quand on montrera que des fonctions sont continues)

Toute fonction uniformément continue est continue, mais la réciproque est fausse.

Exemple 3.4

Montrons que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Pour cela, commençons par écrire, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, l'égalité

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

On voit ainsi que, si $|x + y|$ est très grand, $|x^2 - y^2|$ pourra être grand même si $|x - y|$ est petit. Concrètement, fixons $\delta > 0$; il nous suffit de justifier qu'il existe x, y tels que

$$|x - y| < \delta \quad \text{et} \quad |x^2 - y^2| > 1$$

Pour les trouver, prenons $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\delta \geq 1$, et considérons $y = n$, $x = n + \delta$. On a alors $|x - y| = \delta$, mais

$$|x^2 - y^2| = |(x - y)(x + y)| = |(2n + \delta)\delta| > 2n\delta > 1$$

Définition 3.5

Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On dit que $f\colon X \to Y$ est *lipschitzienne* s'il existe $K > 0$ tel que pour tout $x, x' \in X$ on ait

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq K d_X(x, x')$$

Quand l'inégalité ci-dessus est satisfaite par un certain K, pour tout $x, x' \in X$, on dit que f est lipschitzienne de rapport K, ou simplement K-lipschitzienne.

Remarque 3.6

Soit X un ensemble, et d_1, d_2 deux distances sur X. Avec ce vocabulaire, on voit que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- Les distances d_1 et d_2 sont Lipschitz-équivalentes.
- L'application identité, $x \mapsto x$, est lipschitzienne de (X, d_2) vers (X, d_1) et de (X, d_1) vers (X, d_2).

Théorème 3.7

Soit (X,d) un espace métrique, et d_∞ la distance produit sur $X \times X$.
Alors $d\colon (X\times X, d_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est 2-lipschitzienne (et donc continue).

Démonstration. Soit $x_1, y_1, x_2, y_2 \in X$. On a

$$\begin{aligned} |d(x_1,y_1) - d(x_2,y_2)| &= |(d(x_1,y_1) - d(x_1,y_2)) + (d(x_1,y_2) - d(x_2,y_2)| \\ &\leq |d(x_1,y_1) - d(x_1,y_2)| + |d(x_1,y_2) - d(x_2,y_2)| \\ &\leq d(y_1,y_2) + d(x_1,x_2) \\ &\leq 2d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \end{aligned}$$

□

Théorème 3.8

Soit (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques. Toute fonction lipschitzienne de (X,d_X) vers (Y,d_Y) est uniformément continue.

Démonstration. Supposons f lipschitzienne de rapport $K > 0$, et fixons $\varepsilon > 0$.
Posons $\delta = \dfrac{\varepsilon}{K}$. On a alors, pour tout $x, x' \in X$

$$\begin{aligned} d_X(x,x') \leq \delta &\Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) \leq K d_X(x,x') \leq K\delta \\ &\Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

□

Exemple 3.9

Il existe des applications uniformément continues qui ne sont pas lipschitziennes. Par exemple, considérons l'application $x \mapsto \sqrt{x}\colon [0,1] \to [0,1]$.
Pour $x, y \in [0,1]$, qui ne sont pas tous deux égaux à 0, on a

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

En appliquant cette égalité à $x = \dfrac{1}{n^2}$, $y = 0$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) on a

$$\sqrt{\frac{1}{n^2}} - \sqrt{0} = n\left(\frac{1}{n^2} - 0\right)$$

S'il existait une constante K telle que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq K|x-y|$ pour tout $x, y \in [0,1]$, alors l'égalité ci-dessus entraînerait $K \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui n'est pas possible.
On reverra bientôt le théorème de Heine, qui entraîne en particulier que toute application continue sur $[0,1]$ est uniformément continue, et donc que $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0,1]$.
Montrons le directement ; pour cela, fixons $\varepsilon > 0$, et choisissons $\delta = \varepsilon^2$, ainsi que $x, y \in [0,1]$ tels que $|x-y| < \delta$.

Quitte à échanger x et y, on peut supposer $y < x$ (le cas $y = x$ étant trivial).
Si jamais x est supérieur ou égal à ε^2, on a

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{x}} \leq \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} = \varepsilon$$

Par ailleurs, si x est inférieur à ε^2, on a

$$0 \leq \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x} \leq \varepsilon$$

On en déduit, comme attendu, que $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \varepsilon$ dès que $|x - y| < \delta$.

On connaît déjà beaucoup d'exemples d'applications lipschitziennes.

☆ Théorème 3.10

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle qu'il existe M satisfaisant $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in I$. Alors f est M-lipschitzienne.

Démonstration. On utilise l'égalité des accroissements finis : soit $x, y \in I$. Il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$$

Vu l'hypothèse sur f', on en déduit que $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$. □

☆ Théorème 3.11 (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $f\colon X \to Y$ une fonction et $x \in X$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est continue en x.
- Pour toute suite (x_n) d'éléments de X qui converge vers x, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$.

Démonstration. Supposons tout d'abord f continue en x, et fixons une suite (x_n) qui converge vers x ainsi que $\varepsilon > 0$.
D'une part, il existe $\delta > 0$ tel que $d_Y(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$ dès que $d_X(x, x') < \delta$; d'autre part il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d_X(x_n, x) \leq \delta$ pour tout $n \geq N$.
Alors, pour tout $n \geq N$, on a $d_Y(f(x_n), f(x)) \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$.

Réciproquement, supposons que f ne soit pas continue en x :

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x' \in X\ d_X(x, x') < \delta \text{ et } d_Y(f(x), f(x')) \geq \varepsilon$$

Fixons $\varepsilon > 0$ comme ci-dessus, et appliquons la propriété pour $\delta = \dfrac{1}{n}$: ceci nous donne une suite (x_n) telle que $d_Y(x, x_n) < \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (en particulier, (x_n) converge vers x) mais $d(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon$ (par conséquent, $f(x_n)$ ne converge pas vers $f(x)$).

□

☆ Théorème 3.12

Soit (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques, et $f, g \colon X \to Y$ deux fonctions continues. On suppose qu'il existe une partie A dense dans X et telle que $f(a) = g(a)$ pour tout $a \in A$. Alors $f = g$.

Démonstration. Soit $x \in X$. On peut trouver une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers X. On a alors, par continuité de f et g,

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(a_n) \text{ et } g(x) = \lim_{n \to +\infty} g(a_n)$$

Comme $f(a_n) = g(a_n)$ pour tout n, on conclut que $f(x) = g(x)$ par unicité de la limite d'une suite convergente. □

☆ Théorème 3.13 (Caractérisation topologique de la continuité)

Soit (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f \colon X \to Y$ une fonction. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est continue.
2. Pour tout ouvert O de Y, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de X.
3. Pour tout fermé F de Y, $f^{-1}(F)$ est un fermé de X.

On rappelle que $f^{-1}(A) = \{x \in X \colon f(x) \in A\}$ désigne l'*image inverse* de A par f.

Démonstration. Supposons f continue, et soit O un ouvert de Y.
Fixons $x \in f^{-1}(O)$, et considérons une suite (x_n) qui tend vers x. Alors $(f(x_n))$ tend vers $f(x)$ puisque f est continue, donc $f(x_n)$ appartient à O pour n suffisamment grand puisque $f(x) \in O$ et O est ouvert.
Par conséquent, $x_n \in f^{-1}(O)$ pour n suffisamment grand, ce qui nous montre que $f^{-1}(O)$ est ouvert, et on a montré que (1) $\Rightarrow$ (2).

Si (2) est vrai et F est fermé dans Y, alors $Y \setminus F$ est ouvert et par hypothèse on obtient que

$$f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$$

est ouvert dans X, autrement dit $f^{-1}(F)$ est fermé dans X.
Ceci établit l'implication (2) $\Rightarrow$ (3), et en fait le même argument de passage au complémentaire donne l'implication réciproque (3) $\Rightarrow$ (2).

Il nous reste à prouver que (2) $\Rightarrow$ (1) ; supposons donc de nouveau (2) vérifié, et considérons $x \in X$ et $\varepsilon > 0$.
Puisque $B(f(x), \varepsilon)$ est un ouvert contenant $f(x)$, son image réciproque par f est par hypothèse un ouvert contenant x, par conséquent il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$, c'est-à-dire :

$$\forall x' \in X \ d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

On a bien montré que f est continue. □

On n'a en fait besoin que de considérer que des images réciproques de parties appartenant à une base donnée de la topologie de l'espace d'arrivée.

Théorème 3.14

Soit (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f\colon X \to Y$ une fonction. Soit $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de Y.
Alors f est continue si, et seulement si, $f^{-1}(U)$ est ouvert pour tout élément de $\mathcal{B}$.

Démonstration. Si f est continue alors $f^{-1}(U)$ est ouvert pour tout ouvert U, en particulier pour tout $U \in \mathcal{B}$.
Réciproquement, supposons $f^{-1}(U)$ ouvert pour tout $U \in \mathcal{B}$, et soit O un ouvert quelconque de Y. Alors il existe une famille $(B_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que $O = \bigcup\limits_{i\in I} B_i$. Par conséquent,

$$f^{-1}(O) = f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

est ouvert puisque c'est une réunion d'ouverts. Donc f est continue. □

Attention!

L'image d'un ouvert par une application continue n'est pas toujours un ouvert, et l'image d'un fermé pas toujours un fermé !
Par exemple, considérons l'application $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors l'image de $\mathbb{R}$ est $[-1, 1]$, qui n'est pas ouvert.
Par ailleurs, $\arctan$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais $\arctan(\mathbb{R}) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, qui n'est pas fermé.

Théorème 3.15

Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ une application continue. Pour toute partie A de X on a

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

et l'inclusion peut être stricte.

Démonstration. Soit $x \in \overline{A}$, et (a_n) une suite d'éléments de A qui converge vers x.
Alors $f(a_n)$ est une suite d'éléments de $f(A)$ qui converge vers $f(x)$ puisque f est continue ; donc $f(x) \in \overline{f(A)}$, par conséquent $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.
On vient de voir (avec $\arctan$) un exemple où l'inclusion est stricte. □

Exemple 3.16

Montrons que

$$\overline{\{\cos(n)\colon n \in \mathbb{Z}\}} = [-1, 1]$$

Pour cela, considérons le sous-groupe A de $(\mathbb{R}, +)$ engendré par 1 et 2π, c'est-à-dire

$$A = \{n + 2\pi m\colon n, m \in \mathbb{Z}\}$$

Si A était monogène, on aurait $\alpha \in A$ et $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que $1 = n_1\alpha$ et $2\pi = n_2\alpha$; mais alors

$\pi = \dfrac{n_2}{2n_1}$ serait rationnel, ce qui n'est pas le cas.
Donc A est dense dans $\mathbb{R}$, d'où

$$\overline{\{\cos(a) \colon a \in A\}} = \cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$$

Mais puisque $\cos(n + 2\pi m) = \cos(n)$ pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$, on a aussi

$$\{\cos(a) \colon a \in A\} = \{\cos(n) \colon n \in \mathbb{Z}\} \ ,$$

d'où le résultat.

Théorème 3.17
Soit (X, d_X), (Y, d_Y) et (Z, d_Z) trois espaces métriques, ainsi que $f \colon Y \to Z$ et $g \colon X \to Y$ deux fonctions continues. Alors $f \circ g \colon X \to Z$ est continue.

Démonstration. Commençons par raisonner à l'aide de la définition (ε, δ) de la continuité.
Fixons $\varepsilon > 0$. Comme f est continue, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $y, y' \in Y$ on ait

$$d_Y(y, y') < \delta_1 \Rightarrow d_Z(f(y), f(y')) < \varepsilon$$

Puis, comme g est continue, il existe $\delta_2 > 0$ tel que pour tout $x, x' \in X$ on ait

$$d_X(x, x') < \delta_2 \Rightarrow d_Y(g(x), g(x')) < \delta_1$$

On a alors, pour tout $x, x' \in X$:

$$d_X(x, x') < \delta_2 \Rightarrow d_Y(g(x), g(x')) < \delta_1 \Rightarrow d_Z(f(g(x)), f(g(x')) < \varepsilon$$

On vient de prouver que $f \circ g$ est continue.

Démontrons le même résultat, en utilisant le langage de la topologie : soit O un ouvert de Z. Alors $(f \circ g)^{-1}(O) = g^{-1}(f^{-1}(O))$ est ouvert ; en effet, $f^{-1}(O)$ est ouvert par continuité de f, donc $g^{-1}(f^{-1}(O))$ est ouvert par continuité de g. Ceci suffit à établir que $f \circ g$ est continue.

$\square$

Théorème 3.18

1. On munit $\mathbb{R}^2$ de la distance induite par $\|\cdot\|_\infty$, et $\mathbb{R}$ de sa distance usuelle. Alors les fonctions $(x, y) \mapsto x + y$ et $(x, y) \mapsto xy$ sont continues.
2. Soit (X, d) un espace métrique et $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors la somme $f + g$ et le produit fg sont également des fonctions continues.

Démonstration. On verra plus tard que, en dimension finie, les applications linéaires sont toujours continues, ce qui justifierait la continuité de $(x, y) \mapsto x + y$. Montrons directement que cette application est lipschitzienne : pour tout (x, y), (x', y') dans $\mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned} |(x+y) - (x'+y')| &= |(x-x') + (y-y')| \\ &\le |x-x'| + |y-y'| \\ &\le 2\|(x,y) - (x',y')\|_\infty \end{aligned}$$

Pour la continuité de $(x, y) \mapsto xy$, fixons $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned} |xy - x'y'| &= |x(y-y') + y'(x-x')| \\ &\le |x||y-y'| + |y'||x-x'| \\ &\le (|x| + |y'|)\|(x,y) - (x',y')\|_\infty \end{aligned}$$

Fixons $\varepsilon > 0$, et choisissons $\delta > 0$ tel que $(2\|(x, y)\|_\infty + \delta)\delta < \varepsilon$.
Soit (x', y') tel que $\|(x', y') - (x, y)\|_\infty \le \delta$. Alors on a

$$|y'| \le \|(x', y')\|_\infty \le \|(x, y)\|_\infty + \delta$$

donc l'inégalité ci-dessus nous donne

$$|xy - x'y'| \le (2\|(x, y)\|_\infty + \delta)\delta < \varepsilon$$

On a établi le premier des résultats ci-dessus. Montrons que $x \mapsto (f(x), g(x))$ est continue de (X, d_X) vers $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$: soit $\varepsilon > 0$ et $x \in X$.
Par continuité de f et g en x, il existe $\delta_1, \delta_2 > 0$ tels que l'on ait

$$d(x', x) < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon \quad \text{et} \quad d(x', x) < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(x')| < \varepsilon$$

On a alors

$$\|(f(x), g(x)) - (f(x'), g(x'))\|_\infty \le \varepsilon$$

pour tout x' tel que $d(x, x') < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.
La continuité de $f + g$ se déduit du fait que c'est une composition de

$$x \mapsto (f(x), g(x)) \ , \quad (u, v) \mapsto u + v$$

et qu'une composition d'applications continues est continue.
De même, fg est la composée de $x \mapsto (f(x), g(x))$ et $(u, v) \mapsto uv$, qui sont continues. □

Exercice 3.19

Soit (X, d_X), (Y, d_Y) et (Z, d_Z) trois espaces métriques, ainsi que $f : Y \to Z$ et $g : X \to Y$ deux fonctions uniformément continues. Montrer que $f \circ g : X \to Z$ est uniformément continue.

Exercice 3.20

Pour chacun des énoncés suivants, déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui le satisfont :

1. $\exists \delta > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \forall x \in X\ \forall x' \in X\ |x - x'[< \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.
2. $\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in X\ \forall x' \in X\ \exists \delta > 0\ |x - x'[< \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

3.2 Fonctions à valeurs dans un produit d'espaces métriques

Théorème 3.21

Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Les *projections* π_X, π_Y, définies par

$$\pi_X(x, y) = x \quad \text{et} \quad \pi_Y(x, y) = y$$

sont des applications continues.
De plus, pour tout ouvert O de $(X \times Y, d_\infty)$, $\pi_X(O)$ est un ouvert de (X, d_X) et $\pi_Y(O)$ est un ouvert de (Y, d_Y).

Démonstration. Soit U un ouvert de X. Alors $\pi_X^{-1}(U) = U \times Y$ est un ouvert de $X \times Y$. Donc π_X est continue, et le même argument s'applique à π_Y.

Soit O un ouvert non vide de $(X \times Y, d_\infty)$; on peut trouver un ensemble I et une famille d'ouverts (U_i) de (X, d_X) et (V_i) de (Y, d_Y) tels que $O = \bigcup\limits_{i \in I} U_i \times V_i$. Alors on a

$$\begin{aligned} \pi_X(O) &= \pi_X\left(\bigcup_{i \in I} U_i \times V_i\right) \\ &= \bigcup_{i \in I} \pi_X(U_i \times V_i) \end{aligned}$$

Or $\pi_X(U_i \times V_i)$ est égal à U_i si $V_i \neq \emptyset$, et $\emptyset$ sinon. Dans tous les cas c'est un ouvert de (X, d_X), et $\pi_X(O)$ est donc ouvert en tant que réunion d'une famille d'ouverts.
La démonstration pour π_Y est identique. $\square$

Théorème 3.22

Soit (X, d_X), (Y, d_Y) et (Z, d_Z) trois espaces métriques. Soit $f\colon X \to (Y \times Z, d_\infty)$ une fonction. On note

$$f(x) = (f_Y(x), f_Z(x))$$

Alors f est continue si, et seulement si, f_Y et f_Z sont continues.

Démonstration. On a $f_Y = \pi_Y \circ f$ et $f_Z = \pi_Z \circ f$. Comme π_Y et π_Z sont continues, on en déduit que f_Y, f_Z le sont aussi dès que f est continue.
Réciproquement, supposons f_Y et f_Z continues, et soit O un ouvert de $Y \times Z$. Alors on a des ouverts $(U_i)_{i\in I}$ de (Y, d_Y) et $(V_i)_{i\in I}$ de (Z, d_Z) tels que $O = \bigcup_{i\in I} U_i \times V_i$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} f^{-1}(O) &= f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} U_i \times V_i\right) \\ &= \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i \times V_i) \\ &= \bigcup_{i\in I} \{x \in X \colon (f_Y(x), f_Z(x)) \in U_i \times V_i\} \\ &= \bigcup_{i\in I} \{x \in X \colon x \in f_Y^{-1}(U_i) \text{ et } x \in f_Z^{-1}(V_i)\} \\ &= \bigcup_{i\in I} f_Y^{-1}(U_i) \cap f_Z^{-1}(V_i) \end{aligned}$$

Puisque $f_Y^{-1}(U_i)$ et $f_Z^{-1}(V_i)$ sont tous deux ouverts par continuité de f_Y, f_Z, on en déduit que $f^{-1}(O)$ est ouvert.
Ceci étant vrai pour tout ouvert O de $(Y \times Z, d_\infty)$, on conclut que f est continue. □

☆ Théorème 3.23

Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et $f, g \colon X \to Y$ deux fonctions continues. Alors $\{x \colon f(x) = g(x)\}$ est fermé dans (X, d_X).

Démonstration. On munit $Y \times Y$ de la distance produit d_∞ ; on sait que la diagonale

$$\Delta_Y = \{(y, y) \colon y \in Y\}$$

est un fermé de $(Y \times Y, d_\infty)$. De plus l'application

$$(f, g) \colon x \mapsto (f(x), g(x))$$

est continue de X vers $(Y \times Y, d_\infty)$. Donc

$$\{x \colon f(x) = g(x)\} = (f, g)^{-1}(\Delta_Y)$$

est fermé dans (X, d_X). □

Remarque 3.24

Ce résultat est essentiellement une reformulation du théorème 3.12 (et, comme dans le cas du théorème 3.12, on aurait pu le démontrer en raisonnant avec des suites).

3.3 Limite d'une fonction en un point

Il arrive fréquemment (en particulier quand on étudie les solutions d'équations différentielles !) qu'on se retrouve amené à étudier la limite d'une fonction f en un point qui n'est pas dans son domaine de définition. Ceci nous amène à la définition générale suivante.

Définition 3.25

Soit (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques, A une partie de X, et $x \in \overline{A}$.
On dit qu'une fonction $f \colon A \to Y$ *tend vers* $y \in Y$ quand a tend vers x, ou que *la limite de* f *en* x *est égale à* y, si :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall a \in A \quad 0 < d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), y) < \varepsilon$$

On écrit alors

$$\lim_{a \to x} f(a) = y$$

Attention!

Il est tout à fait possible que x ci-dessus appartienne à A, et donc que f soit déjà définie en x ; mais dans la définition on n'autorise pas $a = x$, par conséquent le fait que f soit définie en x n'intervient pas dans le calcul de la limite en x. En particulier, celle-ci peut tout à fait exister et être différente de $f(x)$.

Théorème 3.26

Soit (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques, $f \colon X \to Y$ une fonction et $x \in X$. Soit $y \in Y$. Alors

$$\lim_{x' \to x} f(x') = y$$

si, et seulement si, on a

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = y$$

pour toute suite (x_n) d'éléments de X qui converge vers x et telle que $x_n \neq x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Supposons que $\lim\limits_{x' \to x} f(x') = y$ et considérons une suite (x_n) qui converge vers x et telle que $x_n \neq x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que

$$0 < d_X(x, x') \leq \delta \Rightarrow d_Y(f(x'), y) \leq \varepsilon$$

Puisque (x_n) converge vers x, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x) \leq \delta$ pour tout $n \geq N$, donc on a aussi (puisque $x_n \neq x$ pour tout n) $d(f(x_n), y) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.

Pour établir la réciproque, supposons ne pas avoir $\lim\limits_{x' \to x} f(x') = y$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, on peut trouver $x' \in X$ satisfaisant

$$0 < d_X(x, x') \leq \delta \quad \text{et} \quad d_Y(f(x'), y) \geq \varepsilon$$

En appliquant la propriété ci-dessus avec $\delta = 2^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on trouve une suite (x_n) d'éléments de X tels que

$$0 < d_X(x, x_n) \leq 2^{-n} \quad \text{et} \quad d_Y(f(x_n), y) \geq \varepsilon$$

Par conséquent, $x_n \neq x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, (x_n) converge vers x, et $(f(x_n))$ ne converge pas vers y. □

Remarque 3.27

On suppose ci-dessus que $x_n \neq x$ pour tout n parce que la définition de la limite de f en x ne dépend pas de la valeur $f(x)$; la plupart du temps, ça ne fait pas de différence parce qu'on a $y = f(x)$ quand la limite existe.

Cela nous permet de reformuler la définition de la continuité en termes de limite en un point.

Théorème 3.28

Soit (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques, $f : X \to Y$ une fonction et $x \in X$.
Alors f est continue en x si, et seulement si, $\lim\limits_{x' \to x} f(x')$ existe et est égale à $f(x)$.

Théorème 3.29 (Prolongement par continuité)

Soit (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques, A une partie de X. Soit $f : A \to Y$ une fonction, et soit

$$B = \left\{ x \in \overline{A} \setminus A : \lim_{a \to x} f(a) \text{ existe} \right\}$$

On définit une fonction g sur $A \cup B$ en posant

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ \lim\limits_{a \to x} f(a) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

Alors g est continue en x pour tout $x \in B$.
Si on suppose aussi que f est continue sur A, alors g est continue sur $A \cup B$.

Démonstration. Soit $x \in B$, et soit $\varepsilon > 0$. Par définition d'une limite de fonction en un point, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $a \in A$ on ait

$$d_X(a, x) \leq \delta \Rightarrow d_Y(f(a), g(x)) \leq \varepsilon$$

Soit $z \in B$ tel que $d_X(z, x) < \delta$; puisque $z \in \overline{A}$ on peut trouver une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers z, et on a alors $d_X(a_n, x) < \delta$ pour n suffisamment grand.
On en déduit que

$$d_Y(g(z), g(x)) = \lim_{n \to +\infty} d_Y(f(a_n), g(x)) \leq \varepsilon$$

Par conséquent, pour tout $z \in A \cup B$ on a

$$d_X(z, x) < \delta \Rightarrow d_Y(g(z), g(x)) \leq \varepsilon$$

Ceci montre que g est continue en x.

Si f est supposée continue sur A, montrons que g est continue sur $A \cup B$ (i) ; pour cela, il nous reste à montrer que g est continue en a pour tout $a \in A$, puisqu'on a déjà vu qu'elle était continue en b pour tout $b \in B$.
Fixons donc $a \in A$. S'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \cap A = \{a\}$, alors on a aussi

$$B(a, \varepsilon) \cap (A \cup B) = \{a\}$$

donc g est continue en a (le seul point de $A \cup B$ proche de a est a).
Sinon, si on pose $A_1 = A \backslash \{a\}$, alors $a \in \overline{A_1}$, et g est le prolongement par continuité de $f \colon A_1 \to Y$ puisque

$$g(a) = \lim_{a' \to a} f(a')$$

Par l'argument précédent, g est continue en a. □

3.4 Suites de fonctions

Tout comme la continuité, les notions de convergence simple/uniforme de suites de fonctions qu'on connaît pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'étendent aux fonctions entre espaces métriques.

Définition 3.30
Soit (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques, et (f_n) une suite de fonctions de X dans Y. On dit que (f_n) converge *simplement* vers une fonction $f \colon X \to Y$ si pour tout $x \in X$ la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$; autrement dit :

$$\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

Ci-dessus, N dépend à la fois de ε et de x ; comme dans la définition de la continuité, on peut demander que N ne dépende que de ε, et on obtient ainsi la définition de la convergence *uniforme*.

Définition 3.31
Soit (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques, et (f_n) une suite de fonctions de X dans Y. On dit que (f_n) converge *uniformément* vers une fonction $f \colon X \to Y$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall x \in X \ \forall n \geq N \ d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

Notons que, dans ces deux définitions, la distance sur X ne joue aucun rôle ; elle en jouera un quand on voudra parler de continuité.
Bien entendu, la convergence uniforme entraîne la convergence simple. La réciproque est fausse.

(i). La raison pour laquelle ce n'est pas complètement immédiat est qu'il peut exister une suite d'éléments de B qui converge vers un élément de A.

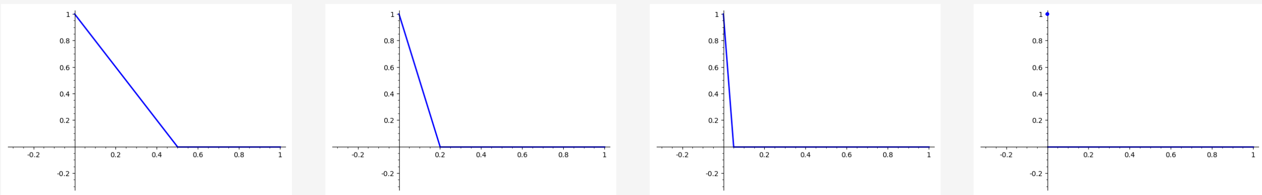
Exemple 3.32

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : [0,1] \to [0,1]$ en posant

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq \dfrac{1}{n} \\ 1 - nx & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Alors $f_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; et si $x > 0$ il existe N tel que $x \geq \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geq N$, donc $f_n(x) = 0$ à partir d'un certain rang.
On vient de montrer que (f_n) converge simplement vers $f : [0,1] \to [0,1]$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Les graphes de f_2, f_5, f_{20} et f

Cette fonction n'est pas continue ; et la convergence n'est pas uniforme : en effet, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n\left(\frac{1}{2n}\right) - f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$$

Cet exemple montre que la convergence simple ne préserve pas la continuité [i].

Théorème 3.33

Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et (f_n) une suite de fonctions continues de X dans Y. Si (f_n) converge uniformément vers $f : X \to Y$ alors f est continue.

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$ et $x \in X$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$ pour tout $x \in X$.
Fixons un tel N ; comme f_N est continue, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x' \in X$,

$$d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f_N(x), f_N(x')) < \varepsilon.$$

(i). Cela motive l'introduction des fonctions boréliennes, et le développement d'une théorie permettant d'intégrer ces fonctions : une limite simple de fonctions boréliennes reste borélienne. Un théorème célèbre de Lebesgue établit que les fonctions boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ forment la plus petite algèbre de fonctions contenant les fonctions continues et stable par passage à la limite simple.

Alors on a, pour tout $x' \in X$ tel que $d_X(x, x') < \delta$:

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(x')) &\leq d_Y(f(x), f_N(x)) + d_Y(f_N(x), f_N(x')) + d_Y(f_N(x'), f(x')) \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \\ &= 3\varepsilon \end{aligned}$$

Comme ε était quelconque, ceci suffit à démontrer que f est continue en x. □

Exercice 3.34
Montrer qu'une limite uniforme de fonctions uniformément continues est uniformément continue.

3.5 Continuité des applications linéaires entre espaces vectoriels normés

Théorème 3.35
Soit $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$) deux espaces vectoriels normés, et $f\colon X \to Y$ une application linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est continue.
2. f est continue en 0.
3. $\exists M > 0\ \forall x \in X\ \|f(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$.
4. f est lipschitzienne.

Démonstration. Clairement, si f est continue alors elle est continue en 0.

Supposons maintenant f continue en 0 ; par définition de la continuité, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in X$ on ait

$$\|x\|_X \leq \varepsilon \Rightarrow \|f(x) - f(0)\|_Y = \|f(x)\|_Y \leq 1$$

(Ci-dessus, on a utilisé le fait que $f(0) = 0$ puisque f est linéaire).
Soit maintenant $x \in X \setminus \{0\}$, et

$$y = \frac{\varepsilon x}{\|x\|_X}$$

Alors $\|y\| = \varepsilon$, par conséquent $\|f(y)\|_Y \leq 1$.
On vient de montrer que, pour tout $x \in X \setminus \{0\}$ on a

$$\left\| f\left(\frac{\varepsilon x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y \leq 1$$

En utilisant la linéarité de f et l'homogénéité de $\|\cdot\|_Y$, on obtient donc pour tout $x \neq 0$

$$\frac{\varepsilon}{\|x\|_X}\|f(x)\|_Y \leq 1 \quad \text{ou encore} \quad \|f(x)\|_Y \leq \frac{1}{\varepsilon}\|x\|_X$$

Cette inégalité est également vérifiée quand $x = 0$, ce qui montre que la deuxième propriété ci-dessus implique la troisième.

Supposons maintenant qu'il existe $M > 0$ tel que $\|f(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$ pour tout $x \in X$.
Soit $x, x' \in X$. En utilisant la linéarité de f et note hypothèse, on obtient

$$\begin{array}{rcl} \|f(x) - f(x')\|_Y & = & \|f(x - x')\|_X \\ & \leq & M\|x - x'\|_X \end{array}$$

Ceci montre que f est M-lipschitzienne.

Comme une fonction lipschitzienne est continue, on conclut que toutes ces propriétés sont bien équivalentes.

$\square$

Définition 3.36

Soit $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y))$ deux espaces vectoriels normés, et $f\colon X \to Y$ une application linéaire continue. On définit la *norme subordonnée* de f par

$$|||f||| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X}$$

C'est le théorème 3.35 qui garantit que le $\sup$ dans la définition de la norme subordonnée est bien défini.

Théorème 3.37

Soit $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y))$ deux espaces vectoriels normés, et $f\colon X \to Y$ une application linéaire et continue. Alors on a :

$$\forall x \in X \ \|f(x)\|_Y \leq |||f||| \cdot \|x\|_X$$

et

$$|||f||| = \sup\{\|f(x)\|_Y \colon \|x\|_X \leq 1\} = \sup\{\|f(x)\|_Y \colon \|x\|_X = 1\}$$

Démonstration. La première propriété est une simple reformulation de la définition : l'inégalité attendue est clairement vraie si $x = 0$, et si $x \neq 0$ on a par définition

$$\frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X} \leq |||f||| \quad \text{donc} \quad \|f(x)\|_Y \leq |||f||| \cdot \|x\|_X$$

En utilisant cette inégalité, on obtient pour tout x de norme ≤ 1 que $\|f(x)\|_Y \leq |||f|||$.
Par conséquent,

$$\sup\{\|f(x)\|_Y \colon \|x\|_X \leq 1\} \leq |||f|||$$

D'autre part, il est clair (inclusion d'ensembles) que

$$\sup\{\|f(x)\|_Y \colon \|x\|_X = 1\} \leq \sup\{|f(x)\|_Y \colon \|x\|_X \leq 1\}$$

Par ailleurs, pour tout x non nul on a

$$\frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y \leq \sup\{\|f(z)\|_Y \colon \|z\|_X = 1\}$$

Il s'ensuit que $|||f||| \leq \sup\{\|f(x)\|_Y \colon \|x\|_X = 1\}$. Au final, on a obtenu les inégalités suivantes :

$$|||f||| \leq \sup\{\|f(x)\|_Y \colon \|x\|_X = 1\} \leq \sup\{|f(x)\|_Y \colon \|x\|_X \leq 1\} \leq |||f|||$$

□

Définition 3.38

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et $r \geq 0$. La *sphère* de centre x et de rayon r est l'ensemble

$$S(x,r) = \{y \in X \colon \|y - x\| = r\}$$

Comme la norme est une application continue de $(X, \|\cdot\|_X)$ vers $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, chaque sphère est un fermé de $(X, \|\cdot\|_X)$.
En utilisant ce langage, le théorème précédent nous dit que la norme subordonnée d'une application linéaire $f \colon (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ est le sup des $\|f(x)\|_Y$ quand x parcourt la boule unité de $(X, \|\cdot\|_X)$, et que c'est aussi le sup des $\|f(x)\|_Y$ quand x parcourt la sphère unité de $(X, \|\cdot\|_X)$.

Définition 3.39

Soit $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y))$ deux espaces vectoriels normés.
On note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des applications linéaires continues de X vers Y.

Puisqu'une combinaison linéaire d'applications linéaires continues est encore une application linéaire continue, $\mathcal{L}(X, Y)$ est un espace vectoriel.

Théorème 3.40

Soit $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y))$ deux espaces vectoriels normés.
Alors l'espace $(\mathcal{L}(X, Y), |||\cdot|||)$ est un espace vectoriel normé.

Démonstration. Les propriétés de séparation et d'homogénéité sont normalement faciles à vérifier et on les laisse en exercice.
Soit $f, g \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $x \in B_X(0,1)$. On a

$$\begin{aligned} \|(f+g)(x)\|_Y &= \|f(x) + g(x)\|_Y \\ &\leq \|f(x)\|_Y + \|g(x)\|_Y \\ &\leq |||f||| + |||g||| \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$|||f+g||| = \sup\{\|(f+g)(x)\|_Y \colon \|x\|_X \leq 1\} \leq |||f||| + |||g|||$$

□

☆ Théorème 3.41

Soit $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y))$ et $(Z, \|\cdot\|_Z)$ trois espaces vectoriels normés ; soit $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$ deux applications linéaires continues. Alors on a

$$|||g \circ f||| \leq |||g||| \cdot |||f|||$$

Démonstration. Soit $x \in X$ tel que $\|x\|_X \leq 1$. Alors on a

$$\begin{array}{rcl} \|g \circ f(x)\|_Z & = & \|g(f(x))\|_Z \\ & \leq & |||g||| \cdot \|f(x)\|_Y \\ & \leq & |||g||| \cdot |||f|||. \end{array}$$

On en déduit l'inégalité attendue. □

Exemple 3.42

• Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. On considère l'application linéaire

$$\varphi : E \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_0^1 x f(x) dx$$

Pour tout $f \in E$, on a

$$\begin{array}{rcl} |\varphi(f)| & = & \left| \int_0^1 x f(x) dx \right| \\ & \leq & \int_0^1 |x f(x)| dx \\ & \leq & \int_0^1 x \|f\|_\infty dx \\ & = & \frac{1}{2} \|f\|_\infty \end{array}$$

On en déduit que $\varphi\colon (E, \|\cdot\|)_\infty \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est continue, et que $|||\varphi||| \leq \frac{1}{2}$.
Par ailleurs, en considérant la fonction constante $g \mapsto 1$, on a l'égalité

$$|\varphi(g)| = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \|g\|_\infty$$

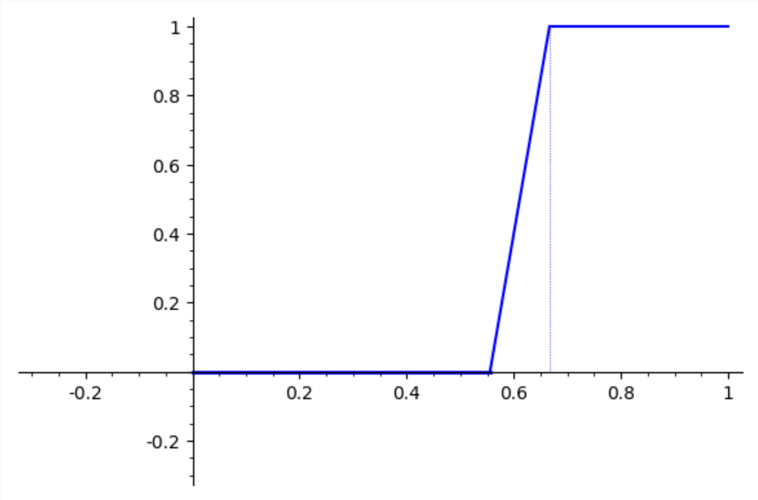
On en conclut que $|||\varphi||| = \frac{1}{2}$, et que cette norme est atteinte (c'est-à-dire qu'il existe $g \in E$, de norme 1, et tel que $|\varphi(g)| = |||\varphi|||$).

• Considérons la même application linéaire φ, mais munissons cette fois E de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$.
Soit $f \in E$. Pour tout $x \in [0,1]$ on a $|xf(x)| \leq |f(x)|$, et donc

$$|\varphi(f)| \leq \int_0^1 |x f(x)| dx \leq \int_0^1 |f(x)| dx = \|f\|_1$$

On vient de montrer que $\varphi\colon (E, \|\cdot\|)_1 \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est continue, et que $|||\varphi||| \leq 1$.
Il est un peu plus délicat de se convaincre que la norme subordonnée de φ est égale à 1.
Le calcul précédent montre que l'inégalité va être proche d'être une égalité si f vaut 1 en 1 et est aussi proche de 0 que possible ailleurs.
Considérons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 - \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ n^2 x - n^2 - n + 1 & \text{si } 1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} \leq x \leq 1 - \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Le graphe de f_3

Alors $\|f_n\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f_n(x)|dx = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
Pas la peine de faire un calcul compliqué d'intégrale : c'est la somme des aires d'un rectangle et d'un triangle ! Par ailleurs,

$$\begin{aligned} |\varphi(f_n)| &\geq \int_{1-\frac{1}{n}}^1 x f_n(x)dx \\ &= \int_{1-\frac{1}{n}}^1 x dx \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - (1 - \frac{1}{n})^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\frac{|\varphi(f_n)|}{\|f_n\|_1} \geq \frac{\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = 1+o(1)$$

qui tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Comme on a, pour tout n,

$$|||\varphi||| \geq \frac{|\varphi(f_n)|}{\|f_n\|_1}$$

on conclut que $|||\varphi||| \geq 1$, donc au final $|||\varphi||| = 1$.
Montrons que cette norme n'est pas atteinte ; si elle l'était, on aurait $f \in E \setminus \{0\}$ telle que

$$\left|\int_0^1 xf(x)\right| = \int_0^1 |f(x)|dx$$

On a déjà vu que le terme de gauche est toujours plus petit que celui de droite, et que pour qu'ils soient égaux il est nécessaire qu'on ait

$$\int_0^1 x|f(x)|dx = \int_0^1 |f(x)|dx$$

Ceci arrive exactement si $\displaystyle\int_0^1 (1-x)|f(x)|dx = 0$; mais $x \mapsto (1-x)|f(x)|$ est une fonction continue, à valeurs positives, et ne peut donc être d'intégrale nulle que si c'est la fonction nulle. Donc $f = 0$, contradiction.
Finalement, φ est de norme 1, et la norme n'est pas atteinte.
On voit ici que les calculs exacts de norme peuvent être compliqués : il n'est pas toujours évident de calculer une borne supérieure !

• Finissons par un exemple d'application linéaire non continue (nécessairement définie sur un espace normé de dimension infinie, comme on le verra au prochain chapitre)
On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme N définie par

$$N(P) = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$$

et on considère

$$\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R},\ P \mapsto P'(1)$$

Alors φ est linéaire.
Si on considère $P_n = X^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, alors $N(P_n) = 1$, et $|\varphi(P_n)| = n$.
Ceci montre que φ n'est pas bornée sur la boule unité de (E, N).
Par conséquent $\varphi\colon (E, N) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ n'est pas continue.

Chapitre 4

Compacité

4.1 Espaces métriques compacts : équivalence de deux définitions

Définition 4.1

Soit (X, d) un espace métrique. Un *recouvrement* ouvert de X est une famille d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$ telle que

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X$$

.

Un *sous-recouvrement* de $(U_i)_{i \in I}$ est donné par un sous-ensemble J de I tel que $(U_j)_{j \in J}$ soit encore un recouvrement. On dit que ce sous-recouvrement est *fini* si J est un ensemble fini.

Exemple 4.2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $U_n =]-n, n[$. Alors (U_n) est un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}$:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}}]-n, n[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

Ce recouvrement n'admet pas de sous-recouvrement fini, puisque dans ce cas si $I \subseteq N$ est fini et $n = \max I$ on a $\bigcup_{i \in I} U_i = U_n =]-n, n[$.

Définition 4.3

Un espace métrique (X, d) a la *propriété de Borel–Lebesgue* si tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement fini.

Cette propriété peut (à juste titre) paraître abstraite ; nous allons montrer qu'elle fournit une caractérisation des espaces métriques *compacts*, que vous avez déjà rencontrés par le passé.

Définition 4.4

Soit (X, d) un espace métrique. L'espace (X, d) a la *propriété de Bolzano–Weierstrass* si toute suite (x_n) d'éléments de X admet une sous-suite convergente.
On dit aussi que (X, d) est *séquentiellement compact*.

Le but du reste de cette section est de démontrer que les propriétés de Bolzano–Weierstrass et Borel–Lebesgue sont équivalentes ; un espace satisfaisant ces propriétés sera dit *compact*.

Définition 4.5

Un espace métrique (X, d) est *précompact* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x_1, \ldots, x_n \in X$ tels que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$$

Informellement : quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut toujours trouver un ensemble fini qui soit "égal à X à ε près" - si on est myope et qu'on ne voit pas les distances plus petites que ε, on ne fait pas la différence entre X et un ensemble fini (et ce, quel que soit $\varepsilon > 0$).

Exemple 4.6

L'espace $([0, 1], |\cdot|)$ est précompact : pour le voir, fixons $\varepsilon > 0$. On peut trouver n tel que $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$.
Notons alors $x_k = \frac{k}{n}$ pour $k \in \{0, \ldots, n\}$.
Alors pour tout $x \in [0, 1]$ il existe $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ tel que $x \in [x_k, x_{k+1}]$, donc $|x - x_k| \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon$.

Lemme 4.7

Soit (X, d) un espace métrique avec la propriété de Borel–Lebesgue. Alors (X, d) est précompact.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. La famille $(B(x, \varepsilon))_{x \in X}$ est un recouvrement ouvert de X.
Par Borel–Lebesgue, ce recouvrement admet un sous-recouvrement fini, ce qui nous fournit $x_1, \ldots, x_n$ tels que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$$

□

Lemme 4.8

Soit (X, d) un espace métrique avec la propriété de Bolzano–Weierstrass. Alors (X, d) est précompact.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons (X, d) non précompact. Alors on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que X ne puisse pas s'écrire comme réunion finie de boules de rayon ε.
Fixons un tel ε ; nous pouvons construire par récurrence une suite (x_n) telle que pour tout $n \geq 1$ on ait

$$x_n \notin \bigcup_{i=0}^{n-1} B(x_i, \varepsilon)$$

En effet, on peut choisir n'importe quel $x_0 \in X$; puis, supposant $x_0, \ldots, x_n$ construits, la réunion des boules $B(x_i, \varepsilon)$ ne peut recouvrir X, et cela nous permet de choisir x_{n+1} qui n'appartient pas à cette réunion.
Ceci entraîne $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ pour tout $i \neq j$. Montrons que la suite (x_n) ne peut pas admettre une sous-suite convergente : si $(x_{\varphi(n)})$ convergeait vers $x \in X$, on aurait $d(x_{\varphi(n)}, x) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tout n assez grand, donc aussi

$$\begin{aligned} d(x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n+1)}) &\leq d(x_{\varphi(n)}, x) + d(x_{\varphi(n+1)}, x) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

pour tout n suffisamment grand, contredisant notre construction de la suite (x_n). □

Lemme 4.9
Soit (X, d) un espace métrique ayant la propriété de Bolzano–Weierstrass, et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de (X, d). Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

Pour tout $x \in X$, il existe $i \in I$ satisfaisant $B(x, \varepsilon) \subseteq U_i$.

Un tel ε est appelé un *nombre de Lebesgue* du recouvrement.

Démonstration. Raisonnons de nouveau par l'absurde, et supposons qu'il existe un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ contredisant ce résultat.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut alors trouver $x_n \in X$ tel que $B(x_n, 2^{-n})$ ne soit contenue dans aucun U_i.
Par hypothèse sur X, la suite (x_n) admet une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers un certain x, et il existe $i \in I$ tel que $x \in U_i$, donc aussi $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq U_i$ puisque U_i est ouvert.
Pour n suffisamment grand, on a à la fois

$$2^{-\varphi(n)} < \frac{r}{2} \quad \text{et} \quad d(x_{\varphi(n)}, x) < \frac{r}{2}$$

L'inégalité triangulaire nous assure alors que

$$B\left(x_{\varphi(n)}, 2^{-\varphi(n)}\right) \subseteq B(x, r)$$

ce qui contredit le choix de notre suite (x_n) puisque $B(x, r) \subseteq U_i$.

□

☆ Théorème 4.10

Soit (X,d) un espace métrique ayant la propriété de Bolzano–Weierstrass. Alors (X,d) a aussi la propriété de Borel–Lebesgue.

Démonstration. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de (X,d).
Par le lemme 4.9 on peut trouver $\varepsilon > 0$ un nombre de Lebesgue de ce recouvrement, et le lemme 4.8 nous donne $x_1,\ldots,x_n$ tels que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\varepsilon)$$

On peut trouver $i_1,\ldots,i_n$ tels que $B(x_j,\varepsilon) \subseteq U_{i_j}$ pour tout $j \in \{1,\ldots,n\}$, et alors la famille $(U_{i_j})_{j=1,\ldots,n}$ est un sous-recouvrement ouvert fini de $(U_i)_{i\in I}$. □

☆ Théorème 4.11

Soit (X,d) un espace métrique ayant la propriété de Borel–Lebesgue. Alors (X,d) a aussi la propriété de Bolzano–Weierstrass.

Démonstration. On va en fait établir la contraposée de cette implication ; supposons qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de X qui n'admet pas de sous-suite convergente.
Notons $A = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$; alors on a vu à l'exercice 2.73 que

$$\overline{A} = A \cup \{y \colon y \text{ est une valeur d'adhérence de } (x_n)\}$$

(Cela vient du fait que toute suite d'éléments de A admet une sous-suite qui est soit constante soit une sous-suite de (x_n))
Donc dans notre cas $A = \overline{A}$ est fermé. Par ailleurs, pour tout $i \in \mathbb{N}$ il doit exister un ouvert U_i tel que $x_i \in U_i$, et un entier N_i tel que x_n n'appartienne pas à U_i pour $n \geq N_i$ (sans quoi, x_i serait une valeur d'adhérence de (x_n)). Notons qu'alors

$$A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{x_i\} \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$$

Considérons alors $V = X \setminus A$. Puisque V est ouvert, et $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille d'ouverts dont la réunion contient A, la famille $(V,(U_i)_{i\in\mathbb{N}})$ est un recouvrement ouvert de X.
Toute sous-famille finie de ce recouvrement est contenue dans une famille de la forme $(V,(U_i)_{i\leq M})$; en notant

$$N = \max(N_i \colon i \leq M)$$

on voit que pour tout $n \geq N$ on a à la fois $x_n \notin V$ et $x_n \notin U_i$ pour tout $i \leq M$.
Par conséquent, cette famille ne peut être un sous-recouvrement fini : on a construit un recouvrement ouvert sans sous-recouvrement fini, donc (X,d) n'a pas la propriété de Borel–Lebesgue.

□

Définition 4.12
Soit (X, d) un espace métrique. On dit que (X, d) est *compact* s'il satisfait une des conditions équivalentes suivantes :

- (X, d) a la propriété de Borel–Lebesgue : de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement fini.
- (X, d) a la propriété de Bolzano–Weierstrass : toute suite d'éléments de X admet une sous-suite convergente.

Pour clore cette section, mentionnons une autre propriété équivalente à la propriété de Borel-Lebesgue (obtenue par passage au complémentaire).

Définition 4.13
Soit (X, d) un espace métrique, et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de (X, d). Cette famille a la *propriété d'intersection finie* s'il est vrai que pour tout $J \subset I$ fini on a $\bigcap_{j \in J} F_j \neq \emptyset$.

Théorème 4.14
Soit (X, d) un espace métrique. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. (X, d) a la propriété de Borel–Lebesgue.
2. Pour toute famille $(F_i)_{i \in I}$ de fermés de X avec la propriété d'intersection finie, $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.

Démonstration. Supposons que (X, d) a la propriété de Borel–Lebesgue, et soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés avec la propriété d'intersection finie.
Notons $U_i = X \setminus F_i$; chaque U_i est ouvert et pour tout $J \subseteq I$ fini on a

$$X \setminus \bigcup_{j \in J} U_j = \bigcap_{j \in J} (X \setminus U_j) = \bigcap_{j \in J} F_j \neq \emptyset$$

Par conséquent, $(U_i)_{i \in I}$ n'admet pas de sous-recouvrement fini, et ne peut donc être un recouvrement puisque (X, d) satisfait la propriété de Borel–Lebesgue.
Donc $\bigcup_{i \in I} U_i \neq X$, autrement dit $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.
La réciproque se montre exactement de la même façon et est laissée en exercice (en fait, notre raisonnement a établi qu'une famille de fermés est d'intersection vide si, et seulement si, la famille formée par les complémentaires de ces fermés est un recouvrement ouvert de (X, d), ce qui permet d'établir directement l'équivalence entre les propriétés considérées ici). $\square$

4.2 Quelques grands théorèmes sur la compacité

Dans cette section, on va systématiquement voir deux démonstrations des théorèmes énoncés : l'une en utilisant la caractérisation séquentielle, l'autre en se basant sur la propriété de Borel–Lebesgue. En L3 le plus important est de bien comprendre les arguments utilisant des suites extraites.
Commençons par un exemple fondamental d'espace métrique compact.

Théorème 4.15
Soit (X,d) un espace métrique, et (x_n) une suite d'éléments de X qui converge vers $x \in X$. Notons $A = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$. Alors (A,d) est compact.

Démonstration par les suites. Soit (a_n) une suite d'éléments de A.
Si (a_n) prend une infinité de fois la même valeur, elle admet une sous-suite constante, et en particulier une sous-suite convergente. On a donc seulement besoin de traiter le cas où chaque valeur n'est prise qu'un nombre fini de fois.
Supposons être dans ce cas ; nous allons construire une application strictement croissante $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout n on ait $a_{\varphi(n)} \in \{x_i \colon i \geq n\} \cup \{x\}$.
Procédons par récurrence : pour $n = 0$ on peut poser $\varphi(0) = 0$; supposons $\varphi(0) < \ldots < \varphi(n)$ construits.
Puisque $\{i \colon \exists j \leq n \ a_i = x_j\}$ est fini, il existe $m > \varphi(n)$ tel que $a_m \neq x_j$ pour tout $j \leq n$. On peut alors poser $\varphi(n+1) = m$.
Montrons maintenant que $(a_{\varphi(n)})$ converge vers x.
Fixons $\varepsilon > 0$ et trouvons $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.
Puisque $a_{\varphi(n)} \in \{x_i \colon i \geq N\} \cup \{x\}$ pour tout $n \geq N$, on a aussi $d(a_{\varphi(n)}, x) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.
On a ainsi montré que toute suite d'éléments de A admet une sous-suite constante (donc convergente) ou une sous-suite qui converge vers x ; dans tous les cas il s'agit d'une sous-suite convergente, par conséquent (A,d) est compact. $\square$

Démonstration par Borel-Lebesgue. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de A.
Il existe $j \in I$ tel que $x \in U_j$. Comme (x_n) converge vers x et U_j est ouvert, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in U_j$ pour tout $n \geq N$.
Puisque les U_i recouvrent A, il existe pour tout $n \leq N$ un indice $i_n \in I$ tel que $x_n \in U_{i_n}$.
Alors
$$(U_{i_0}, \ldots, U_{i_N}, U_j)$$
est un sous-recouvrement fini de $(U_i)_{i\in I}$. $\square$

Théorème 4.16
Soit (X,d) un espace métrique, et A un sous-ensemble compact de X (c'est-à-dire que (A,d) est compact). Alors A est fermé dans X.

Démonstration par les suites. Soit (x_n) une suite d'éléments de A qui converge vers $x \in X$; on doit prouver que $x \in A$.
Comme A est compact, il existe une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers $a \in A$; et (x_{n_k}) converge aussi vers x puisque c'est une suite extraite d'une suite qui converge vers x.
Par unicité de la limite, $x = a \in A$.
$\square$

Démonstration par Borel-Lebesgue. On va montrer que $X \setminus A$ est ouvert. Pour cela, fixons $y \in X \setminus A$.
Pour tout $a \in A$ il existe des ouverts disjoints U_a, V_a tels que $a \in U_a$ et $y \in V_a$.
Alors la famille (U_a) forme un recouvrement ouvert de A, elle admet donc un sous-recouvrement fini $(U_{a_1}, \ldots, U_{a_n})$.

Pour tout $a \in A$, il existe i tel que $a \in U_{a_i}$, par conséquent $a \notin V_{a_i}$ puisque U_{a_i} et V_{a_i} sont disjoints.
Il suit que $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}$ est un ouvert qui contient y et est contenu dans $X \setminus A$.
On vient de montrer que $X \setminus A$ est ouvert, donc que A est fermé. □

Réciproquement, on a le résultat suivant.

☆ Théorème 4.17
Soit (X, d) un espace métrique compact et A une partie fermée de X. Alors (A, d) est un espace métrique compact.

Démonstration par les suites. Soit (a_n) une suite d'éléments de A.
Comme X est compact et (a_n) est aussi une suite d'éléments de X, il existe une sous-suite (a_{n_k}) qui converge vers $x \in X$; comme A est fermé, $x \in A$, ce qui montre que (a_n) a une sous-suite convergente dans A : (A, d) est compact. □

Démonstration par Borel-Lebesgue. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de A.
Pour tout $i \in I$ il existe un ouvert O_i de X tel que $U_i = A \cap O_i$.
Comme $X \setminus A$ est ouvert, la famille $(X \setminus A, (O_i)_{i \in I})$ est un recouvrement ouvert de X, qui admet un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire qu'on peut trouver $J \subset I$ fini et tel que

$$X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{i \in J} O_i$$

On a alors

$$A = X \cap A = \bigcup_{i \in J} (O_i \cap A) = \bigcup_{i \in J} U_i$$

On vient de trouver un sous-recouvrement ouvert de $(U_i)_{i \in I}$, ce qui conclut. □

☆ Corollaire 4.18
Soit (X, d) un espace métrique, et $(K_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles compacts de X. Alors

$$K = \bigcap_{i \in I} K_i$$

est compact.

Démonstration. Fixons $i_0 \in I$. Chaque $K_i \cap K_{i_0}$ est fermé dans K_{i_0}, donc leur intersection est un fermé de K_{i_0}.
Par conséquent K est fermé dans K_{i_0}, donc K est compact puisqu'un fermé d'un compact est compact. □

La réunion d'une famille quelconque de compacts n'est pas nécessairement un compact : par exemple, chaque $\{x\}$ est un compact pour $x \in \mathbb{R}$, mais $\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\} = \mathbb{R}$ n'est pas compact.

☆ Théorème 4.19

Soit (X, d) un espace métrique, $p \in \mathbb{N}^*$ et $K_1, \dots, K_p$ des compacts de (X, d). Alors

$$K = \bigcup_{j=1}^{p} K_j$$

est compact.

Démonstration par les suites. Soit (x_n) une suite d'éléments de K.
Par le principe des tiroirs, il existe une fonction $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et $j \in \{1, \dots, p\}$ tels que $x_{\varphi(n)} \in K_j$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Comme K_j est compact, on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi(\psi(n))})$ qui converge vers $x \in K_j$.
Puisque $K_j \subseteq K$, on vient de montrer que (x_n) admet une sous-suite qui converge vers un élément de K : K est compact. □

Démonstration par Borel-Lebesgue. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de K.
Alors pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$ la famille $(U_i \cap K_j)$ est un recouvrement ouvert de K_j, et admet donc un sous-recouvrement ouvert, de la forme $(U_i \cap K_j)_{i \in I_j}$, où I_j est un sous-ensemble fini de I.
Alors $J = \bigcup_{j=1}^{p} I_j$ est un ensemble fini, et $(U_i)_{i \in J}$ est un recouvrement de K. □

La compacité est importante pour nous en particulier parce que les fonctions continues sur les espaces compacts ont des propriétés très fortes.

☆ Théorème 4.20

Soit (X, d_X) un espace métrique compact, (Y, d_Y) un espace métrique, et $f \colon X \to Y$ une fonction continue. Alors $f(X)$ est un sous-ensemble compact de Y.

Démonstration par les suites. Soit (y_n) une suite d'éléments de $f(X)$.
Pour tout n on peut choisir x_n tel que $f(x_n) = y_n$, et ensuite on peut extraire une sous-suite convergente (x_{n_k}) de la suite (x_n). Appelons x sa limite.
Par continuité de f, la suite $(y_{n_k}) = (f(x_{n_k}))$ converge vers $y = f(x)$.
□

Démonstration par Borel-Lebesgue. Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $f(X)$.
Alors $(f^{-1}(O_i))_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de X ; on en trouve un sous-recouvrement fini, de la forme $(f^{-1}(O_i))_{i \in J}$. On a

$$f(X) = f\left(\bigcup_{i \in J} f^{-1}(O_i)\right) = \bigcup_{i \in J} f(f^{-1}(O_i)) \subseteq \bigcup_{i \in J} O_i$$

Donc $(O_i)_{i \in J}$ est un sous-recouvrement fini de $(O_i)_{i \in I}$, ce qui prouve que $f(X)$ est compact. □

Théorème 4.21 (Théorème de la borne atteinte)
Soit (X,d) un espace métrique compact, et $f\colon (X,d) \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration par les suites. On note M la borne supérieure de l'image de f, dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Par caractérisation d'une borne supérieure, il existe une suite (x_n) d'éléments de X telle que $(f(x_n))$ tend vers M (ici on autorise $f(x_n)$ à tendre vers $+\infty$, avec la définition habituelle : on ne sait pas a priori que M est fini).
Comme (X,d) est compact on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers x.
Puisque f est continue, $(f(x_{\varphi(n)}))$ converge vers $f(x)$; d'autre part $(f(x_{\varphi(n)}))$ converge vers M puisque c'est une suite extraite de $(f(x_n))$.
Par conséquent on obtient $f(x) = M$, ce qui montre à la fois que M est fini (donc f est majorée) et atteint en x.
Le cas de la borne inférieure se démontre de la même façon (ou se déduit en appliquant ce qu'on vient de montrer à $-f$). □

Démonstration par Borel-Lebesgue. On considère à nouveau la borne supérieure M de l'image de f ; c'est un élément de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Si M est fini on pose $F_n = [M - \dfrac{1}{n}, +\infty[$, si $M = +\infty$ on pose $F_n = [n, +\infty[$.
Dans tous les cas, F_n est fermé, et $f^{-1}(F_n)$ est non vide par définition d'une borne supérieure.
Comme chaque $f^{-1}(F_n)$ est non vide et $f^{-1}(F_{n+1}) \subseteq f^{-1}(F_n)$ pour tout n, la famille $(f^{-1}(F_n))$ a la propriété d'intersection finie.
Par compacité (voir le théorème 4.14), il existe

$$x \in \bigcap f^{-1}(F_n) = f^{-1}\left(\bigcap F_n\right)$$

On a alors $f(x) \geq M$, ce qui prouve à la fois que M est fini et que $f(x) = M$.
Le cas de la borne inférieure se déduit de ce qu'on vient de faire, comme expliqué plus haut. □

Définition 4.22
Soit (X,d) un espace métrique compact, et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On note $C(X,\mathbb{K})$ l'espace des fonctions continues de X vers $\mathbb{K}$.
Pour $f \in C(X,\mathbb{K})$ on pose

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| \colon x \in X\}$$

On utilise aussi la notation $C(X)$ pour parler de $C(X,\mathbb{R})$.

Théorème 4.23
Soit (X,d) un espace métrique compact et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Alors $(C(X,\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.

Démonstration. Soit $f \in C(X, \mathbb{K})$. On a $\|f\|_\infty = 0$ si, et seulement si, $|f(x)| = 0$ pour tout $x \in X$, c'est-à-dire si et seulement si $f = 0$.
Il est clair que $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.
Reste à vérifier l'inégalité triangulaire : soit $f, g \in C(X, \mathbb{K})$.
Pour tout $x \in X$ on a

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

On a donc aussi

$$\|f + g\|_\infty = \max\{|f(x) + g(x)| : x \in X\} \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

□

☆ Théorème 4.24 (Théorème de Heine)
Soit (X, d_X) un espace métrique compact, (Y, d_Y) un espace métrique, et $f : X \to Y$ une fonction continue. Alors f est uniformément continue.

Démonstration par les suites. On va montrer la contraposée : si f n'est pas uniformément continue, alors f n'est pas continue.
Supposons donc que f ne soit pas uniformément continue, c'est-à-dire qu'il est faux que

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, x' \in X \; d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

Autrement dit, notre hypothèse est que

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x, x' \in X \; d_X(x, x') < \delta \text{ et } d_Y(f(x), f(x')) \geq \varepsilon$$

Fixons $\varepsilon > 0$ comme ci-dessus. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on sait qu'il existe x_n, x'_n tels que

$$d_X(x_n, x'_n) < \frac{1}{n} \text{ et } d_Y(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon$$

Puisque X est compact, on peut extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$ de la suite (x_n), de limite $x \in X$. De même, on peut extraire une sous-suite convergente $(x'_{\varphi(\psi(n))}$ de la suite $(x_{\varphi(n)})$, de limite x'.
Notons $\tau = \varphi \circ \psi$; alors $(x_{\tau(n)})$ converge vers x, et $(x'_{\tau(n)})$ converge vers x'. Par construction, on a pour tout n

$$d_X(x_{\tau(n)}, x'_{\tau(n)}) \leq \frac{1}{\tau(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc $x = x'$.
Mais on a aussi $d_Y(f(x_{\tau(n)}), f(x'_{\tau(n)})) \geq \varepsilon$ pour tout k : il est impossible que les deux suites $f(x_{\tau(n)})$ et $f(x'_{\tau(n)})$ convergent vers $f(x)$, par conséquent f n'est pas continue en x.

□

Démonstration par Borel-Lebesgue. Fixons $\varepsilon > 0$.
Pour tout $x \in X$ il existe (puisque f est continue) $\delta_x > 0$ tel que pour tout $y \in B(x, \delta_x)$ on ait $d_Y(f(y), f(x)) \leq \varepsilon$.
Puisque les boules $B\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right)$ recouvrent X, on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Notons $\left(B\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right)\right)_{i=1,\dots,n}$ les éléments de ce recouvrement.
Définissons

$$\delta = \min\left\{\frac{\delta_{x_i}}{2} : i = 1, \dots, n\right\} > 0$$

et considérons x, x' tels que $d_X(x, x') < \delta$.
Il existe i tel que $x \in B\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right)$, et alors l'inégalité triangulaire nous assure qu'on a aussi

$$d_X(x_i, x') \leq d_X(x_i, x) + d(x, x') < \frac{\delta_{x_i}}{2} + \delta \leq \delta_{x_i}$$

On a donc à la fois $d_Y(f(x_i), f(x)) < \varepsilon$ et $d_Y(f(x_i), f(x')) < \varepsilon$, donc $d_Y(f(x), f(x')) < 2\varepsilon$.
On vient de montrer que pour tout x, y tels que $d_X(x, y) < \delta$ on a $d_Y(f(x), f(y)) < 2\varepsilon$: f est uniformément continue.

□

Définition 4.25
Soit (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques. Une fonction $f \colon X \to Y$ est un *homéomorphisme* si f est une bijection telle que les fonctions f et f^{-1} soient continues.

Théorème 4.26
Soit (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques compacts, et $f \colon X \to Y$ une bijection continue. Alors f^{-1} est nécessairement continue, autrement dit, f est un homéomorphisme.

Démonstration. On doit montrer que la fonction $g = f^{-1}$ est continue.
Soit F un fermé de X ; il nous suffit de montrer que $g^{-1}(F)$ est fermé dans Y.
Pour cela, notons que $g^{-1}(F) = \{y \in Y : g(y) \in F\} = \{y \in Y : f^{-1}(y) \in F\} = f(F)$.
D'après le théorème 4.20, $f(F)$ est compact ; comme les compacts sont fermés, on en déduit bien que $g^{-1}(F) = f(F)$ est fermé, ce qu'il fallait démontrer. □

4.3 Produits finis d'espaces compacts

Théorème 4.27
Soit (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques compacts. Alors $X \times Y$, muni de la distance produit d_∞, est encore un espace métrique compact.

Par récurrence, on en déduit que tout produit fini d'espaces métriques compacts est compact.

Remarque 4.28
Ci-dessus, au lieu d'utiliser la distance produit d_∞, on aurait aussi pu utiliser d_1, ou toute autre distance équivalente.

Démonstration par les suites. Soit (x_n, y_n) une suite d'éléments de $X \times Y$.
Par compacité de (X, d_X), on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi_1(k)})$ qui converge vers $x \in X$.
Puis, par compacité de (Y, d_Y), on peut extraire de $(y_{\varphi_1(k)})$ (i) une nouvelle sous-suite $(y_{\varphi_1(\varphi_2(l))})$ qui converge vers $y \in Y$.
Notons $\psi = \varphi_1 \circ \varphi_2$. Alors la suite $(x_{\psi(l)}, y_{\psi(l)})$ est telle que $x_{\psi(l)}$ converge vers x et $y_{\psi(l)}$ converge vers y, autrement dit, cette suite est une suite extraite de (x_n, y_n) qui converge vers (x, y). $\square$

Démonstration par Borel-Lebesgue. Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $X \times Y$.
Comme les ouverts de la forme $U \times V$ forment une base de la topologie produit, on peut supposer que chaque O_i est de la forme $U_i \times V_i$, où U_i et V_i sont ouverts dans X, Y respectivement.
Commençons par fixer $x \in X$. Pour tout i,

$$V_{i,x} = \{y \colon (x, y) \in O_i\} = \bigcup_{i \colon x \in U_i} V_i$$

est un ouvert de Y, de plus pour tout y il existe $i(x, y)$ tel que $(x, y) \in O_{i(x,y)}$.
Donc les ouverts $V_{i,x}$ recouvrent Y, et on peut en extraire un sous-recouvrement fini puisque (Y, d_Y) est compact.
On a donc trouvé un sous-ensemble fini I_x de I tel que

$$Y = \bigcup_{i \in I_x} \{y \colon (x, y) \in O_i\}$$

On vient de montrer que les parties

$$W_J = \left\{ x \in X \colon \bigcup_{i \in J} \{y \colon (x, y) \in O_i\} = Y \right\}$$

(où J est une partie finie de I, et $x \in U_i$ pour tout $i \in J$) recouvrent X.
De plus, chaque W_J est ouvert : en effet, si $x \in W_J$, $W = \bigcap_{i \in J} U_i$ est un ouvert qui contient x, et puisque $\bigcup_{i \in J} V_i = Y$ on voit que tout élément de W appartient à W_J.
Par compacité de X, on peut recouvrir X par un ensemble fini d'ouverts $W_{J_1}, \dots, W_{J_n}$.
Posons $K = \bigcup_{i=1}^{n} J_i$; alors K est fini et $\bigcup_{i=1}^{n} W_{J_i} \subseteq W_K$ donc $W_K = X$.
Soit $(x, y) \in X \times Y$. On a vu que $x \in W_K$, donc il existe $i \in K$ tel que $(x, y) \in O_i$. On a enfin montré que $X \times Y = \bigcup_{i \in K} O_i$. $\square$

(i). Pourquoi n'extrait-on pas de (y_n) ?

Corollaire 4.29
Tout espace métrique compact (X, d) est borné, c'est-à-dire qu'il existe M tel que pour tout $x, x' \in X$ on ait $d(x, x') \leq M$.

Démonstration. On a déjà vu que la fonction $d\colon (X \times X, d_\infty) \to \mathbb{R}$ est continue.
Comme $(X \times X, d_\infty)$ est compact d'après la proposition précédente, le théorème de la borne atteinte nous assure que d est bornée, ce qui revient à dire que (X, d) est un espace métrique borné. $\square$

On retrouve ici le fait que l'image d'un compact par une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ est borné, puisque c'est un compact et que tout compact est borné.

4.4 Compacité en dimension finie

Un exemple fondamental d'espace compact est donné par un intervalle fermé borné (un *segment*) de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) ou, plus généralement n'importe quelle partie fermée bornée de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On va même voir au Théorème 4.35 qu'en fait les compacts de $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$), muni d'une norme quelconque, sont exactement ses parties fermées bornées.

Théorème 4.30
Toute partie fermée bornée de $\mathbb{R}$, en particulier tout segment, est compacte.

Démonstration. Considérons une suite (x_n) d'éléments d'une partie F fermée bornée de $\mathbb{R}$.
Par le lemme 2.24, il existe une suite extraite (x_{n_k}) qui est monotone. Comme cette sous-suite est bornée et monotone, elle converge dans $\mathbb{R}$. Sa limite est dans F car F est fermé. $\square$

Théorème 4.31
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Alors :

1. L'ensemble
$$\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$$
est un compact de $\mathbb{R}^n$ muni de la distance induite par $\|\cdot\|_\infty$.
2. Toute partie fermée et bornée de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est compacte.

Démonstration. Le premier point se déduit du fait que chaque $[a_i, b_i]$ est compact, et qu'un produit fini de compacts est compact (la norme $\|\cdot\|_\infty$ induit bien la topologie produit sur $\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$).

Passons au second point : soit F une partie fermée et bornée dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$.
Alors il existe M tel que F soit contenu dans le compact $[-M, M]^n$, donc F est fermé dans un compact : F est compact.

$\square$

Théorème 4.32
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Démonstration. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$.
On va montrer que N est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$; alors toutes les normes sont équivalentes à $\|\cdot\|_\infty$, donc elles sont toutes équivalentes entre elles.
Notons $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et $M = \max(\{N(e_i) : 1 \leq i \leq n\})$.
Alors on a, pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$:

$$\begin{array}{rcl} N(x) & = & N(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) \\ & \leq & N(x_1e_1) + \ldots + N(x_ne_n) \\ & \leq & |x_1|N(e_1) + \ldots + |x_n|N(e_n) \\ & \leq & M(|x_1| + \ldots + |x_n|) \\ & \leq & M.n.\|x\|_\infty \end{array}$$

Cela nous donne une des deux inégalités nécessaires pour montrer que N est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.
Cette inégalité implique aussi que $N : (\mathbb{R}^n, d_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est lipschitzienne et donc continue :

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^n \quad |N(x) - N(x')| \leq N(x - x') \leq Mn\|x - x'\|_\infty$$

On vient de voir que les fermés bornés de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ sont compacts ; par conséquent, l'ensemble

$$S = \{x \in [-1, 1]^n : \|x\|_\infty = 1\}$$

(la sphère unité pour $\|\cdot\|_\infty$) est compact.
Comme N est continue sur S, elle y atteint son minimum m ; notons que, comme $0 \not\in S$, $m > 0$.
Soit maintenant $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non nul ; le vecteur $\dfrac{x}{\|x\|_\infty}$ appartient à S, et on a donc

$$N(\frac{x}{\|x\|_\infty}) \geq m$$

Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$m\|x\|_\infty \leq N(x)$$

(cette inégalité est bien sûr aussi vraie pour $x = 0$), et on a fini de prouver que N et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes. $\square$

Théorème 4.33
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors toutes les normes sur $\mathbb{C}^n$ sont équivalentes.

Démonstration. Soit N_1, N_2 deux normes sur $\mathbb{C}^n$; on considère l'application $\Phi\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}^n$ définie par

$$\Phi(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n)$$

Alors Φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Pour $z \in \mathbb{R}^{2n}$, on pose

$$\|z\|_1 = N_1(\Phi(z)) \quad \text{et } \|z\|_2 = N_2(\Phi(z))$$

Alors $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont deux normes sur $\mathbb{R}^{2n}$, et sont donc équivalentes : il existe des constantes $m, M > 0$ telles que pour tout $z \in \mathbb{R}^{2n}$ on ait

$$mN_1(\Phi(z)) \leq N_2(\Phi(z)) \leq MN_1(\Phi(z))$$

Puisque Φ est surjective, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ on a aussi

$$mN_1(x) \leq N_2(x) \leq MN_1(x)$$

On vient de prouver que N_1 et N_2 sont équivalentes.

□

☆ Théorème 4.34

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n, m \in \mathbb{N}$ et $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ une application linéaire. Alors, pour toute norme N_1 sur $\mathbb{K}^n$ et toute norme N_2 sur $\mathbb{K}^m$ l'application f est continue de $(\mathbb{K}^n, N_1)$ vers $(B\mathbb{K}^m, N_2)$.

Démonstration. Comme toutes les normes sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes, il existe $r > 0$ tels que

$$r\forall x \in \mathbb{K}^n N_1(x) \geq \varepsilon \|x\|_\infty$$

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ on a

$$\begin{aligned}
N_2(f(x)) = & \qquad N_2\left(f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right)\right) \\
= & \qquad N_2\left(\sum_{i=1}^n x_i f(e_i)\right) \\
\leq & \qquad \sum_{i=1}^n |x_i||f(e_i)| \\
\leq & \qquad \|x\|_\infty \sum_{i=1}^n |f(e_i)| \\
\leq & \qquad N_1(x)\left(r\sum_{i=1}^n |f(e_i)|\right)
\end{aligned}$$

En posant $M = r\sum_{i=1}^n |f(e_i)|$, on vient de montrer que $N_2(f(x)) \leq rN_1(f(x))$ pour tout $x \in \mathbb{K}^n$; comme f est linéaire, cela prouve que f est continue de $(\mathbb{K}^n, N_1)$ vers $(B\mathbb{K}^m, N_2)$.

□

Théorème 4.35

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, N une norme sur $\mathbb{R}^n$, et A une partie de $\mathbb{R}^n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. A est compact dans $(\mathbb{R}^n, N)$
2. A est à la fois fermé et borné dans $(\mathbb{R}^n, N)$.

Démonstration. Commençons par montrer le résultat dans le cas particulier où $N = \|\cdot\|_\infty$.
On a déjà vu que si A est fermé et borné dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ alors A est compact.
Réciproquement, si A est compact, alors A est fermé dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ (les compacts sont toujours fermés) et A est borné dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ (les compacts sont toujours bornés).

Pour obtenir le résultat pour une norme quelconque, il suffit d'observer que deux normes équivalentes ont les mêmes parties fermées, les mêmes parties bornées, et les mêmes parties compactes ; et d'utiliser le fait que toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes. □

Exercice 4.36

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, N une norme sur $\mathbb{C}^n$ et A une partie de $\mathbb{C}^n$.
Montrer que A est compact dans $(\mathbb{C}^n, N)$ si, et seulement si, A est à la fois fermé et borné dans $(\mathbb{C}^n, N)$.

Théorème 4.37

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et N une norme sur E.
Alors $A \subseteq E$ est compact dans (E, N) si, et seulement si, A est à la fois fermé et borné dans (E, N).

Démonstration. En effet, il existe un entier n et un isomorphisme $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to E$; pour $x \in \mathbb{K}^n$ on pose

$$\|x\| = N(\varphi(x))$$

Alors $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$, et on a les équivalences suivantes, pour $A \subseteq (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$:

- A est borné dans $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|) \Leftrightarrow \varphi(A)$ est borné dans (E, N).
- A est fermé dans $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|) \Leftrightarrow \varphi(A)$ est fermé dans (E, N).
- A est compact dans $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|) \Leftrightarrow \varphi(A)$ est compact dans (E, N).

□

Théorème 4.38

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et F un sous-espace vectoriel de dimension finie. Alors F est fermé dans E.

Démonstration. Soit (f_i) une suite d'éléments de F qui converge vers $e \in E$.
Puisque (f_i) est convergente, elle est bornée.
Comme $(F, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, ses parties fermées bornées sont compactes donc (f_i) admet une suite extraite $(f_{\varphi(i)})$ qui converge vers $f \in F$.
Mais $(f_{\varphi(i)})$ converge aussi vers e, donc $e = f \in F$. On vient de montrer que F est fermé. □

Définition 4.39

Soit (X, d) un espace métrique, et $A \subseteq X$ une partie non vide. Pour $x \in X$ on pose

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \colon a \in A\}$$

Théorème 4.40

Soit (X, d) un espace métrique, et $A \subseteq X$ une partie non vide de X. Alors :

1. $x \mapsto d(x, A)$ est bien définie, et 1-lipschitzienne.
2. Pour tout $x \in X$ on a $d(x, A) = 0$ si, et seulement si, $x \in \overline{A}$.

Démonstration. Soit $x \in X$.
L'ensemble $\{d(x, a) \colon a \in A\}$ est un sous-ensemble non vide de $[0, +\infty[$, et admet donc une borne inférieure. Ceci montre que $d(x, A)$ est bien défini, et positif.
Pour vérifier que $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne, fixons $x, y \in X$. Alors on a pour tout $a \in A$

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

Donc aussi

$$\forall a \in A \quad d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a)$$

Donc $d(x, A) - d(x, y)$ est un minorant de $\{d(y, a) \colon a \in A\}$, ce dont on en déduit que

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$$

On vient d'établir l'inégalité

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$$

Comme x, y jouent des rôles symétriques dans le raisonnement, on a aussi

$$d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$$

et on a bien établi

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

Passons à la preuve du second point.
Si $d(x, A) = 0$ alors par caractérisation séquentielle d'un inf on peut trouver $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $d(x, a_n)$ tend vers 0, donc $x \in \overline{A}$.
Réciproquement, si $x \in \overline{A}$ alors il existe$(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $d(x, A) \leq d(x, a_n)$ donc $d(x, A) = 0$. □

On va maintenant établir la réciproque du théorème 4.35.

☆ Lemme 4.41

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé (sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$), F un sous-espace vectoriel fermé de E qui n'est pas E tout entier, et $r < 1$.
Alors il existe $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $d(x, F) > r$.

Démonstration. Soit $e \in E \setminus F$. Comme F est fermé, on a $d(e, F) > 0$, donc $d(e, F) < \frac{1}{r} d(e, F)$.
Par définition d'une borne inférieure, il existe $f \in F$ tel que

$$d(e, F) \leq d(e, f) \leq \frac{1}{r} d(e, F)$$

Considérons $x = \frac{e - f}{\|e - f\|}$ (on n'a pas divisé par 0, puisque $\|e - f\| \geq d(e, F) > 0$) ; soit $f' \in F$.
On a

$$\begin{aligned}
\|x - f'\| &= \left\| \frac{e - f}{\|e - f\|} - f' \right\| \\
&= \frac{\|e - f - \|e - f\| f'\|}{\|e - f\|} \\
&= \frac{\|e - (f + \|e - f\| f')\|}{\|e - f\|} \\
&\geq \frac{d(e, F)}{\|e - f\|} \qquad \text{puisque } f + \|x - f\| f' \in F \\
&\geq r \frac{d(e, F)}{d(e, F)} \\
&= r
\end{aligned}$$

Puisque f' est un élement quelconque de F, on en déduit que $d(x, F) \geq r$, comme attendu. □

☆ Théorème 4.42 (Théorème de Riesz)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé (sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$).
Alors E est de dimension finie si, et seulement si, $B_f(0, 1)$ est compacte.

Démonstration. On a déjà établi une des implications ; supposons donc E de dimension infinie.
Le lemme précédent nous permet de construire, par récurrence, une suite (x_n) d'éléments de E tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{et} \quad d\left(x_n, \text{Vect}\{x_i \colon i < n\}\right) \geq \frac{1}{2}$$

(pour trouver x_n, il suffit d'appliquer le lemme à $r = \frac{1}{2}$ et $F = \text{Vect}\{x_i \colon i < n\}$, qui est de dimension finie et est donc à la fois fermé et différent de E).
On doit en particulier avoir $d(x_i, x_j) \geq \frac{1}{2}$ pour tout $i \neq j$, ce qui montre que (x_n) n'admet pas de sous-suite convergente.
Puisque $\|x_n\| = 1$ pour tout i, on vient de montrer que $B_f(0, 1)$ n'est pas compacte. □

Remarque 4.43
En fait, la preuve montre que E est de dimension finie si, et seulement si, la sphère unité de E (pour une norme quelconque sur E) est compacte.

4.5 Produits dénombrables d'espaces métriques compacts

Lemme 4.44
Soit (X_i, d_i) une suite d'espaces métriques. On note

$$X = \prod_{i=0}^{\infty} X_i$$

Pour $x = (x(i)),\ y = (y(i)) \in X$ on définit

$$d(x, y) = \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-i} \min(1, d_i(x(i), y(i)))$$

Alors d est une distance sur X, qu'on appellera *distance produit*.

Démonstration. Puisque $\min(1, d)$ est une distance (topologiquement équivalente à d) dès que d est une distance, on peut supposer que chaque (X_i, d_i) est bornée par 1 et qu'on a la formule plus simple $d(x, y) = \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-i} d_i(x(i), y(i))$ pour tout $x, y \in X$.

Notons que d est bien définie, et $d(x, y) \leq 2$ pour tout $x, y \in X$ puisque $\sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-i} = 2$.

Soit $x, y \in X$. Alors on a

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall i \in \mathbb{N}\ d_n(x(i), y(i)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall i \in \mathbb{N}\ x(i) = y(i) \\ &\Leftrightarrow \quad x = y \end{aligned}$$

On vient de montrer que d satisfait l'axiome de séparation ; la symétrie est immédiate puisque chaque d_n est symétrique .
Reste à établir l'inégalité triangulaire. Soit $x, y, z \in X$.
Alors on a pour tout $i \in \mathbb{N}$ que

$$2^{-i} d_i(x(i), y(i)) + 2^{-i} d_i(y(i), z(i)) \geq 2^{-i} d_i(x(i), z(i))$$

En sommant ces inégalités, on obtient $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$. □

Le choix de distance n'est pas particulièrement important, c'est la topologie associée à cette distance qui compte ici (et on l'appelle, sans surprise, topologie produit).

☆ Théorème 4.45

Soit (X_i, d_i) une suite d'espaces métriques, et $X = \prod_{i=0}^{\infty} X_i$ muni de la distance produit d.

Soit (x_n) une suite d'éléments de X, et $x \in X$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. La suite (x_n) converge vers x
2. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, la suite $(x_n(i))$ converge vers $x(i)$ dans (X_i, d_i).

On voit avec cet énoncé que, si chaque (d_i) est remplacée par une distance δ_i qui lui est topologiquement équivalente, les distances produit obtenues ont les mêmes suites convergentes, et sont donc aussi topologiquement équivalentes.

Démonstration. Supposons que (x_n) converge vers x, et fixons $i \in \mathbb{N}$ puis $\varepsilon > 0$.
Quitte à réduire ε, on peut supposer que $2^{-i}\varepsilon < 1$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x) \leq 2^{-i}\varepsilon$ pour tout $n \geq N$, ce qui n'est possible que si $d_i(x_n(i), x(i)) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.
Autrement dit, $(x_n(i))$ converge vers $x(i)$.

Réciproquement, supposons que chaque suite $(x_n(i))$ converge vers $x(i)$, et fixons $\varepsilon > 0$.
Il existe I tel que $\sum_{i=I+1}^{+\infty} 2^{-i} \leq \varepsilon$; de plus, la suite $\sum_{i=0}^{I} d_i(x_n(i), x(i))$ converge vers 0 puisqu'elle s'écrit comme une somme finie de suites qui convergent vers 0. Par conséquent, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{i=0}^{I} d_i(x_n(i), x(i)) \leq \varepsilon$$

pour tout $n \geq N$.
On a alors $d(x_n, x) \leq 2\varepsilon$ pour tout $n \geq N$, ce qui montre que (x_n) converge vers x. □

☆ Théorème 4.46

Soit $(X_i, d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques compacts, et

$$X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$$

muni de la distance produit d.
Alors (X, d) est un espace métrique compact.

Démonstration. Soit (x_n) une suite d'éléments de X.
Puisque X_0 est compact, il existe une application strictement croissante $\varphi_0 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(x_{\varphi_0(n)}(0))$ converge vers $x(0) \in X_0$. On construit de même φ_1 telle que $(x_{\varphi_0(\varphi_1(n))}(1))$ converge vers $x(1) \in X_1$; par récurrence, on peut ainsi construire des applications $\varphi_i \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes, et telles que pour tout i la suite

$$(x_{\varphi_0(\ldots(\varphi_i(n)))}(i))$$

converge vers un élément de X_i qu'on note $x(i)$.

Définissons $\psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par $\psi(n) = \varphi_0(\dots(\varphi_n(n)))$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}
\psi(n+1) &= \varphi_0(\dots(\varphi_n(\varphi_{n+1}(n+1))) \\
&\geq \varphi_0(\dots(\varphi_n(n+1))) \\
&> \varphi_0(\dots(\varphi_n(n))) \\
&= \psi(n)
\end{aligned}$$

Donc ψ est strictement croissante.
De plus, pour tout i la suite $(x_{\psi(n)}(i))$ converge vers $x(i)$ puisque c'est une suite extraite de $(x_{\varphi_0(\dots(\varphi_i(n)))}(i))$, qui converge vers $x(i)$.
Par conséquent, $(x_{\psi(n)})$ est une sous-suite convergente de (x_n), ce qui montre que (X,d) est compact. $\square$

Le procédé qu'on a employé dans la preuve précédente s'appelle *méthode d'extraction diagonale*.
Dans l'immédiat, ce théorème ne nous sera pas utile ; mais il nous permettra plus tard d'établir le théorème d'Ascoli, lui-même utile (entre autres) pour établir un théorème important sur les équations différentielles, le théorème de Cauchy–Peano–Arzela.

Exercice 4.47

Soit (X_i, d_i) une suite d'espaces métriques et $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ muni de la distance produit d. Pour toute suite finie $\mathcal{U} = (U_0, \dots, U_n)$, où chaque U_i est ouvert dans (X_i, d_i) on note

$$O_{\mathcal{U}} = \{x \in X \colon \forall i \leq n \ x_i \in U_i\}$$

Montrer que chaque $O_{\mathcal{U}}$ est un ouvert de (X,d), et que ces ouverts forment une base de la topologie de (X,d).

Exercice 4.48

Soit (X_i, d_i) une suite d'espaces métriques et $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ muni de la distance produit d.
On suppose que chaque (X_i) est séparable. Montrer que (X,d) est séparable.

Exercice 4.49

Soit (X_i, d_i) une suite d'espaces métriques et $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ muni de la distance produit d.
Soit (Y, d_Y) un espace métrique et $f\colon Y \to X$ une fonction. Pour $y \in Y$ on note

$$f(y) = (f_i(y))_{i \in \mathbb{N}}$$

Montrer que f est continue si, et seulement si, chaque application f_i est continue.

4.6 Le cube de Hilbert

Cette section ainsi que la suivante sont **hors-programme**.

Définition 4.50
Le *cube de Hilbert* est l'espace $[0,1]^{\mathbb{N}}$, muni de la distance produit.

Le cube de Hilbert est un produit dénombrable d'espaces métriques compacts, et est donc lui-même un espace métrique compact.

Lemme 4.51
Soit (X,d) un espace métrique compact. Alors (X,d) est séparable.

Démonstration. Puisque (X,d) est précompact, on peut trouver pour tout n un ensemble fini A_n tel que les boules ouvertes de rayon 2^{-n} centrées en un point de A_n recouvrent X. Alors

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

est au plus dénombrable en tant que réunion dénombrable d'ensembles finis.
Soit $\varepsilon > 0$, et n tel que $2^{-n} \leq \varepsilon$.
Alors, pour tout $x \in X$ il existe $a \in A_n$ tel que

$$d(x,a) < 2^{-n} \leq \varepsilon$$

ce qui prouve que A est dense.
On vient de produire un sous-ensemble au plus dénombrable dense de (X,d), qui est par conséquent séparable. □

Théorème 4.52
Soit (X,d) un espace métrique compact.
Alors il existe un fermé F du cube de Hilbert, et un homéomorphisme $g\colon X \to F$.

Autrement dit, le cube de Hilbert est un compact qui contient une "copie" (à homéomorphisme près) de chaque espace métrique compact.

Démonstration. Quitte à remplacer d par $\min(1,d)$, qui lui est équivalente, on peut supposer que d est à valeurs dans $[0,1]$.
Soit $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un sous-ensemble dénombrable dense de (X,d) (on sait que X est séparable ; on néglige le cas où X est fini, qui est immédiat).
Considérons l'application $g\colon X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ définie par

$$g(x)(i) = d(x,x_i)$$

Alors g est continue puisque chaque application $x \mapsto g(x)(i)$ est continue.

Donc $F = g(X)$ est compact et donc fermé dans $[0,1]^{\mathbb{N}}$; pour conclure, il nous reste à prouver que $g\colon X \to F$ est injective, puisqu'alors $g\colon X \to F$ sera une bijection continue d'un compact sur un autre, et donc un homéomorphisme.
Soit $x \neq y \in X$. Alors $\varepsilon = d(x,y) > 0$; par densité, il existe i tel que $d(x_i,x) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
L'inégalité triangulaire assure que

$$d(x_i,y) \geq d(x,y) - d(x,x_i) > \frac{\varepsilon}{2}$$

En particulier $d(x_i,x) < d(x_i,y)$, donc $g(x)(i) \neq g(y)(i)$ et aussi $g(x) \neq g(y)$.
Par conséquent g est bien injective. □

4.7 L'ensemble de Cantor

Cette section est hors programme. Elle se destine à des étudiant.e.s souhaitant approfondir les notions présentées dans le cours ; les preuves ne sont pas toujours complètement détaillées et nécessitent du travail de la part de la lectrice.

Définition 4.53
On appelle *ensemble de Cantor* l'espace $C = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, muni d'une distance produit.

Comme $\{0,1\}$ (muni de la distance discrète) est fini et donc compact, C est un espace compact.
En réalité, c'est la topologie de l'ensemble de Cantor qui nous intéresse vraiment ici ; une suite (x_n) d'éléments de C converge vers $x \in C$ si, et seulement si, $(x_n(i))$ converge vers $(x(i))$ pour tout i, autrement dit si et seulement si $x_n(i) = x(i)$ à partir d'un certain rang ($(x_n(i)$ et $x(i)$ appartiennent à l'espace $\{0,1\}$ muni de la distance discrète : les suites convergentes y sont stationnaires).
Pour $x \neq y \in C$, posons

$$n(x,y) = \min\{i \colon x(i) \neq y(i)\}$$

On s'en sert pour définir une distance sur $\{0,1\}^n$:

$$d(x,y) = \begin{cases} 2^{-n(x,y)} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est facile de voir que d est symétrique et satisfait l'axiome de séparation ; elle satisfait une version forte de l'inégalité triangulaire, appelée *inégalité ultramétrique* :

Théorème 4.54
Soit $x,y,z \in C$. On a alors

$$d(x,z) \leq \max(d(x,y), d(y,z))$$

Démonstration. Si $x = z$ il n'y a rien à montrer. Sinon, soit $n = n(x, z)$.
On ne peut pas avoir à la fois $y(n) = x(n)$ et $y(n) = z(n)$; autrement dit, on doit avoir $y(n) \neq x(n)$ et donc $n(x, y) \leq n$, ou $y(n) \neq z(n)$ et donc $n(y, z) \leq n$.
Par conséquent, $2^{-n(x,y)} \geq 2^{-n(x,z)}$ ou $2^{-n(y,z)} \geq 2^{-n(x,z)}$. □

L'inégalité ultramétrique ne correspond pas à notre intuition d'une distance : par exemple, soit x, y, z trois points distincts dans C, et supposons que $d(x, y)$ est la plus grande des trois distances entre ces éléments. Alors on a à la fois

$$d(x, y) \geq \max(d(x, z), d(y, z)) \quad \text{et} \quad d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(y, z))$$

(la deuxième inégalité vient de l'inégalité ultramétrique qu'on vient d'établir)
Donc $d(x, z)$ ou $d(y, z)$ doit être égale à $d(x, y)$. Ainsi, dans n'importe quel triangle, au moins deux des distances sont égales entre elles : dans un espace ultramétrique, tous les triangles sont isocèles !
Notons que $d(x, y) < 2^{-n}$ si, et seulement si, $x(i) = y(i)$ pour tout $i \leq n$; par conséquent, une suite (x_n) d'éléments de C converge vers $x \in C$ si, et seulement si, $(x_n(i))$ converge vers $x(i)$ pour tout i, autrement dit d induit la topologie produit.

Définition 4.55

Pour toute suite finie $s = (s_0, \ldots, s_k)$ d'éléments de $\{0, 1\}$, on note

$$N_s = \{x \in C \colon \forall i \leq k \; x(i) = s_i\}$$

Si x est n'importe quel élément de N_s, on a $N_s = B(x, 2^{-n})$: les N_s sont simplement les boules ouvertes (pour la distance d définie ci-dessus) dans C.
En particulier, les parties N_s forment une base de la topologie de C.
Dans la suite, on notera $\mathcal{S}$ l'ensemble formé par les suites finies d'éléments de $\{0, 1\}$; si $s = (s_0, \ldots, s_n)$ on note $|s| = n + 1$ et on l'appelle la *longueur* de s.
On s'autorisera à parler de la suite vide, de longueur 0, et on notera $N_\emptyset = C$.
Si $s = (s_0, \ldots, s_n)$ et $t = (s_0, \ldots, s_n, \varepsilon)$ on note $t = s \frown \varepsilon$.
Enfin, si $x \in C$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $x_{|n}$ la suite $(x(0), \ldots, x(n-1))$ (si $n = 0$, c'est la suite vide)

Théorème 4.56

Soit $s = (s_0, \ldots, s_k) \in \mathcal{S}$. Alors N_s est à la fois ouvert et fermé dans C.

Démonstration. On a déjà vu que N_s est ouvert (c'est une boule ouverte).
Notons E_k l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}$ de longueur $k + 1$; alors

$$N_s = C \setminus \bigcup_{t \in E_k,\ t \neq s} N_t$$

Ceci montre que N_s est fermé. □

☆ Théorème 4.57

Soit (X, d) un espace métrique, et $x \in X$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\{x\}$ est un ouvert de (X, d).

(ii) Il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) = \{x\}$.

(iii) Il existe un ouvert fini contenant x.

Un point satisfaisant les conditions équivalentes de l'énoncé ci-dessus est appelé un point *isolé*.

Démonstration. Si la première propriété est vérifiée, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq \{x\}$, et comme on a toujours $\{x\} \subseteq B(x, r)$ on doit avoir $\{x\} = B(x, r)$.

Comme $B(x, r)$ est ouvert, si $B(x, r) = \{x\}$ on a bien un ouvert fini qui contient x.

Enfin, supposons que U soit un ouvert fini contenant x ; on peut écrire $U = \{x, u_1, \ldots, u_n\}$.
Soit $r > 0$ tel que $d(x, u_i) < r$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Alors $B(x, r) \cap U = \{x\}$, donc $\{x\}$ est ouvert. $\square$

Définition 4.58

Un espace métrique (X, d) est *parfait* s'il n'a pas de point isolé.

L'ensemble de Cantor C, muni de la distance définie plus haut, est compact, parfait, et sa topologie admet une base constituée de parties à la fois ouvertes et fermées (les U_s). On va maintenant montrer que ces propriétés caractérisent C.

☆ Théorème 4.59

Soit (X, d_X) un espace métrique compact, parfait, dont la topologie admet une base constituée de parties à la fois ouvertes et fermées.
Alors (X, d) est homéomorphe à l'ensemble de Cantor.

Démonstration. Supposons que (X, d_X) satisfait les hypothèses ci-dessus. On commence par établir un lemme.

☆ Lemme 4.60

Soit U une partie ouverte et fermée non vide de (X, d_X), et $\varepsilon > 0$.
Alors il existe $n \geq 2$ et des parties non vides $U_1, \ldots, U_n$ de (X, d) tels que

- Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ le diamètre de (U_k) est plus petit que ε.
- Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ on a $U_k \subset U$.
- On a $U = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} U_k$.

Démonstration du lemme. Comme U est fermé dans (X, d), il est compact.
De plus, puisque U est ouvert, c'est une réunion de boules $B(x_i, r)$ avec $r < \varepsilon$; quitte à réduire ε, on peut supposer que ces boules ne sont pas égales à U (il suffit de prendre ε strictement plus petit que le diamètre de U, qui est > 0 puisque U est infini).
Chacune de ces boules est une réunion de parties à la fois ouvertes et fermées. Par conséquent, il existe un ensemble I, et des parties (V_i) à la fois ouvertes et fermées, de diamètre plus petit que ε, telles que $V_i \neq U$ pour tout i, et

$$U = \bigcup_{i \in I} V_i$$

Par compacité de U, on peut extraire un sous-recouvrement fini du recouvrement ouvert $(V_i)_{i \in I}$, et obtenir $i_1, \ldots, i_n \in I$ tels que

$$U = \bigcup_{k=1}^{n} V_{i_k}$$

Notons que n est nécessairement plus grand que 2 puisqu'aucun V_i ne peut être égal à U.
En posant $U_k = V_{i_k}$, toutes les conditions du lemme sont satisfaites. ■

À l'aide de ce lemme, on va construire une famille de parties $(U_s)_{s \in \mathcal{S}}$ non vides, à la fois ouvertes et fermées, et telles que

- $U_\emptyset = X$
- Pour tout s, $U_s = U_{s \frown 0} \cup U_{s \frown 1}$ et $U_{s \frown 0} \cap U_{s \frown 1} = \emptyset$;
- le diamètre de (U_s) tend vers 0 quand $|s|$ tend vers $+\infty$

Admettons temporairement que cela soit possible ; alors, pour tout $\alpha \in C$ on peut considérer

$$K_\alpha = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_{\alpha_{|n}}$$

K_α est non vide puisque c'est une intersection décroissante de compacts non vides ; et de diamètre 0 puisque les diamètre de $U_{\alpha_{|n}}$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On peut alors noter

$$K_\alpha = \{f(\alpha)\}$$

Le fait que les diamètres des (U_s) tendent vers 0 quand $|s|$ tend vers $+\infty$ assure que f est continue.
La fonction f est injective parce que, si $\alpha \neq \beta$ et $n = n(\alpha, \beta)$ alors α est de la forme $s \frown \varepsilon \frown \alpha'$, y de la forme $s \frown \varepsilon' \frown \beta'$ (où $\varepsilon' = 1 - \varepsilon$). Alors

$$f(\alpha) \in U_{s \frown \varepsilon} \quad \text{et} \quad f(\beta) \in U_{s \frown \varepsilon'}$$

Comme ces deux ouverts sont disjoints, $f(\alpha) \neq f(\beta)$.
Reste à voir pourquoi f est surjective. Pour cela, fixons $x \in X$; par récurrence, on construit $\alpha \in C$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x \in U_{\alpha_{|n}}$$

Pour cela, on choisit $\alpha(0)$ tel que $x \in U_{\alpha(0)}$ (ce qui est possible puisque $U_0 \cup U_1 = X$), puis $\alpha(1)$ tel que $x \in U_{\alpha(0) \frown \alpha(1)}$ (ce qui est possible puisque $U_{\alpha(0)} = U_{\alpha(0) \frown 0} \cup U_{\alpha(0) \frown 1}$), et ainsi de suite.
Donc f est surjective ; finalement, f est bien un homéomorphisme de (C, d) sur (X, d_X).

Pour que la preuve soit complète, il nous faut expliquer comment construire les $(U_s)_{s \in \mathcal{S}}$; c'est une construction par récurrence, dont on va simplement expliquer l'initialisation ainsi que la première étape, les étapes suivantes consistant à répéter cette étape inductivement.

On pose $U_\emptyset = X$, qui peut s'écrire d'après le lemme ci-dessus sous la forme d'une union disjointe de parties (V_i) non vides à la fois ouvertes et fermées :

$$X = \bigcup_{i=0}^{n} V_i \text{ , diam}(V_i) \leq \frac{1}{2} \quad (n \geq 1)$$

Pour $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ on pose

$$U_{0^i \frown 1} = V_{i+1}$$

et

$$U_{0^{n-1}} = V_i$$

Ensuite on répète la construction en appliquant la même procédure à chacun des U_s qu'on vient de construire, mais cette fois en les découpant en parties à la fois ouvertes et fermées de diamètre plus petit que $\frac{1}{4}$, et on itère.

□

Notons que, si (A_i) est une suite d'ensembles finis de cardinal ≥ 2, munis de la distance discrète, alors $\prod A_i$ muni d'une distance produit satisfait les conditions du théorème ci-dessus et est donc homéomorphe à C (on dit que c'est "un" ensemble de Cantor).

Théorème 4.61

Il existe un homéomorphisme de C sur $C \times C$ et de C sur $C^{\mathbb{N}}$ (où $C \times C$ et $C^{\mathbb{N}}$ sont munis d'une distance produit) .

Démonstration. Il suffit de vérifier les propriétés du théorème précédent :

- $C \times C$ est compact puisque c'est un produit de deux compacts.
- Les parties de la forme $N_s \times N_t$ forment une base de la topologie de $C \times C$, et sont toutes infinies. Donc $C \times C$ n'a pas d'ouvert fini et donc pas de points isolés.
- Chaque $N_s \times N_t$ est un ouvert (produit de deux ouverts) et un fermé (produit de deux fermés) : donc la topologie de $C \times C$ admet une base constituée de parties à la fois ouvertes et fermées.

L'argument pour $C^{\mathbb{N}}$ est similaire, ou s'écrit, de manière un peu cryptique, sous la forme suivante :

$$C^{\mathbb{N}} = (\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N} \times N} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} = C$$

□

Définition 4.62

On définit une suite de fermés K_n de $[0, 1]$ de la façon suivante :

- $K_0 = [0, 1]$
- $K_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$
- Si K_n est construit et s'écrit

$$K_n = [0, a_0] \cup [a_1, a_2] \ldots \cup [a_m, 1]$$

avec $0 < a_0 < \ldots < a_m < 1$ alors on pose

$$K_{n+1} = [0, \frac{1}{3}a_0] \cup [\frac{2}{3}a_0, a_0] \cup \ldots \cup [a_m, a_m + \frac{1-a_m}{3}] \cup [a_m + 2\frac{1-a_m}{3}, 1]$$

On pose

$$K = \bigcap_{n=0}^{+\infty} K_n$$

Cet ensemble est appelé *ensemble triadique de Cantor*

Avec des mots : à chaque étape, on coupe chaque intervalle composant K_n en trois intervalles de même longueur, on enlève l'intervalle ouvert central, et on recommence.

Comme chaque K_n est compact, leur intersection $K = \bigcap_{n=0}^{+\infty} K_n$ est un compact.

Le dessin suivant représente les premières étapes de cette construction :

☆ Théorème 4.63

L'ensemble triadique K de Cantor est homéomorphe à l'ensemble de Cantor C.

Démonstration. Intuitivement : construire un élément de K correspond à choisir successivement si on est dans l'intervalle de gauche (=la valeur 0) ou l'intervalle de droite (=la valeur 1) à chaque étape de la construction. Cette suite de choix correspond à un élément unique de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Reprenons le dessin précédent, mais en ajoutant des 0 et des 1 pour expliquer ce qui se passe.

Pour formaliser cela, considérons l'application $f : C \to [0,1]$ définie par

$$f(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} 2\frac{x(i)}{3^i}$$

Alors f est continue, puisque si $d(x,y) < 2^{-n}$ alors

$$|f(x) - f(y)| \leq \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{2}{3^i} = \frac{1}{3^n}$$

En outre, f est injective ; en effet, si $x \neq y$ et $n(x,y)=n$, alors

$$|f(x)-f(y)| \geq \frac{2}{3^n} - \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{2}{3^i} = \frac{1}{3^n} > 0$$

Montrons que f est à valeurs dans K. Soit $x \in C$; la construction assure que pour tout n la somme finie

$$\sum_{i=0}^{n} 2\frac{x(i)}{3^i}$$

appartient à K. Comme $f(x)$ est la limite de ces sommes finies, et K est fermé, on obtient $f(x) \in K$.
Enfin, montrons que $f(C)=K$. Pour cela, fixons $y \in K$.
Si $y \in [0, \frac{1}{3}]$, on pose $x(0)=0$; sinon $x(0)=1$. Et on fait de même à chaque étape : si, à l'étape n, y est dans l'intervalle de gauche de la décomposition, on pose $x(n)=0$, sinon on pose $x(n)=1$ (i).
On vérifie alors par récurrence que pour tout n

$$\sum_{i=0}^{n} 2\frac{x(i)}{3^i} \leq y \leq \sum_{i=0}^{n} 2\frac{x(i)}{3^i} + \frac{1}{3^n}$$

On obtient comme attendu

$$y = \sum_{i=0}^{+\infty} 2\frac{x(i)}{3^i} = f(x)$$

Finalement, on a montré que f est une bijection continue de C sur K, donc un homéomorphisme puisque C et K sont compacts.

□

☆ Lemme 4.64
Soit $f\colon K \to [0,1]$ une fonction continue. Alors f s'étend en une fonction continue de $[0,1]$ sur $[0,1]$.

Ce lemme est en fait un cas (très) particulier d'un résultat général appelé *théorème d'extension de Tietze*.

Démonstration. Soit $x \notin K$.
Il existe deux points $a,b \in K$ tels que $]a,b[\cap K = \emptyset$ et $x \in]a,b[$; alors il existe $t \in]0,1[$ tel que $x = ta + (1-t)b$. On pose alors

$$\tilde{f}(x) = tf(a) + (1-t)f(b)$$

Si $x \in K$, on pose $\tilde{f}(x) = f(x)$.
Pour vérifier que $\tilde{f}$ est continue sur $[0,1]$, on doit distinguer deux cas ; par définition, pour tout $x \in [0,1] \setminus K$ il existe un ouvert U contenant x, contenu dans $[0,1] \setminus K$ et sur lequel $\tilde{f}$ est affine (l'intervalle $]a,b[$ ci-dessus) donc $\tilde{f}$ est continue en x.
Reste à traiter le cas où $x \in K$, qu'on va devoir diviser en deux sous-cas.

(i). Remarque : on considère dans notre énumération que la construction commence à l'étape 0.

Soit $\varepsilon > 0$, et $\delta < \varepsilon$ tel que pour tout $y \in K$ on ait

$$|x - y| \leq 2\delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Commençons par le cas où x est une extrémité d'un des intervalles qu'on enlève à $[0, 1]$ pour construire K ; par exemple (les cas sont symétriques) supposons que x en est l'extrémité de droite. Par construction, $\tilde{f}$ est continue à droite en x. Soit $z \leq x$ tel que $|z - x| < \delta$.
Si $z \in K$ on a

$$|\tilde{f}(z) - \tilde{f}(x)| = |f(z) - f(x)| \leq \varepsilon$$

par choix de δ.
Si $z \notin K$, il existe $a, b \in K$ tels que $z \in]a, b[$ et on doit avoir à la fois $|a - x| \leq 2\delta$ et $|b - x| \leq \delta$ (l'intervalle contenant z qu'on a enlevé à K doit être de longueur plus petite que δ).
Par conséquent, on a

$$|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |f(x) - f(b)| \leq \varepsilon$$

Puisque $\tilde{f}(z)$ appartient au segment d'extrémités $f(a), f(b)$ on a donc aussi

$$|\tilde{f}(z) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Donc $\tilde{f}$ est bien continue en x ; reste à traiter le cas où x n'est une extrémité d'aucun des intervalles enlevés à K_n.
On commence par trouver $\delta' > 0$ tel que $]x - \delta', x + \delta'[$ n'intersecte aucun de ces intervalles ayant une longueur $\geq \delta$. Puis on vérifie comme au paragraphe précédent que pour tout $z \in [0, 1]$ tel que $|z - x| \leq \delta'$ on a $|\tilde{f}(z) - \tilde{f}(x)| \leq \varepsilon$.

□

☆ Théorème 4.65

Soit F un fermé non vide de C. Alors il existe une fonction continue $r \colon C \to F$ telle que $r(x) = x$ pour tout $x \in F$ (on dit que r est une *rétraction* continue de C sur F).
En particulier, r est une surjection continue de C sur F.

Démonstration. Notons d'abord que, si $x \in C$ et $m \in \mathbb{N}$ sont tels qu'il existe $y \in F$ avec $x_{|m} = y_{|m}$ alors on a

$$d(x, F) < 2^{-m}$$

.
Comme F est fermé, $d(x, F) = 0$ est équivalent à $x \in F$; l'observation ci-dessus entraîne que si $x \notin F$ alors il existe un plus grand entier $m \geq 0$ tel qu'il existe un élément de F coïncidant avec x sur $0, \dots, m - 1$ (éventuellement, $m = 0$ si on a $y(0) \neq x(0)$ pour tout $y \in F$). On note cet entier $m(x)$.
Pour tout $s \in \mathcal{S}$ tel qu'il existe un élément de F prolongeant s, on choisit un tel $y_s \in F$.
Définissons maintenant $r \colon C \to F$ de la façon suivante : si $x \in F$, on pose $r(x) = x$. Sinon, on note $s = x_{|m(x)}$ et on pose $r(x) = y_s$.
Clairement, r est à valeurs dans F, et $r(x) = x$ pour tout $x \in F$. Reste à voir pourquoi r est continue.
Pour le montrer, considérons $x \in C$.

Si $x \notin F$ et $d(x,y) < 2^{-n}$, alors $m(y) = m(x)$ donc $r(y) = r(x)$: r est constante sur un petit ouvert contenant x, et est en particulier continue en x.
Si $x \in F$, alors pour tout y tel que $d(x,y) < 2^{-n}$ on a $m(y) \geq n$, donc $r(y)$ étend $y_{|n} = x_{|n}$ et $d(r(x), r(y)) < 2^{-n}$. Par conséquent r est continue en x.

□

☆ Théorème 4.66
Soit (X, d_X) un espace métrique compact non vide.
Alors il existe une surjection continue $f\colon (C, d) \to (X, d_X)$.

Démonstration. On définit $f\colon C \to [0,1]$ en posant

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x(i)}{2^i}$$

Sur le même modèle que le raisonnement utilisé pour montrer que l'ensemble triadique de Cantor est homéomorphe à C, on vérifie que f est une surjection continue de C sur $[0,1]$ (mais elle n'est pas injective, cette fois !).
Alors l'application $g\colon C^{\mathbb{N}} \to H$ définie par

$$f(x) = (f(x_0), f(x_1), \dots)$$

est une surjection continue de $C^{\mathbb{N}}$ sur le cube de Hilbert $H = [0,1]^{\mathbb{N}}$.
Comme C et $C^{\mathbb{N}}$ sont homéomorphes, on peut donc trouver une surjection continue $g\colon C \to H$.
On sait aussi qu'il existe un fermé $\tilde{X}$ de H et un homéomorphisme $h\colon \tilde{X} \to (X, d_X)$.
L'ensemble $F = g^{-1}(\tilde{X})$ est un fermé non vide de C, donc on peut trouver une rétraction continue $r\colon C \to F$. Alors $h \circ g \circ r$ est une surjection continue de C sur X.

□

☆ Théorème 4.67
Il existe des *courbes de Peano*, c'est-à-dire des surjections continues $f\colon [0,1] \to [0,1] \times 0, 1]$.

Démonstration. Soit K l'ensemble triadique de Cantor. Comme $[0,1] \times [0,1]$ est compact, il existe une surjection continue $f\colon K \to [0,1] \times [0,1]$ (i).
Notons f_1, f_2 ses coordonnées ; ce sont des fonctions continues de K dans $[0,1]$, et le lemme 4.64 nous permet de les étendre à des fonctions continues $g_1, g_2\colon [0,1] \to [0,1]$.
Alors

$$x \mapsto (g_1(x), g_2(x))$$

est une surjection continue de $[0,1]$ sur $[0,1] \times [0,1]$. □

Il suit de cela que, pour tout $n, m \geq 1$, on peut construire une surjection continue de $[0,1]^n$ sur $[0,1]^m$. Néanmoins, on peut démontrer (c'est plus difficile que ce qu'on a vu dans ce cours) que $[0,1]^n$ et $[0,1]^m$ ne sont homéomorphes que quand $n = m$.

(i). On pourrait aussi simplement utiliser que $K \times K$ est homéomorphe à K, et le fait qu'on a construit explicitement une surjection de K sur $[0,1]$.

Chapitre 5

Connexité

5.1 Définition, premières propriétés

La notion de connexité est là pour donner un sens mathématique à l'idée intuitive qu'un ensemble est fait "d'un seul morceau" ; c'est une notion subtile, et ce n'est pas la seule formulation mathématique possible de cette idée (voir par exemple la notion de connexité par arcs discutée plus tard dans ce chapitre).

Définition 5.1

Soit (X, d) un espace métrique non vide.
On dit que (X, d) est *connexe* s'il n'est pas possible d'écrire X comme une réunion disjointe de deux ouverts non triviaux.
Plus précisément : (X, d) est connexe si, dès que l'on a $X = A \cup B$ avec A et B des ouverts disjoints, alors l'un de ces deux ouverts est vide et l'autre est égal à X.

Exemple 5.2

L'ensemble $(]0, 1[\cup]1, 2[, | \cdot |)$, n'est pas connexe. En effet, il s'écrit comme la réunion des deux ouverts disjoints non vides $]0, 1[$ et $]1, 2[$.
De même, $\mathbb{Z}$, muni de la distance induite par celle de $\mathbb{R}$ (ou de la distance discrète : sur $\mathbb{Z}$, les deux sont topologiquement équivalentes) n'est pas connexe. En effet, chaque singleton $\{n\}$ y est ouvert, donc $\mathbb{Z} \setminus \{n\} = \bigcup_{i \neq n} \{i\}$ est ouvert aussi ; et alors l'égalité

$$\mathbb{Z} = \{0\} \cup (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

montre que $\mathbb{Z}$ n'est pas connexe.

Notons que, dans la définition précédente, $A = X \setminus B$ est fermé, ainsi que $B = X \setminus A$: on aurait aussi bien pu définir la connexité en disant que l'on ne peut pas écrire X comme réunion disjointe de deux sous-ensembles fermés non triviaux. Par exemple, dans $]0, 1[\cup]1, 2[$, les ensembles $]0, 1[$ et $]1, 2[$ sont tous les deux fermés !

Définition 5.3
Soit (X, d) un espace métrique. On dit que $A \subseteq X$ est *ouvert-fermé* si A est à la fois ouvert et fermé dans (X, d).

Par exemple, $\emptyset$ et X sont toujours ouvert-fermés.

Théorème 5.4
Un espace métrique (X, d) est connexe si, et seulement si, ses seuls ouverts-fermés sont $\emptyset$ et X.

Démonstration. Si X n'est pas connexe, on peut écrire $X = A \cup B$ avec A, B deux ouverts disjoints non triviaux. Alors $A = X \setminus B$ est un ouvert-fermé non trivial.
Réciproquement, s'il existe un ouvert fermé A différent de $\emptyset, X$ alors $B = X \setminus A$ est ouvert, et l'égalité $X = A \cup (X \setminus A)$ montre que X n'est pas connexe. □

Dans la suite on va fréquemment utiliser la caractérisation suivante.

Théorème 5.5
Soit (X, d) un espace métrique. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. (X, d) est connexe.
2. Toute fonction continue $f \colon X \to \mathbb{Z}$ est constante.
3. Toute fonction continue $f \colon X \to \{0, 1\}$ est constante.

Ci-dessus, $\mathbb{Z}$ et $\{0, 1\}$ sont tous les deux équipés de la distance discrète (ou de la distance induite par la distance de $\mathbb{R}$; ces deux distances sont topologiquement équivalentes, dans les deux cas toutes les parties sont ouvertes).

Démonstration. Supposons (X, d) connexe, et considérons une fonction continue $f \colon X \to \mathbb{Z}$.
Puisque $\{n\}$ est ouvert dans $\mathbb{Z}$ pour tout n, chaque ensemble $f^{-1}(\{n\})$ est un ouvert de (X, d) par continuité de f.
Si l'on choisit i dans l'image de f et qu'on pose $A = f^{-1}(\{i\})$, A est un ouvert non vide ; de plus,

$$X \setminus A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{i\}} f^{-1}(\{n\}))$$

est ouvert.
Donc A est un ouvert-fermé non vide ; par connexité, $A = X$: f est constante égale à i.

Comme $\{0, 1\} \subset \mathbb{Z}$, il est clair que la deuxième propriété ci-dessus est plus forte que la troisième.
Supposons maintenant (X, d) non connexe, et écrivons $X = A \cup B$, où A et B sont des ouverts disjoints. Appelons f la fonction caractéristique de A, qui vaut 1 sur A et 0 sur B.
Alors $f \colon X \to \{0, 1\}$ est continue ; en effet, pour tout partie Y de $\{0, 1\}$, $f^{-1}(Y)$ est égale à $\emptyset$, A, B, ou X. Comme ces quatre ensembles sont ouverts, l'image réciproque par f de n'importe quelle partie de $\{0, 1\}$ est un ouvert, ce qui entraîne que f est continue.
Comme f n'est pas constante, on vient de montrer que si la première propriété ci-dessus est fausse alors la troisième aussi, et cela termine la démonstration. □

Définition 5.6
Si (X, d) est un espace métrique, et $A \subseteq X$, on dit que A est connexe si (A, d) est un espace métrique connexe.

Les deux théorèmes suivants sont fondamentaux.

Théorème 5.7
Soit (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques.
Supposons que (X, d_X) est connexe, et $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est continue. Alors $f(X)$ est connexe.

Démonstration. Soit $g\colon (f(X), d_Y) \to \{0,1\}$ une fonction continue. Alors $g \circ f\colon X \to \{0,1\}$ est également continue, donc constante puisque X est connexe.
Par conséquent g est constante sur $f(X)$, qui est donc connexe. □

Théorème 5.8
Soit (X, d) un espace métrique, $A \subseteq X$ une partie connexe, et B telle que

$$A \subseteq B \subseteq \overline{A}$$

Alors B est connexe.
En particulier, l'adhérence d'une partie connexe est toujours une partie connexe.

Démonstration. Soit $f\colon B \to \{0,1\}$ une fonction continue.
La fonction f est constante sur A puisque A est connexe ; notons ε cette constante.
Pour tout $b \in B$ il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers b ; par continuité, la suite $(f(a_n))$ converge vers $f(b)$, mais $f(a_n) = \varepsilon$ pour tout n. Par conséquent $f(b) = \varepsilon$.
On vient de prouver que f est constante, donc B est connnexe.

□

Théorème 5.9
Soit (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques. On munit $X \times Y$ de la distance produit d_∞. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $(X \times Y, d_\infty)$ est connexe.
2. X et Y sont connexes.

Ce théorème se généraliserait sans difficultés à un produit dénombrable d'espaces métriques, muni d'une distance produit.

Démonstration. Supposons tout d'abord $(X \times Y, d_\infty)$ connexe, et notons π_X, π_Y les projections canoniques. Ce sont des applications continues ; par conséquent, $X = \pi_X(X \times Y)$ et $Y = \pi_Y(X \times Y)$ sont connexes.

Réciproquement, supposons que (X, d_X) et (Y, d_Y) sont tous les deux connexes. Soit

$$f\colon (X \times Y, d_\infty) \to \{0, 1\}$$

une application continue.
Pour tout $x \in X$, l'application $y \mapsto f(x, y)$ est constante puisqu'elle est continue, à valeurs dans $\{0, 1\}$ et que Y est connexe. On montre de même, en utilisant le fait que X est connexe, que pour tout $y \in Y$ l'application $x \mapsto f(x, y)$ est constante.
Si (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont tels que $x_1 = x_2$ ou $y_1 = y_2$, on doit donc avoir $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$.
Supposons maintenant que (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont deux éléments quelconques de $X \times Y$.
Alors on a

$$f(x_1, y_1) = f(x_1, y_2) = f(x_2, y_2)$$

On vient de prouver que f est constante, donc $(X \times Y, d_\infty)$ est connexe. □

Définition 5.10
Soit (X, d) un espace métrique, et A une partie de (X, d). La *frontière* de A est l'ensemble

$$\delta A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$$

Notons que δA est fermé dans (X, d), puisque c'est l'intersection des fermés $\overline{A}$ et $X \setminus \mathring{A}$.
On définit aussi l'*extérieur* d'une partie A comme l'intérieur de $X \setminus A$.

Théorème 5.11 (Théorème de passage des douanes)
Soit (X, d) un espace métrique, A une partie connexe de (X, d).

On suppose que B est une partie de (X, d) telle que $A \cap \mathring{B}$ et $A \cap \overbrace{X \setminus B}^{\circ}$ soient tous les deux non vides.
Alors $A \cap \delta B \neq \emptyset$.

Avec des mots : si A est connexe, et rencontre à la fois l'intérieur et l'extérieur de B, alors A rencontre la frontière de B.

Démonstration. On va montrer que

$$X = \mathring{B} \cup \overbrace{X \setminus B}^{\circ} \cup \delta B$$

Admettons-le pour l'instant et supposons que A rencontre à la fois l'intérieur et l'extérieur de B ; alors $A \cap \mathring{B}$ et $A \cap \overbrace{X \setminus B}^{\circ}$ sont deux ouverts disjoints non vides de (A, d).

Si $A \cap \delta B = \emptyset$ ces deux ouverts recouvrent A, et (A, d) n'est pas connexe, une contradiction.

Reste à justifier la propriété annoncée en début de preuve ; soit $x \in X$. Supposons que $x \notin \overbrace{X \setminus B}^{\circ}$. Alors aucun ouvert contenant x ne peut être contenu dans $X \setminus B$, autrement dit tout ouvert contenant x intersecte B, c'est-à-dire $x \in \overline{B}$.

Par conséquent, si $x \notin \mathring{B}$ et $x \notin \overbrace{X \setminus B}^{\circ}$ on a $x \in \overline{B} \setminus \mathring{B} = \delta B$. □

5.2 Connexité dans $\mathbb{R}$

Rappelons qu'une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, et seulement si, dès que x, y sont des éléments de I et $x < z < y$ on a $z \in I$.

☆ Théorème 5.12
Soit A une partie de $\mathbb{R}$, qu'on munit de sa distance usuelle. Alors A est connexe si, et seulement si, A est un intervalle.

Démonstration. Supposons A connexe, et considérons $x, y \in A$ et z tel que $x < z < y$. Si $z \notin A$, considérons

$$U =]-\infty, z[\cap A \ , \quad V =]z, +\infty[\cap A$$

Ce sont des ouverts disjoints de A, dont la réunion est égale à A puisque $z \notin A$.
De plus $x \in U$ et $y \in V$, donc ni U ni V n'est vide. Par conséquent A n'est pas connexe, contredisant notre hypothèse.
Donc $z \in A$, et on vient de montrer que A est un intervalle.

Réciproquement, supposons que I est un intervalle, et considérons $f : I \to \{0, 1\}$ une fonction continue.
Si f n'est pas constante, alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ qui contient 0 et 1, par le théorème des valeurs intermédiaires.
Ce n'est pas possible donc f est constante, et I est connexe. □

Dans l'énoncé ci-dessus, on a utilisé le théorème des valeurs intermédiaires pour justifier qu'un intervalle de $\mathbb{R}$ est connexe. Réciproquement, si on sait que les intervalles de $\mathbb{R}$ coïncident avec les parties connexes de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, alors l'image d'un intervalle par une fonction continue est un connexe de $\mathbb{R}$, autrement dit, un intervalle : c'est l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires.
Autrement dit, le théorème qu'on vient d'établir est en fait une reformulation, en utilisant le vocabulaire de la connexité, du théorème des valeurs intermédiaires. Rappelons comment on peut démontrer ce théorème.

☆ Théorème 5.13 (Théorème des valeurs intermédiaires)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f(I)$ est un intervalle.

Démonstration. Soit $x, y \in f(I)$ et z tel que $x < z < y$.
Il existe $s, t \in I$ tels que $x = f(s)$, $y = f(t)$; on va traiter le cas où $s < t$, l'autre étant similaire (ou s'en déduisant en remplaçant f par $-f$).
Considérons

$$A = \{u \in [s,t] \colon f(v) \leq z \text{ pour tout } v \text{ tel que } s \leq v \leq u\}$$

Alors A contient s, et est majoré par t. Par conséquent, A admet une borne supérieure, qu'on va noter w ; et $w \in [s,t]$.
Par caractérisation séquentielle du sup, il existe une suite (u_n) d'éléments de A qui converge vers w.
On a $f(u_n) \leq z$ donc aussi $f(w) = \lim_{n \to +\infty} f(u_n) \leq z$.
Puisque $f(t) = y > z$, on doit avoir $w < t$. Si jamais $f(w) < z$, alors par continuité de f il existe $\delta > 0$ tel que $f(a) < z$ pour tout $a \in [w, w+\delta]$. Par conséquent, $w + \delta \in A$, contredisant le fait que $w = \sup(A)$.
On conclut que $f(w) = z$, donc $z \in f(I)$, qui est donc un intervalle. □

5.3 Union de parties connexes ; composantes connexes

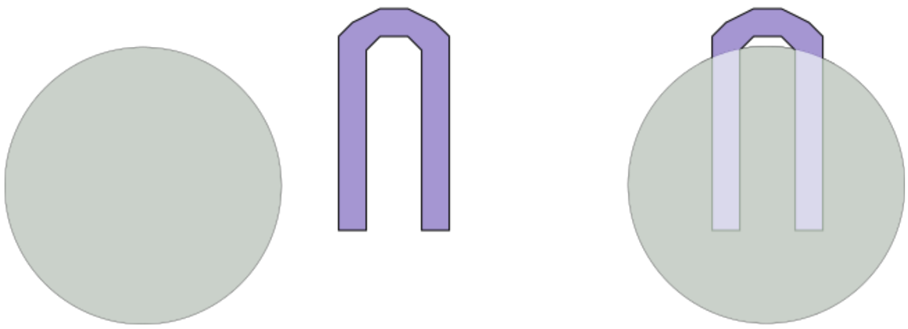
Théorème 5.14
Soit (X,d) un espace métrique, et $(U_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes telle que $\bigcap_{i \in I} U_i \neq \emptyset$.
Alors

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i$$

est connexe.

Démonstration. Soit $f \colon U \to \{0,1\}$ une fonction continue.
Par connexité de U_i, f est constante sur chaque U_i ; si on choisit $x \in \bigcap_{i \in I} U_i$, on a donc $f(y) = f(x)$ pour tout i et tout $y \in U_i$. Ceci montre que f est constante, égale à $f(x)$, sur U. □

Par contre, une intersection de connexes n'a pas de raison d'être connexe ! Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, le cercle unité et l'intervalle $[-1,1]$ sont tous deux connexes ; mais leur intersection est $\{-1,1\}$, qui n'est pas connexe.



Deux parties connexes de $\mathbb{R}^2$ dont l'intersection n'est pas connexe.

Définition 5.15

Soit (X, d) un espace métrique, et $x \in X$. La *composante connexe* de x est la réunion de toutes les parties connexes de (X, d) qui contiennent x.

Dans la suite de cette section on notera $C(x)$ la composante connexe de x.

Théorème 5.16

Soit (X, d) un espace métrique, et $x \in X$.
La composante connexe $C(x)$ de x est une partie connexe, et c'est la plus grande partie connexe contenant x.
De plus $C(x)$ est fermé dans (X, d).

Démonstration. Notons que $\{x\}$ est connexe, donc il existe bien un connexe contenant x ; comme $C(x)$ est la réunion d'une famille de connexes contenant toutes x, on peut appliquer le résultat du théorème 5.14 pour conclure que $C(x)$ est connexe.
Par définition d'une union, si A est une partie connexe de (X, d) qui contient x alors $A \subseteq C(x)$, ce qui justifie le fait que $C(x)$ est le plus grand connexe contenant x.

Puisque $\overline{C(x)}$ est une partie connexe qui contient x on a $\overline{C(x)} \subseteq C(x)$, donc $\overline{C(x)} = C(x)$.
Autrement dit, $C(x)$ est fermé. $\square$

Théorème 5.17

Soit (X, d) un espace métrique, et $x, y \in X$.
Supposons que $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$. Alors $C(x) = C(y)$.

Démonstration. Si $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$, alors $C(x) \cup C(y)$ est connexe, et contient x. Par conséquent $C(x) \cup C(y) \subseteq C(x)$ donc $C(y) \subseteq C(x)$; on montre de même que $C(x) \subseteq C(y)$. $\square$

On déduit des résultats de cette section que tout espace métrique s'écrit comme la réunion disjointe de ses composantes connexes. Notons que, si A est une partie de $\mathbb{R}$, la composante connexe de $a \in A$ est simplement le plus grand intervalle contenant a et contenu dans A.

Exercice 5.18

Soit (X, d) un espace métrique. On définit sur X une relation binaire R en posant xRy si, et seulement si, x appartient à la composante connexe de y. Montrer que R est une relation d'équivalence.

Exemple 5.19

Soit U un ouvert de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, et $x \in U$.
Notons $C(x)$ la composante connexe de x dans $(U, |\cdot|)$; c'est un intervalle, puisque les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
Comme U est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subseteq U$.
Par connexité des intervalles, $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subseteq C(x)$. Par conséquent, $C(x)$ est ouvert.
Comme U est la réunion de ses composantes connexes, on retrouve le fait déjà vu que U s'écrit

comme une réunion d'intervalles ouverts.
Comme ces composantes connexes sont disjointes, chacune contient un rationnel, et $\mathbb{Q}$ est dénombrable, on voit aussi que les composantes connexes forment une famille au plus dénombrable.
Finalement, cet argument de connexité nous permet de montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est la réunion d'une famille au plus dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux.

5.4 Connexité par arcs

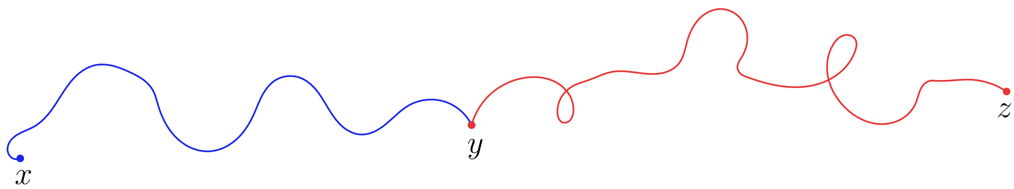
Il peut être délicat de montrer qu'un espace métrique est connexe ; on va considérer une propriété plus forte mais aussi parfois plus simple à démontrer.

Définition 5.20
Soit (X, d_X) un espace métrique. Un *chemin* est une application continue $\gamma\colon [a, b] \to (X, d_X)$, où $a < b$ sont deux réels.
On dit que γ *relie* $\gamma(a)$ à $\gamma(b)$.

Notons que si $\gamma\colon [a, b] \to (X, d_X)$ relie x à y, alors $t \mapsto \gamma(a + b - t)$, également défini sur $[a, b]$, relie y à x (on a simplement parcouru le chemin γ en sens inverse).
Par ailleurs, si $\gamma_1\colon [a, b] \to (X, d_X)$ et $\gamma_2\colon [c, d] \to (X, d_X)$ sont tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, alors on obtient un nouveau chemin $\gamma\colon [a, b + d - c] \to (X, d_X)$ en recollant γ_1 et γ_2, c'est-à-dire en posant

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } a \leq t \leq b \\ \gamma_2(t + c - b) & \text{si } b \leq t \leq b + d - c \end{cases}$$

Notons que, si $\gamma_1(b)$ était différent de $\gamma_2(c)$, on aurait un problème dans la définition ci-dessus lorsque $t = b$; on laisse en exercice le fait de démontrer que γ est bien continu.



Deux chemins mis bout à bout.

Remarque 5.21
Si $\gamma\colon [a, b] \to (X, d_X)$ est un chemin reliant x à y, alors on peut considérer un nouveau chemin $\tilde{\gamma}\colon [0, 1] \to (X, d_X)$ défini par

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(a + t(b - a))$$

Le chemin $\tilde{\gamma}$ relie aussi x et y, et son image est la même que celle de γ : quitte à changer de paramétrage, on peut toujours supposer que nos chemins sont définis sur $[0, 1]$, ce qu'on fera souvent dans la suite.

Définition 5.22

Soit (X,d) un espace métrique non vide. On dit que (X,d) est *connexe par arcs* si pour tout $x,y \in X$ il existe un chemin reliant x à y.

Théorème 5.23

Soit (X,d) un espace métrique connexe par arcs. Alors (X,d) est connexe.

Démonstration. Soit $f\colon (X,d) \to \{0,1\}$ une fonction continue, et $x,y \in X$.
Par hypothèse, on peut trouver un chemin $\gamma\colon [0,1] \to (X,d)$ tel que $\gamma(0)=x$ et $\gamma(1)=y$.
Alors $f \circ \gamma$ est une fonction continue de $[0,1]$ dans $\{0,1\}$, donc $f\circ\gamma$ est constante d'après le théorème des valeurs intermédiaires (autrement dit, parce que $[0,1]$ est connexe).
Donc $f(x)=f(\gamma(0))=f(\gamma(1))=f(y)$: f est constante. □

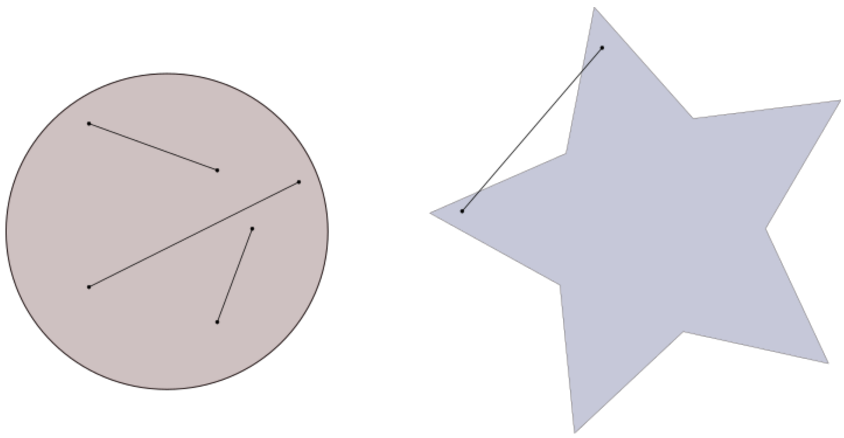
Théorème 5.24

Soit (X,d_X), (Y,d_Y) deux espaces métriques, et $f\colon (X,d_X)\to(Y,d_Y)$ une application continue. Supposons (X,d_X) connexe par arcs. Alors $(f(X),d_Y)$ est connexe par arcs.

Démonstration. Soit $y,y' \in f(X)$.
On peut trouver $x,x' \in X$ tels que $f(x)=y$, $f(x')=y'$; comme (X,d_X) est connexe par arcs il existe un chemin $\gamma\colon [0,1]\to(X,d_X)$ tel que $\gamma(0)=x$, $\gamma(1)=x'$.
Alors $f\circ\gamma$ est continue, à valeurs dans $f(X)$, et $f\circ\gamma(0)=f(x)=y$, $f\circ\gamma(1)=f(x')=y'$.
On vient de construire un chemin reliant y à y' dans $f(X)$, qui est donc connexe par arcs. □

Définition 5.25

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Une partie A de E est *convexe* si pour tout $t\in[0,1]$ et tout $a,b\in A$ on a $ta+(1-t)b\in A$.



Le disque est convexe ; le domaine en forme d'étoile ne l'est pas.

Théorème 5.26
Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, les intervalles sont convexes.

Démonstration. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $x, y \in I$, $t \in [0,1]$ et $z = tx + (1-t)y$.
On peut supposer que $x \leq y$, et alors on a

$$z \geq tx + (1-t)x = x \quad \text{et} \quad z \leq ty + (1-t)y = y$$

Donc $x \leq z \leq y$, par conséquent $z \in I$. □

Exemple 5.27
Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et $r > 0$. Alors $B(x,r)$ est convexe pour tout $x \in X$.
Pour le prouver, prenons $y, z \in B(x,r)$ et $t \in [0,1]$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} \|x - (ty + (1-t)z)\| & = & \|t(x-y) + (1-t)(x-z)\| \\ & \leq & t\|x-y\| + (1-t)\|x-z\| \\ & < & r \end{array}$$

La dernière inégalité vient du fait que $t\|x-y\| + (1-t)\|x-z\|$ est une combinaison convexe de deux éléments de $]0, r[$, donc un élément de $]0, r[$ puisque les intervalles sont convexes.
On vient de montrer que $ty + (1-t)z \in B(x,r)$, qui est donc convexe.
On montre de manière analogue que les boules fermées sont convexes.

Théorème 5.28
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie convexe non vide. Alors A est connexe par arcs.

Démonstration. Fixons $a \in A$.
Pour tout $x \in A$, on peut suivre le chemin $\gamma \colon [0,1] \to A$ défini par $\gamma(t) = tx + (1-t)a$ pour relier a à x tout en restant dans A.
Si x et y sont deux éléments quelconques de A, on peut alors relier x à y en reliant d'abord x à a puis a à y, les deux fois en se déplaçant le long d'un segment. □

Dans $\mathbb{R}$, on voit donc que les parties connexes, les parties connexes par arcs et les parties convexes sont les mêmes : ce sont les intervalles.
Il existe bien sûr des parties connexes par arcs non convexes, par exemple un cercle dans le plan.

Théorème 5.29
Soit (X, d) un espace métrique et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes par arcs telle que $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Alors $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe par arcs.

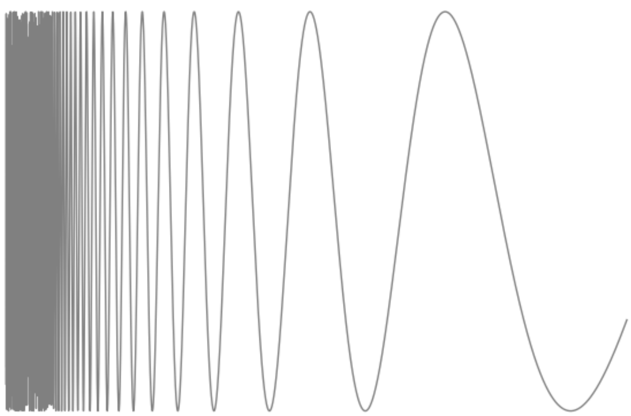
Démonstration. Fixons $a \in \bigcap_{i \in I} A_i$, et considérons $x, y \in A$. Il existe $i \in I$ tel que $x, a \in A_i$, et donc un chemin dans A_i reliant x à a ; de même il existe $j \in I$ tel que $a, y \in A_j$ et donc un chemin dans A_j reliant a à y.
En mettant ces deux chemins bout à bout, on obtient un chemin dans $A_i \cup A_j \subset A$ reliant x à y. $\square$

On peut utiliser ce résultat pour définir des composantes connexes par arcs, exactement comme on l'a fait pour les composantes connexes. Il existe néanmoins une différence majeure entre connexité et connexité par arcs : l'adhérence d'une partie connexe par arcs n'est pas nécessairement connexe par arcs !
C'est une conséquence du théorème suivant, qui nous fournit un exemple de partie connexe non connexe par arcs.

Théorème 5.30
Soit
$$A = \left\{ \left(t, \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right) : t \in]0,1] \right\}$$
Soit B l'adhérence de A dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. Alors B est compact, connexe mais non connexe par arcs.

Démonstration. Comme A est contenu dans $[0,1] \times [-1,1]$, qui est compact, $B = \overline{A}$ est un fermé contenu dans ce compact, et est donc compact.
De plus, A est l'image du connexe $]0,1]$ par l'application continue
$$f : t \mapsto \left(t, \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right)$$
Par conséquent A est connexe, donc $B = \overline{A}$ aussi.

Il est plus délicat de montrer que B n'est pas connexe par arcs. Pour nous faire une idée de ce à quoi ressemble B, notons que pour tout $x \in [-1,1]$ il existe $t \in [0, 2\pi]$ tel que $x = \sin(t)$, et alors
$$(0, x) = \lim_{n \to +\infty} f\left(\frac{1}{t + 2n\pi}\right) \in B$$
Donc B contient tout l'intervalle $I = \{0\} \times [-1,1]$; on a déjà vu que $B \subset [-1,1] \times [-1,1]$, donc $B \cap \{0\} \times \mathbb{R} = I$. Montrons qu'en fait on a $B = I \cup A$.



Le graphe de $t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ près de 0.

Pour tout $(x,y) \in B$, il existe $t_n \in]0,1]$ tels que $t_n \to x$ et $\sin\left(\frac{1}{t_n}\right) \to y$; si $x \neq 0$ on obtient par continuité et passage à la limite que $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, donc $(x,y) \in A$. On a donc comme annoncé $B = A \cup I$.
Il semble difficile de faire un chemin continu permettant de sortir de I pour atteindre un point qui n'appartient pas à I... Essayons de justifier cette intuition.
Supposons que $\gamma\colon [0,1] \to B$ soit un chemin tel que $\gamma(0) = (0,0)$ et $\gamma(1) = (1, \sin(1))$. Notons

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

Comme $\gamma_1(1) = 1$ et γ_1 est continue, $\gamma_1(t)$ est proche de 1 pour tout t suffisamment proche de 1, par conséquent

$$t = \sup\{u\colon \gamma_1(u) = 0\} < 1$$

Par continuité de γ_1, on a $\gamma_1(t) = 0$.
Puisque $B = I \cup A$, on a tout $s > t$ l'égalité $\gamma_2(s) = \sin\left(\frac{1}{\gamma_1(s)}\right)$.
Par continuité de γ_2, on peut trouver $\delta > 0$ tel que

$$|\gamma_2(t+h) - \gamma_2(t)| < 1$$

pour tout $h \in [0, \delta]$.
L'image par γ_1 de $[t, t+\delta]$ est un segment contenu dans $[0,1]$; puisque $\gamma_1(t) = 0$ et $\gamma_1(s) > 0$ pour tout $s > t$, ce segment est de la forme $[0,u]$ avec $u > 0$, et $\gamma_1(]t, t+\delta]) =]0,u]$.
L'image de $]0,u]$ par $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est $\left[\frac{1}{u}, +\infty\right[$.
Par conséquent, l'image de $]t, t+\delta]$ par γ_2 est égale à $\sin\left(\left[\frac{1}{u}, +\infty\right[\right) = [-1,1]$.
On vient de prouver que

$$\gamma_2(]t, t+\delta]) = [-1,1]$$

Cela contredit le fait que $|\gamma_2(u) - \gamma_2(t)| < 1$ pour tout $u \in [t, t+\delta]$. $\square$

Attention!
On a vu dans ce chapitre que toute partie convexe est connexe par arcs, et que toute partie connexe par arcs est connexe. On a aussi vu que la réciproque de chacune de ces propriétés est fausse ! Attention au sens dans lequel vous utilisez ces implications...

Chapitre 6

Complétude

6.1 Suites de Cauchy ; espaces complets

Définition 6.1
Soit (X, d) un espace métrique, et (x_n) une suite d'éléments de X. On dit que (x_n) est une *suite de Cauchy* si la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geq N \; d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$

Théorème 6.2
Soit (X, d) un espace métrique. Alors toute suite convergente d'éléments de X est de Cauchy.

Démonstration. Supposons que (x_n) est une suite d'éléments de X qui converge vers x, et fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. On a alors, pour tout $n, m \geq N$, que

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \leq 2\varepsilon$$

Par conséquent (x_n) est de Cauchy. □

Attention!
La réciproque du résultat précédent est fausse en général.
Par exemple, si l'on considère $X =]0, +\infty[$ muni de sa distance usuelle, alors la suite (x_n) définie par $x_n = 2^{-n}$ est une suite de Cauchy, mais elle n'admet pas de limite dans X (elle tend vers 0 dans $\mathbb{R}$; et si elle avait une limite dans X ce serait aussi sa limite en tant que suite de réels).
C'est ce qui va motiver l'introduction de la notion d'espace *complet* un peu plus tard dans ce chapitre.

Théorème 6.3
Soit (X, d) un espace métrique, et (x_n) une suite de Cauchy d'éléments de X. Alors (x_n) est bornée.

Démonstration. En appliquant la définition d'une suite de Cauchy avec $\varepsilon = 1$, on obtient N tel que $d(x_n, x_m) \leq 1$ pour tout $n, m \geq N$, en particulier $d(x_n, x_N) \leq 1$ pour tout $n \geq N$.
L'ensemble $\{d(x_n, x_N) \colon n \leq N\}$ est fini, donc admet un majorant M dans $\mathbb{R}$; alors on a

$$d(x_n, x_N) \leq M + 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci montre que (x_n) est bornée. $\square$

Définition 6.4

Soit (X, d) un espace métrique. On dit que (X, d) est *complet* si toute suite de Cauchy d'éléments de X est convergente.

Un intérêt de la complétude est qu'elle permet de justifier qu'une suite converge sans avoir besoin d'identifier sa limite.

Théorème 6.5

Soit (X, d) un espace métrique complet, et $F \subseteq X$ un sous-ensemble fermé.
Alors (F, d) est complet.

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy d'éléments de F.
C'est en particulier une suite de Cauchy d'éléments de X, elle converge donc vers un certain $x \in X$ puisque (X, d) est complet. Comme F est fermé dans X, on doit avoir $x \in F$.
On vient de montrer que toute suite de Cauchy d'éléments de F converge dans F : (F, d) est complet. $\square$

Cette proposition admet une forme de réciproque.

Théorème 6.6

Soit (X, d) un espace métrique et $F \subseteq X$ un sous-ensemble tel que (F, d) est complet.
Alors F est fermé dans (X, d).

Démonstration. Soit (x_n) une suite d'éléments de F qui converge vers $x \in X$.
Alors (x_n) est de Cauchy puisque toute suite convergente est de Cauchy ; comme F est complet (x_n) converge dans F, ce qui montre (par unicité de la limite) que $x \in F$. Donc F est fermé. $\square$

Théorème 6.7

Soit (X, d) un espace métrique, et (x_n) une suite de Cauchy d'éléments de X telle que (x_n) admette une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente (vers $x \in X$). Alors (x_n) converge (vers x).

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy d'éléments de X, et $x \in X$ tel qu'il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers x.
Fixons $\varepsilon > 0$. Alors on sait qu'il existe N tel que

$$\forall n, m \geq N \quad d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$

De plus, il existe aussi K tel que $d(x_{\varphi(n)}, x) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq K$.
Comme $\varphi(n)$ tend vers $+\infty$, on peut trouver n_0 tel qu'on ait à la fois $n_0 \geq K$ et $\varphi(n_0) \geq N$. D'où

$$\forall n \geq N \quad d(x_n, x_{\varphi(n_0)}) \leq \varepsilon \text{ et } d(x_{\varphi(n_0)}, x) \leq \varepsilon$$

Par conséquent,

$$\forall n \geq N \quad d(x_n, x) \leq 2\varepsilon$$

Ceci prouve que (x_n) converge vers x. □

☆ Théorème 6.8
Tout espace métrique compact est complet.

Démonstration. Soit (X, d) un espace métrique compact, et (x_n) une suite de Cauchy d'éléments de X.
Par définition de la compacité, on peut extraire une sous-suite de (x_n) qui converge vers $x \in X$.
La proposition précédente nous permet donc de conclure que (x_n) converge vers x. □

☆ Théorème 6.9
Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Alors $(E, \|\cdot\|)$ est complet.
En particulier, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ sont complets.

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy d'éléments de $(E, \|\cdot\|)$.
Alors (x_n) doit être bornée ; et on a déjà vu que les parties fermées et bornées de $(E, \|\cdot\|)$ sont compactes. On peut donc extraire une sous-suite convergente de (x_n), et la proposition 6.7 nous permet de conclure que (x_n) converge. □

☆ Théorème 6.10
Soit (X, d) un espace métrique complet, et (F_n) une suite de fermés de (X, d). On suppose que :

- Chaque F_n est non vide.
- Pour tout n on a $F_{n+1} \subseteq F_n$.
- La suite $(\operatorname{diam}(F_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

Alors $F = \bigcap_{n \in N} F_n$ est un singleton.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit $x_n \in F_n$. Montrons que la suite (x_n) est de Cauchy. Fixons $\varepsilon > 0$; il existe N tel que diam$(F_N) \leq \varepsilon$.
Pour tout $n, m \geq N$ on a $x_n, x_m \in F_N$ puisque la suite $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Par conséquent,

$$\forall n, m \geq N \quad d(x_n, x_m) \leq \text{diam}(F_N) \leq \varepsilon$$

Donc (x_n) est une suite de Cauchy ; par suite elle converge dans (X, d), qui est complet.
Si on fixe $i \in \mathbb{N}$, alors $(x_n)_{n\geq i}$ est une suite convergente d'éléments de F_i ; comme F_i est fermé, $x \in F_i$. Finalement,

$$x \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i = F$$

Reste à justifier que x est l'unique élément de F. Pour cela, considérons $y \in F$, fixons $\varepsilon > 0$ et trouvons i tel que diam$(F_i) \leq \varepsilon$.
On a à la fois $x \in F_i$ et $y \in F_i$, donc $d(x, y) \leq \varepsilon$. Cette inégalité étant vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$, on conclut que $x = y$.

□

☆ Théorème 6.11
Soit (X, d) un espace métrique. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) (X, d) est compact.
(ii) (X, d) est précompact et complet.

Démonstration. On a déjà vu que si (X, d) est compact alors il est à la fois précompact et complet. Supposons maintenant que (X, d) a ces deux propriétés, et soit (x_n) une suite d'éléments de (X, d). On cherche à construire une sous-suite convergente de (x_n) ; puisque (X, d) est complet, il nous suffit de construire une sous-suite de Cauchy, et c'est exactement ce que permet la précompacité.
En effet, celle-ci permet de construire une suite de sous-ensembles (A_n) de $\mathbb{N}$ tels que :

- Pour tout n, A_n est infini.
- Pour tout n, $A_{n+1} \subseteq A_n$.
- Pour tout n, et pour tout $i, j \in A_n$ on a $d(x_i, x_j) \leq 2^{-n}$.

Supposons pour l'instant que cela est effectivement possible. Alors on construit $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en posant $\varphi(0) = \min(A_0)$, puis en définissant par récurrence

$$\varphi(n + 1) = \min\{i \in A_{n+1} \colon i > \varphi(n)\}$$

(un tel i existe puisque A_{n+1} est infini)
Cette construction assure à la fois que φ est strictement croissante, et que $\varphi(n) \in A_n$ pour tout n.
Soit alors $\varepsilon > 0$, et N tel que $2^{-N} \leq \varepsilon$. Pour tout $n \geq N$ on a $\varphi(n) \in A_n \subseteq A_N$ donc pour tout $n, m \geq N$ on a

$$d(x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(m)}) \leq 2^{-N} \leq \varepsilon$$

On a donc construit, comme promis, une sous-suite de Cauchy de (x_n).
Reste à justifier pourquoi on peut construire une telle suite de sous-ensembles (A_n). Pour construire A_0, utilisons la précompacité de (X, d) pour le recouvrir par un nombre fini de boules de rayon $\frac{1}{2}$. Notons ces boules $B_1, \ldots, B_p$.

Par le principe des tiroirs, il existe k tel que

$$C_k = \{i \in \mathbb{N} \colon x_i \in B_k\}$$

est infini. On choisit un tel k, et on pose $A_0 = C_k$.
Si on note y le centre de B_k, on a pour tout $i, j \in A_0$ $d(x_i, y) \leq \frac{1}{2}$ et $d(x_j, y) \leq \frac{1}{2}$. Par conséquent, on a

$$\forall i, j \in A_0 \quad d(x_i, x_j) \leq d(x_i, y) + d(y, x_j) \leq 1$$

Maintenant que la construction est initialisée, supposons $A_0, \ldots, A_n$ construits.
Comme ci-dessus, on recouvre (X, d) par un nombre fini de boules de rayon 2^{-n-1}, on note ces boules $B_1^n, \ldots, B_p^n$ et on utilise le principe des tiroirs pour voir qu'il existe k tel que

$$C_k^n = \{i \in A_n \colon x_i \in B_k^n\}$$

est infini. On pose alors $A_{n+1} = C_k^n$, et on observe à l'aide de l'inégalité triangulaire que

$$d(x_i, x_j) \leq 2 \cdot 2^{-n-1} = 2^{-n}$$

pour tout $i, j \in A_n$. □

Exemple 6.12

La complétude n'est pas une notion topologique : il existe des ensembles X, et des distances d_1, d_2 topologiquement équivalentes telles que (X, d_1) soit complet et (X, d_2) ne le soit pas. Donnons un exemple : munissons $X =]0, 1]$ des distances

$$d_1(x, y) = |x - y| \quad \text{et} \quad d_2(x, y) = |x - y| + \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$

(le fait que d_2 est bien une distance est laissé en exercice, qui ne devrait pas poser de difficulté à ce moment du cours).
Il est clair que $d_1 \leq d_2$, en particulier si (x_n) est une suite d'éléments de X qui converge vers x dans (X, d_2) alors (x_n) converge aussi vers x dans (X, d_1).
Réciproquement, supposons que (x_n) converge vers x dans (X, d_1). Alors $x > 0$, donc $\frac{1}{x_n}$ converge vers $\frac{1}{x}$, ce dont on déduit que $d_2(x, x_n)$ tend vers 0.
Les distances d_1 et d_2 sont donc topologiquement équivalentes, puisqu'elles ont les mêmes suites convergentes. Puisque $]0, 1]$ n'est pas fermé dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(]0, 1], d_1)$ n'est pas complet.
Montrons que $(]0, 1], d_2)$ est complet.
Pour cela, considérons (x_n) une suite de Cauchy d'éléments de $(]0, 1], d_2)$.
Comme $d_1 \leq d_2$, (x_n) est aussi de Cauchy dans $(]0, 1], d_1)$ donc convergente dans $\mathbb{R}$ puisque $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet. Sa limite x appartient à $[0, 1]$.
De même, on voit que $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, puisque pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ on a

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_m}\right| \leq d_2(x_n, x_m)$$

Par conséquent, $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ converge dans $\mathbb{R}$, ce qui entraîne que $x \neq 0$. On a alors à la fois $x_n \to x$ et $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x}$, donc $d_2(x_n, x) \to 0$.
On vient de prouver que toute suite de Cauchy d'éléments de (X, d_2) admet une limite : (X, d_2) est complet.

6.2 Séries dans un espace vectoriel normé complet

Comme on l'a déjà mentionné, la notion de suite de Cauchy est particulièrement utile pour justifier la convergence d'une suite sans savoir déterminer sa limite (ou comme étape préalable au calcul de la limite en question). Souvent, la suite étudiée est la suite des sommes partielles d'une série ; commençons par rappeler le vocabulaire correspondant.
Dans la suite, on va se placer dans le cadre général des espaces vectoriels normés complets, mais il ne faut pas perdre de vue que les propriétés étudiées sont déjà intéressantes sur $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ou $(\mathbb{C}, |\cdot|)$.

Définition 6.13

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et (u_n) une suite d'éléments de E. On lui associe la suite des *sommes partielles* (U_N) définie par $U_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$.
On dit que la *série* $\sum u_n$ converge vers $x \in E$ si (U_N) converge vers x quand N tend vers $+\infty$. On note alors

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Notons que, si (x_n) est une suite quelconque, en posant $u_0 = x_0$ et $u_n = x_n - x_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$ on obtient une série dont la suite des sommes partielles est égale à (x_n). Autrement dit, manipuler des sommes partielles de séries ou des suites revient au même, ce n'est qu'une question de vocabulaire employé.
Si l'espace normé ambiant est complet (on dit alors que E est un *espace de Banach*), une suite est convergente si, et seulement si, elle est de Cauchy. Dans le langage des séries, on obtient la condition suivante.

Théorème 6.14 (Critère de Cauchy)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé complet, et (u_n) une suite d'éléments de E.
Alors la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, elle satisfait le *critère de Cauchy*, c'est-à-dire :
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout $p \geq 0$ on ait $\left\|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right\| \leq \varepsilon$.

En effet, le critère précédent revient exactement à dire que la suite des sommes partielles (U_N) est une suite de Cauchy, ce qui est équivalent à sa convergence puisque $(E, \|\cdot\|)$ est complet.

Définition 6.15

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et (x_n) une suite d'éléments de E.
On dit que $\sum x_n$ *converge absolument* si $\sum \|x_n\|$ est une série convergente.

L'avantage de cette notion est que, pour vérifier qu'une série converge absolument, on doit manipuler une série à termes positifs, plutôt qu'une série à valeurs dans un espace vectoriel compliqué ; et on connaît déjà un certain nombre de techniques pour justifier qu'une série à termes positifs est convergente.

Théorème 6.16

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé complet. Toute série absolument convergente d'éléments de E est convergente.

Démonstration. Soit $\sum x_n$ une série absolument convergente d'éléments de E. Pour montrer que cette série converge, il nous suffit de montrer qu'elle satisfait le critère de Cauchy ; fixons donc $\varepsilon > 0$.

Par convergence de $\sum \|x_n\|$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=N}^{+\infty} \|x_k\| < \varepsilon$.

Fixons un tel N, et considérons $n \geq N$, $p \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=n}^{n+p} x_k \right\| &\leq \sum_{k=n}^{n+p} \|x_k\| \\ &\leq \sum_{k=N}^{+\infty} \|x_k\| \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Donc notre série vérifie bien le critère de Cauchy, par conséquent elle converge. □

Exemple 6.17

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé complet, et (u_n) une suite d'éléments de X.
Supposons qu'il existe $r \in [0, 1[$ tel que $\|u_n\| \leq r^n$ à partir d'un certain rang. Alors $\sum u_n$ converge.
En effet, on a

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \|u_n\| \leq \sum_{n=N}^{+\infty} r^n < +\infty$$

Donc $\sum u_n$ converge absolument, et est donc convergente.

Bien sûr, l'exemple ci-dessus se généralise en remplaçant r^n par le terme général de n'importe quelle série convergente. Le cas d'une série géométrique est souvent très utile.

Exemple 6.18

Soit $x \in \mathbb{C}$. La série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge dans $(\mathbb{C}, |\cdot|)$. On note sa limite $\exp(x)$ ou e^x.

Pour le démontrer, notons $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$; on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \dfrac{1}{2}$ pour tout $n \geq N$; on vérifie alors par récurrence que

$$|u_n| \leq (2^N u_N) 2^{-n}$$

pour tout $n \geq N$, et cette majoration par une série géométrique nous permet de conclure que $\sum u_n$ est convergente.

En fait, le calcul fait ci-dessus permet de voir que $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ converge uniformément sur toute partie compacte de $\mathbb{C}$, ce dont on peut conclure que $x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{C}$.

Le théorème 6.16 est en fait une caractérisation de la complétude d'un espace vectoriel normé.

Théorème 6.19

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé tel que toute série absolument convergente d'éléments de $(E, \|\cdot\|)$ soit convergente. Alors $(E, \|\cdot\|)$ est complet.

Démonstration. Supposons que $(E, \|\cdot\|)$ satisfait la condition ci-dessus, et considérons une suite (u_n) de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|)$.
En utilisant le fait que (u_n) est de Cauchy, on peut construire $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$\|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\| \leq 2^{-n}$$

Admettons cela pour l'instant et notons $v_n = u_{\varphi(n)}$ pour alléger la notation ; alors $\sum (v_{n+1} - v_n)$ est absolument convergente puisque $\sum 2^{-n}$ converge.
Par hypothèse sur $(E, \|\cdot\|)$ on déduit que cette série converge, par conséquent (v_n) converge (on a affaire à une série télescopique).
On vient de montrer que (u_n) admet une suite extraite convergente ; comme (u_n) est de Cauchy, elle converge. Donc $(E, \|\cdot\|)$ est bien complet.

Pour que la démonstration soit complète, il nous reste à justifier la possibilité de construire une fonction φ comme ci-dessus.
Pour cela, on note que pour tout n il existe $N_n > 0$ tel qu'on ait $\|u_i - u_j\| \leq 2^{-n}$ pour tout $i, j \geq N_n$. Posons $\varphi(n) = N_0 + \ldots + N_n$.
Alors φ est strictement croissante ; de plus, pour tout n on a $\varphi(n), \varphi(n+1) \geq N_n$, donc

$$\|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\| \leq 2^{-n}$$

comme attendu.

□

Exemple 6.20

Munissons l'espace des polynômes $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_1$; rappelons que si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ alors

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{d} |a_k|$$

Considérons, dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_1)$, la série de terme général $\frac{X^n}{n!}$; cette série est absolument convergente puisque

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left\| \frac{X^n}{n!} \right\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$$

Néanmoins, cette série ne converge pas dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_1)$: en effet, si l'on fixe $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $\leq d$, on a pour tout $n \geq d+1$ que

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} - P \right\|_1 \geq \frac{1}{(d+1)!}$$

donc la série ne converge pas vers P.
Comme P est quelconque, la série de terme général $\frac{X^n}{n!}$ est une série absolument convergente mais non convergente dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_1)$.
On voit ainsi que cet espace n'est pas complet (en fait, les plus curieuses pourront lire à la fin de ce chapitre une preuve du fait qu'un espace vectoriel normé complet, de dimension infinie, ne peut avoir de base algébrique dénombrable ; en particulier il n'existe pas de norme complète sur $\mathbb{R}[X]$).

6.3 Quelques exemples d'espaces vectoriels normés complets

Définition 6.21

Soit (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques. On note $C_b(X,Y)$ l'espace des fonctions continues de X vers Y, dont l'image est un sous-ensemble borné.
On le munit de la distance d_{sup}, définie par

$$d_{sup}(f,g) = \sup\{d_Y(f(x), g(x)) : x \in X\}$$

Théorème 6.22

Soit (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques. On suppose que (Y, d_Y) est complet.
Alors $(C_b(X,Y), d_{sup})$ est complet.

Un cas particulier très important du théorème ci-dessus est celui où $Y = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), et X est compact : alors $C_b(X,Y)$ est simplement l'espace vectoriel formé par toutes les fonctions continues de X vers $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).
Ainsi, le théorème précédent implique que, lorsqu'on les munit de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

alors $(C(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ et $(C(X,\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ sont des espaces vectoriels normés complets.

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $C_b(X,Y)$.
Alors pour tout $y \in X$ et tout $n, m \in \mathbb{N}$ on a

$$d((f_n(y), f_m(y)) \leq d_{sup}(f_n, f_m)$$

donc la suite $(f_n(y))$ est une suite de Cauchy, qui converge vers un élément de Y qu'on note $f(y)$ (puisque Y est supposé complet).
Fixons $\varepsilon > 0$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n, m \geq N \ \forall x \in X \quad d_Y(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon$$

En faisant tendre m vers l'infini dans l'inégalité précédente ($n \geq N$ étant fixé) on obtient

$$\forall n \geq N \ \forall x \in X \quad d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

Autrement dit, (f_n) converge uniformément vers f, par conséquent f est continue.
Il nous reste à démontrer que f est bornée ; pour cela, fixons $\varepsilon = 1$ et trouvons n tel que

$$\forall x \in X \quad d_Y(f_n(x), f(x)) \leq 1$$

Fixons $x \in X$; puisque f_n est bornée, il existe M tel que

$$\forall x' \in X \quad d_Y(f_n(x'), f_n(x)) \leq M$$

On obtient alors pour tout $x' \in X$, à l'aide de l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x')) &\leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(x')) + d(f_n(x'), f(x')) \\ &\leq 1 + M + 1 \\ &= M + 2 \end{aligned}$$

Donc f est bornée, et on vient de montrer que toute suite de Cauchy dans $(C_b(X,Y), d_{sup})$ admet une limite. □

☆ Théorème 6.23

Soit $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés.
On munit l'espace $\mathcal{L}(X,Y)$ de la norme subordonnée $|||\cdot|||$, et on suppose que $(Y, \|\cdot\|_Y)$ est complet.
Alors $(\mathcal{L}(X,Y), |||\cdot|||)$ est complet.

Démonstration. Soit (T_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(X,Y)$.
Montrons, comme dans la preuve précédente, que la suite $(T_n(x))$ est une suite de Cauchy. Pour cela, fixons $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, et trouvons N tel que

$$\forall n, m \geq N \quad \|\!|T_n - T_m|\!\| \leq \varepsilon$$

Alors on a

$$\forall n, m \geq N \quad \|T_n(x) - T_m(x)\|_Y \leq \|\!|T_n - T_m|\!\| \cdot \|x\|_X \leq \varepsilon \|x\|_X$$

Comme ε était quelconque, ceci montre que $(T_n(x))$ est une suite de Cauchy, donc converge vers un élément de Y qu'on note $T(x)$.
Montrons (exactement comme dans la preuve précédente) que $\|\!|T_n - T|\!\|$ tend vers 0 : soit $\varepsilon > 0$, et N tel que $\|\!|T_n - T_m|\!\| \leq \varepsilon$ pour tout $n, m \geq N$. Fixons $x \in X$. Puisque

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_Y \leq \|\!|T_n - T_m|\!\| \cdot \|x\|_X \leq \varepsilon \|x\|_X$$

pour tout $n, m \geq N$, on obtient en faisant tendre m vers $+\infty$ que

$$\forall n \geq N \quad \|T_n(x) - T(x)\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X$$

Autrement dit, $\|\!|T_n - T|\!\| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$, ce qu'on voulait démontrer.
Reste à justifier que T est linéaire et continue. Pour cela, on fixe $x, y \in X$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ et on écrit

$$\begin{aligned}
T(x + \lambda y) &= \lim_{n \to +\infty} T_n(x + \lambda y) \\
&= \lim_{n \to +\infty} T_n(x) + \lambda T_n(y) \\
&= \lim_{n \to +\infty} T_n(x) + \lambda \lim_{n \to +\infty} T_n(y) \\
&= T(x) + \lambda T(y)
\end{aligned}$$

Donc T est linéaire. Pour vérifier sa continuité, fixons (par exemple) $\varepsilon = 1$, et fixons n tel que $\|\!|T_n - T|\!\| \leq 1$. On a alors, pour tout $x \in X$,

$$\|T(x)\|_Y \leq \|T_n(x)\|_Y + \|T(x) - T_n(x)\|_Y \leq (\|\!|T_n|\!\| + \|\!|T_n - T|\!\|) \cdot \|x\|_X \leq (\|\!|T_n|\!\| + 1) \cdot \|x\|_X$$

Donc T est continue, et $\|\!|T|\!\| \leq 1 + \|\!|T_n|\!\|$.
On a déjà justifié ci-dessus que $\|\!|T_n - T|\!\|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$; donc (T_n) converge vers T dans $(\mathcal{L}(X,Y), \|\!|\cdot|\!\|)$. $\square$

☆ Théorème 6.24 (Théorème de Riesz–Fischer)
Soit $p \in [1, +\infty]$. Alors $(\ell^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé complet.

Démonstration. On a déjà vu que $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé pour tout $p \in [1, \infty]$. Reste à établir sa complétude.

Commençons par le cas $p = +\infty$. Alors $\ell^\infty(\mathbb{N})$ peut être vu comme l'espace des applications continues bornées de $(\mathbb{N}, |\cdot|)$ vers $\mathbb{R}$ (puisque $(\mathbb{N}, |\cdot|)$ est discret, toutes les fonctions de $(\mathbb{N}, |\cdot|)$ vers $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sont continues...), et $\|\cdot\|_\infty$ induit la distance d_{sup}.
On a donc déjà montré que $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

Pour traiter les cas restants, fixons $p \in [1, +\infty[$, et considérons une suite (x_n) de Cauchy dans $\ell^p(\mathbb{N})$.
On commence par utiliser le fait que (x_n) est de Cauchy pour en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\|_p \leq 2^{-n}$$

Alors la série

$$\sum (x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)})$$

est absolument convergente puisqu'elle est majorée terme à terme par une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a

$$|x_{\varphi(n)}(i) - x_{\varphi(n+1)}(i)| \leq \|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\|_p$$

Donc $\sum (x_{\varphi(n+1)}(i) - x_{\varphi(n)}(i))$ converge absolument ; comme $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet on en déduit que cette série converge dans $\mathbb{R}$.
Puisque c'est une série télescopique, on a montré que pour tout $i \in \mathbb{N}$ la suite $(x_{\varphi(n)}(i))$ converge dans $\mathbb{R}$. Notons $x(i)$ sa limite.

Il nous reste à montrer que $x \in \ell^p(\mathbb{N})$, et que (x_n) converge vers x dans $\ell^p(\mathbb{N})$ (en fait, il nous suffirait même de montrer que $(x_{\varphi(n)})$ converge vers x, puisque (x_n) est de Cauchy).
Fixons $\varepsilon > 0$. Comme (x_n) est de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|x_n - x_m\|_p \leq \varepsilon$ pour tout $n, m \geq p$. En particulier, pour tout $m, n \geq N$, on a $\|x_m - x_{\varphi(n)}\|_p \leq \varepsilon$.
Cela entraîne que, pour tout $M \in \mathbb{N}$ et tout $m, n \geq N$ on a

$$\sum_{i=0}^{M} |x_m(i) - x_{\varphi(n)}(i)|^p \leq \varepsilon^p$$

On peut faire tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus (qui ne met en jeu qu'une somme finie de termes) pour obtenir, pour tout $M \in \mathbb{N}$ et tout $m \geq N$, l'inégalité

$$\sum_{i=0}^{M} |x_m(i) - x(i)|^p \leq \varepsilon^p$$

Par conséquent, $\sum |x_m(i) - x(i)|^p$ converge, vers une limite majorée par ε^p.
Donc $(x_m - x) \in \ell_p$, et $\|x_m - x\|_p \leq \varepsilon$ pour tout $m \geq N$.
Comme ℓ_p est un espace vectoriel, on en déduit que $x \in \ell_p$.
On a aussi montré que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que $\|x_m - x\|_p \leq \varepsilon$ pour tout $m \geq N$, autrement dit (x_m) converge vers x dans $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$. $\square$

6.4 Théorème du point fixe de Picard

Théorème 6.25 (Théorème du point fixe de Picard)
Soit (X, d) un espace métrique complet, et $f\colon (X, d) \to (X, d)$ une application k-lipschitzienne de rapport $k < 1$.
Alors f admet un unique *point fixe* z, c'est-à-dire qu'il existe un seul $z \in X$ tel que $f(z) = z$.
De plus, pour tout $x \in X$, la suite (x_n) définie par récurrence en posant $x_0 = x$, $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers z.

Démonstration. Montrons d'abord que, si un point fixe existe, il est unique : supposons que z, z' sont deux points fixes et $z \neq z'$. Alors on a

$$d(z, z') = d(f(z), f(z')) \leq kd(z, z') < d(z, z') \ ,$$

ce qui est une contradiction.
Fixons maintenant $x \in X$, et considérons la suite d'itérés $(x_n) = (f^n(x))$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$d(f^{n+1}(x), f^n(x)) = d(f(f^n(x)), f(f^{n-1}(x))) \leq kd(f^n(x), f^{n-1}(x))$$

On en déduit par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad d(f^{n+1}(x), f^n(x)) \leq k^n d(f(x), x)$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme la série $\sum k^n$ converge (c'est une série géométrique de raison dans $[0, 1[$), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=N}^{+\infty} k^i d(x, f(x)) < \varepsilon$.
Prenons n, m tels que $N \leq n < m$. On a alors :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) \\ &\leq \sum_{i=n}^{m-1} k^i d(x, f(x)) \\ &\leq \sum_{i=N}^{+\infty} k^i d(x, f(x)) \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

On vient de montrer que (x_n) est une suite de Cauchy, par conséquent elle converge puisque (X, d) est complet. Notons z sa limite. Puisque f est continue, on a

$$\begin{aligned} f(z) &= f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \\ &= \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} \\ &= z \end{aligned}$$

$\square$

Attention!
Il faut bien faire attention à vérifier toutes les hypothèses du théorème...

- Si X est le cercle unité de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, muni de la distance induite, alors une rotation d'angle $\alpha \neq 0[2\pi]$ est une isométrie (donc 1-lipschitzienne) mais n'a pas de point fixe.
- Si $X =]0,1[$, et $f\colon x \mapsto \frac{x}{2}$, alors f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne mais n'a pas de point fixe.

Le théorème du point fixe de Picard est souvent utilisé pour résoudre des équations ; on utilise fréquemment le raisonnement de l'exemple ci-dessous.

Exemple 6.26
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé complet, et $f\colon (E, \|\cdot\|) \to (E, \|\cdot\|)$ une application lipschitzienne de rapport $k < 1$.
On va montrer que pour tout $y \in E$ il existe un unique $x \in E$ tel que $y = x + f(x)$, autrement dit $g\colon x \mapsto x + f(x)$ est bijective.
Soit $y \in E$. On cherche $x \in X$ tel que $g(x) = y$, c'est-à-dire $x + f(x) = y$.
On reformule cela sous forme de recherche de point fixe : on introduit $g_y\colon E \to E$ définie par $g_y(x) = y - f(x)$.
Alors g_y est aussi k-lipschitzienne ; de plus, pour tout $x \in E$ on a

$$g(x) = y \Leftrightarrow y = x + f(x) \Leftrightarrow x = y - f(x) \Leftrightarrow x = g_y(x)$$

Par conséquent, $g(x) = y$ si et seulement si x est un point fixe de g_y : l'unique point fixe de g_y est aussi l'unique x tel que $f(x) = y$, ce qui montre que g est bijective.

6.5 Prolongement des applications uniformément continues

Lemme 6.27
Soit (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ une fonction uniformément continue. Alors, pour toute suite de Cauchy (x_n) d'éléments de (X, d_X), la suite $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy dans (Y, d_Y).

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme f est supposée uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, x' \in X$ on ait

$$d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

Puisque (x_n) est de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d_X(x_n, x_m) < \delta$ pour tout $n, m \geq N$, ce qui implique que $d_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ pour tout $n, m \geq N$. $\square$

Théorème 6.28 (Prolongement des applications uniformément continues)
Soit (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques, A une partie de (X, d_X) et $f : A \to Y$ une fonction. On suppose que (Y, d_Y) est complet, et que f est uniformément continue.
Alors, il existe une unique application continue $g : \overline{A} \to Y$ qui *prolonge* f, c'est-à-dire telle que

$$\forall a \in A \quad g(a) = f(a)$$

De plus g est uniformément continue.

Démonstration. Quitte à remplacer X par $\overline{A}$, on peut supposer que A est dense dans (X, d_X), ce qu'on fait dans la suite.
L'unicité d'une fonction g continue et prolongeant f (si elle existe) est facile à vérifier : si g_1, g_2 sont deux fonctions continues alors $F = \{x \in X : g_1(x) = g_2(x)\}$ est un fermé. Si g_1 et g_2 sont toutes deux égales à f sur A alors ce fermé contient A, donc $\overline{F} = X$, autrement dit $g_1 = g_2$.

Comment construire un prolongement de f ? On n'a pas beaucoup de choix : pour tout $x \in X$ il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers x ; on doit avoir

$$g(x) = \lim_{n \to +\infty} g(a_n) = \lim_{n \to +\infty} f(a_n)$$

On doit donc montrer que cette définition en est bien une, autrement dit, il nous faut justifier que, si (a_n) est une suite d'éléments de A qui converge vers x, alors $f(a_n)$ converge dans Y ; puis que, si (b_n) est une autre suite d'éléments de A convergeant vers x, alors $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ ont la même limite.
Pour vérifier le premier point, fixons $x \in X$, et (a_n) une suite d'éléments de A qui converge vers x. Alors (a_n) est de Cauchy ; nos hypothèses et le lemme 6.27 nous assurent que $(f(a_n))$ est également une suite de Cauchy. Comme (Y, d_Y) est complet, on en conclut que $(f(a_n))$ est convergente.
Reste à montrer que cette limite ne dépend pas du choix de suite convergeant vers x. Pour cela, considérons deux suites (a_n), (a'_n) d'éléments de A qui convergent vers x ; alors la suite (b_n) définie par

$$\begin{cases} b_{2n} & = a_n \\ b_{2n+1} & = a'_n \end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ est aussi une suite d'éléments de A qui converge vers x.
Donc $(f(b_n))$ converge, ce qui n'est possible que si $(f(a_n))$ et $(f(a'_n))$ ont la même limite.
Nous venons de prouver que f admet une limite en x pour tout $x \in X$, par conséquent (voir le théorème 3.29) on peut la prolonger par continuité à X tout entier.

Expliquons pourquoi le prolongement g est en fait une fonction uniformément continue.
Pour cela, fixons $\varepsilon > 0$, et choisissons δ tel que, pour tout $a, a' \in A$, on ait

$$d_X(a, a') < 3\delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(a')) < \varepsilon$$

Soit $x, x' \in X$ tels que $d_X(x, x') < \delta$. Choisissons deux suites (a_n), (a'_n) d'éléments de A qui convergent respectivement vers x et x'.
Pour n suffisamment grand, on a à la fois

$$d_X(a_n, x) < \delta \ , \ d_X(a'_n, x) < \delta \ , \ d_Y(f(a_n), g(x)) < \varepsilon \ , \ \text{et } d_Y(f(a'_n), g(x)) < \varepsilon$$

Il nous reste à noter que

$$d_X(a_n, a'_n) \leq d_X(a_n, x) + d_X(x, x') + d_X(x', a'_n) < 3\delta$$

donc $d_Y(f(a_n), f(a'_n)) < \varepsilon$ puis

$$\begin{array}{rcl} d_Y(g(x), g(x')) & \leq & d_Y(g(x), f(a_n)) + d_Y(f(a_n), f(a'_n)) + d_Y(f(a'_n), g(x')) \\ & \leq & \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \\ & = & 3\varepsilon \end{array}$$

Nous venons d'établir que, pour tout $x, x' \in X$, on a $(d_X(x, x') < \delta) \Rightarrow (d_Y(g(x), g(x')) < 3\varepsilon)$. Ceci prouve que g est uniformément continue.

□

☆ Théorème 6.29 (Prolongement des applications linéaires)
Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés.
On suppose que $(Y, \|\cdot\|_Y)$ est complet.
Soit A un sous-espace vectoriel dense de X, et T une application linéaire continue de A vers Y.
Alors T se prolonge de manière unique en une application linéaire et continue $\tilde{T} \colon X \to Y$.
De plus on a $\|\|\tilde{T}\|\| = \|\|T\|\|$

Démonstration. Comme T est linéaire et continue, elle est lipschitzienne sur A.
On peut donc lui appliquer le théorème de prolongement des applications uniformément continues, obtenant ainsi l'existence d'une unique application continue $\tilde{T} \colon X \to Y$ prolongeant T.
Prouvons que $\tilde{T}$ est linéaire ; pour cela, fixons $x, x' \in X$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, trouvons (a_n), (a'_n) des suites d'éléments de A qui convergent vers x, x' respectivement et écrivons

$$\begin{array}{rcl} \tilde{T}(\lambda x + x') & = & \lim\limits_{n \to +\infty} T(\lambda a_n + a'_n) \\ & = & \lim\limits_{n \to +\infty} \lambda T(a_n) + T(a'_n) \\ & = & \lambda \lim\limits_{n \to +\infty} T(a_n) + \lim\limits_{n \to +\infty} T(a'_n) \\ & = & \lambda \tilde{T}(x) + \tilde{T}(x') \end{array}$$

Donc $\tilde{T}$ est linéaire. Clairement,

$$\begin{array}{rcl} \|\|\tilde{T}\|\| & = & \sup\{\|\tilde{T}(x)\|_Y \colon \|x\|_X = 1\} \\ & \geq & \sup\{\|\tilde{T}(x)\|_Y \colon x \in A \text{ et } \|x\|_X = 1\} \\ & = & \|\|T\|\| \end{array}$$

Pour établir l'inégalité réciproque, fixons $x \in X$ et trouvons une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers x. On a alors

$$\|\tilde{T}(x)\|_Y = \lim_{n \to +\infty} \|T(a_n)\|_Y$$

et $\|T(a_n)\|_Y \leq \|\|T\|\| \cdot \|a_n\|_X$ pour tout n. En passant à la limite, on obtient donc

$$\|\tilde{T}(x)\|_Y \leq \|\|T\|\| \cdot \|x\|_X$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in X$, on a établi $\|\|\tilde{T}\|\| \leq \|\|T\|\|$, donc finalement $\|\|\tilde{T}\|\| = \|\|T\|\|$. □

Définition 6.30
Soit (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques, et $f\colon X \to Y$. On dit que f est une *isométrie* si

$$\forall x, x' \in X \quad d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$$

Théorème 6.31 (Théorème de prolongement des isométries)
Soit (X, d_X) un espace métrique, A une partie dense de X, (Y, d_Y) un espace métrique complet, et $f\colon (A, d_X) \to (Y, d_Y)$ une isométrie
Alors f se prolonge uniquement en une isométrie $\tilde{f}\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$.
Si de plus (X, d_X) est complet et $f(A)$ est dense dans (Y, d_Y) alors $\tilde{f}$ est surjective.

Démonstration. Comme toute isométrie est 1-lipschitzienne, donc uniformément continue, le théorème 6.28 garantit que f se prolonge uniquement en une application continue $\tilde{f}\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$.
Montrons que $\tilde{f}$ est une isométrie ; pour cela, fixons $x, x' \in X$ et prenons des suites $(a_n), (a'_n)$ d'éléments de A qui convergent respectivement vers x et x'.
En utilisant la continuité de $\tilde{f}$ et le fait que f est une isométrie, on obtient :

$$\begin{aligned} d_Y(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x')) &= \lim_{n \to +\infty} d_Y(\tilde{f}(a_n), \tilde{f}(a'_n)) \\ &= \lim_{n \to +\infty} d_Y(f(a_n), f(a'_n)) \\ &= \lim_{n \to +\infty} d_X(a_n, a'_n) \\ &= d_X(x, x') \end{aligned}$$

Donc $\tilde{f}$ est bien une isométrie.

Supposons maintenant (X, d_X) complet et $f(A)$ dense dans (Y, d_Y).
Montrons que $(\tilde{f}(X), d_Y)$ est complet : si (y_n) est une suite de Cauchy dans cet espace, on peut trouver une suite (x_n) d'éléments de X tels que $\tilde{f}(x_n) = y_n$.
Comme $d_X(x_n, x_m) = d_Y(\tilde{f}(x_n), \tilde{f}(x_m)) = d_Y(y_n, y_m)$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, la suite (x_n) est de Cauchy, donc converge vers x.
Par continuité de $\tilde{f}$, la suite $y_n = \tilde{f}(x_n)$ converge vers $\tilde{f}(x) \in \tilde{f}(X)$. Donc $\tilde{f}(X)$ est complet.
Pour conclure, il nous reste à remarquer que $\tilde{f}(X)$ est fermé dans (Y, d_Y) puisqu'il est complet ; et dense dans (Y, d_Y) puisque $f(A) \subseteq \tilde{f}(X)$ et on a supposé $f(A)$ dense.
Par conséquent, $\tilde{f}(X) = Y$. □

6.6 Complété d'un espace métrique

Définition 6.32
Soit (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques. On dit que (Y, d_Y) est un *complété* de (X, d_X) si

(i) X est contenu dans Y, et d_X est la restriction de d_Y à X.

(ii) (Y, d_Y) est complet.

(iii) X est dense dans (Y, d_Y).

Un exemple (fondamental !) : $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est le complété de $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$.

Théorème 6.33

Chaque espace métrique (X, d_X) admet un complété (Y, d_Y). Ce complété est unique, dans le sens suivant :
Si (Y, d_Y) et (Z, d_Z) sont deux complétés de (X, d_X), alors il existe une isométrie de (Y, d_Y) vers (Z, d_Z) qui est égale à l'identité sur X.

Démonstration. L'unicité du complété est une conséquence du théorème de prolongement des isométries : supposons que $X \subseteq (Y, d_Y)$, $X \subseteq (Z, d_Z)$, et (Y, d_Y), (Z, d_Z) sont deux complétés de (X, d_X).
L'application $id\colon (X, d_Y) \to (X, d_Z)$ est une isométrie qui envoie un sous-espace dense de Y vers un sous-espace dense de Z. Comme (Y, d_Y) et (Z, d_Z) sont complets, cette isométrie s'étend en une isométrie de (Y, d_Y) vers (Z, d_Z).

Reste à justifier l'existence d'un complété ; pour cela, il nous suffit de justifier qu'il existe un espace métrique complet (Y, d_Y), et une isométrie $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$, puisqu'alors (en identifiant X à $f(X)$) $\overline{X}$ sera un complété de (X, d_X).
La preuve la plus classique consiste à construire le complété en "ajoutant une limite" pour chaque suite de Cauchy d'éléments de (X, d_X) qui ne converge pas (via l'introduction d'une relation d'équivalence sur les suites de Cauchy, et un passage au quotient par cette relation d'équivalence) ; puis à étendre la distance de (X, d_X) à ce nouvel espace.
On va procéder autrement ici (la construction classique susmentionnée est détaillée un peu plus bas).
Fixons $x_0 \in X$, et considérons l'espace $(C_b(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, dont on a vu plus haut qu'il est complet.
Pour tout $x \in X$, on introduit la fonction $f_x\colon X \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_x(y) = d_X(x, y) - d_X(y, x_0)$$

Alors f_x est une fonction continue ; de plus l'inégalité triangulaire assure que $|f_x(y)| \leq d_X(x, x_0)$ pour tout $y \in X$, par conséquent $f_x \in C_b(X, \mathbb{R})$.
On va maintenant prouver que $x \mapsto f_x$ est une isométrie de (X, d_X) vers $(C_b(X), \|\cdot\|_\infty)$.
Pour cela, considérons $x, x', y \in X$, et calculons

$$|f_x(y) - f_{x'}(y)| = |d_X(x, y) - d_X(x', y)| \leq d_X(x, x')$$

Par conséquent, on a $\|f_x - f_{x'}\|_\infty \leq d_X(x, x')$. Si l'on prend $y = x'$ par exemple, on voit que

$$f_x(x') - f_{x'}(x') = d_X(x, x')$$

Cela entraîne $\|f_x - f_{x'}\|_\infty \geq d_X(x, x')$, et on conclut que $\|f_x - f_{x'}\|_\infty = d_X(x, x')$.
Par conséquent, $x \mapsto f_x$ est une isométrie de (X, d_X) dans un espace vectoriel normé complet, ce qui suffit à prouver que (X, d_X) admet un complété. □

Remarque 6.34
La preuve ci-dessus établit aussi que tout espace métrique peut être vu comme un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé complet, muni de la distance induite.

Esquissons une autre construction classique du complété d'un espace métrique (X, d_X) (sans donner tous les détails ; beaucoup de vérifications sont laissées en exercice).
L'idée est la suivante : si (X, d_X) n'est pas complet, c'est que certaines suites de Cauchy d'éléments de (X, d_X) n'ont pas de limite. À chaque fois qu'on a une telle suite, il faut donc ajouter un nouvel élément à (X, d_X). Et on doit aussi arriver à définir une distance sur cet ensemble plus gros, qui coïncide avec d_X sur X.
On commence par considérer l'ensemble Y des suites de Cauchy d'éléments de (X, d_X) (formellement, Y est donc un sous-ensemble de $X^{\mathbb{N}}$). Puis on envoie X dans Y via l'application

$$\delta \colon x \mapsto (x, x, \ldots)$$

Autrement dit, $\delta(x)$ est la suite constante égale à x.
Considérons maintenant deux éléments $u = (u_n)$, $v = (v_n)$ de Y, c'est-à-dire deux suites de Cauchy d'éléments de (X, d_X). Fixons $\varepsilon > 0$; il existe N tel que pour tout $n, m \geq N$ on ait à la fois

$$d_X(u_n, u_m) \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad d_X(v_n, v_m) \leq \varepsilon$$

Montrons que la suite $(r_n) = (d_X(u_n, v_n))$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$: pour cela, il suffit de noter que pour tout $n, m \geq N$ on a

$$\begin{array}{rcl} |r_n - r_m| & = & |d_X(u_n, v_n) - d_X(u_m, v_m)| \\ & \leq & |d_X(u_n, v_n) - d_X(u_m, v_n)| + |d_X(u_m, v_n) - d_X(u_m, v_m)| \\ & \leq & d_X(u_n, u_m) + d_X(v_n, v_m) \\ & \leq & 2\varepsilon \end{array}$$

Donc la suite $(d_X(u_n, v_n))$ converge dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ puisque cet espace est complet, et on peut poser

$$d_Y(u, v) = \lim_{n \to +\infty} d_X(u_n, v_n)$$

Notre fonction d_Y satisfait l'inégalité triangulaire, et est symétrique (on laisse la vérification en exercice) ; mais elle ne satisfait pas l'axiome de séparation : par exemple, si u, v sont deux suites convergentes d'éléments de (X, d_X) avec la même limite, on a $d_Y(u, v) = 0$.
Qu'à cela ne tienne : on remarque que la relation $\sim$ définie sur Y par

$$(u \sim v) \Leftrightarrow (d_Y(u, v) = 0)$$

est une relation d'équivalence. On peut alors considérer l'espace quotient

$$Z = Y/\sim$$

et le munir d'une distance d_Z, obtenue en remarquant que d_Y passe au quotient.
Alors (Z, d_Z) est un espace métrique, et l'application δ induit une application de X dans (Z, d_Z), qui est une isométrie puisque pour tout $x, x' \in X$ on a

$$d_Z(\delta(x), \delta(x')) = \lim_{n \to +\infty} d_X(x, x') = d_X(x, x')$$

Il est relativement simple, une fois qu'on a compris toutes ces définitions, de montrer que $\delta(X)$ est dense dans (Z, d_Z).
Reste à montrer que (Z, d_Z) est complet. Pour cela, il suffit (par densité de $\delta(X)$) de vérifier que toute suite de Cauchy d'éléments de (X, d_X) admet une limite dans (Z, d_Z). Et un simple calcul permet de vérifier que, si (u_n) est une telle suite, alors la suite $(\delta(u_n))$ converge vers (la classe de) u dans (Z, d_Z).

6.7 Théorème d'Ascoli

Notre but dans cette section est de fournir une caractérisation des parties compactes des espaces métriques de la forme $(C(X,Y), d_{sup})$, où (X, d_X) est un espace métrique compact et (Y, d_Y) est un espace métrique complet. Pour cela, il nous faut introduire un peu de vocabulaire.

Définition 6.35

Soit (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques. On note $C(X,Y)$ l'espace des fonctions continues de (X, d_X) vers (Y, d_Y).
Un ensemble $A \subseteq C(X,Y)$ est *équicontinu* en $x \in X$ si :

$$\forall f \in A \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x' \in X \ d_X(x, x') \leq \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$$

On dit que A est *équicontinu* s'il est équicontinu en x pour tout $x \in X$.

La définition de l'équicontinuité revient à dire que, dans la définition (ε, δ) de la continuité, on peut prendre le même δ pour tous les éléments de A, à ε et x fixés. On pourrait encore renforcer la définition, en demandant à ce que (à ε fixé) le même δ marche pour tout $f \in A$ et tout $x \in X$.
Cela nous amène à la définition suivante.

Définition 6.36

Soit (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques.
Un ensemble $A \subseteq C(X,Y)$ est *uniformément équicontinu* sur X si

$$\forall f \in A \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, x' \in X \ d_X(x, x') \leq \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$$

La théorème de Heine se généralise aux ensembles de fonctions, de la façon suivante.

Théorème 6.37

Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques.
On suppose que (X, d_X) est compact, et que $A \subseteq C(X,Y)$ est équicontinu.
Alors A est uniformément équicontinu.

Dans le cas où A n'a qu'un seul élément, on retrouve exactement l'énoncé du théorème de Heine.

Démonstration. Plaçons nous dans le cadre des hypothèses du théorème, et fixons $\varepsilon > 0$. Comme A est équicontinu, il existe pour tout $x \in X$ un $\delta_x > 0$ tel que pour tout $f \in A$ on ait

$$\forall x' \in X \ d_X(x, x') \leq \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$$

Les boules $B\left(x, \dfrac{\delta_x}{2}\right)$ recouvrent X ; par compacité, on peut en extraire un sous-recouvrement fini, autrement dit il existe $x_1, \ldots, x_n \in X$ tels que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right)$$

Pour alléger un peu la notation, on va maintenant noter $\delta_i = \delta_{x_i}$. Soit

$$\delta = \min\left\{\frac{\delta_i}{2} : i \in \{1, \ldots, n\}\right\} > 0$$

Soit x, x' tels que $d_X(x, x') \leq \delta$. Il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $d_X(x, x_i) \leq \dfrac{\delta_i}{2}$, et alors on a aussi

$$d_X(x', x_i) \leq d(x', x) + d(x, x_i) \leq \delta + \frac{\delta_i}{2} \leq \delta_i$$

Soit $f \in A$. Il suit des inégalités précédentes, et de la définition des δ_i, qu'on a à la fois

$$d_Y(f(x), f(x_i)) \leq \varepsilon \text{ et } d_Y(f(x'), f(x_i)) \leq \varepsilon$$

On vient d'établir la proposition suivante :

$$\forall f \in A \ \forall x, x' \in X \quad (d_X(x, x') \leq \delta) \Rightarrow (d_Y(f(x), f(x')) \leq 2\varepsilon)$$

Ceci établit que A est uniformément équicontinu. □

☆ Lemme 6.38

Soit (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques, et (f_n) une suite d'éléments de $C(X, Y)$. Soit D une partie dense dans (X, d_X).
On suppose que (f_n) est uniformément équicontinue, et que $(f_n(x))$ converge pour tout $x \in D$. Alors (f_n) est une suite de Cauchy dans $(C(X, Y), d_{sup})$.

En particulier, si on suppose aussi que (Y, d_Y) est complet, il suffit (si on sait que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille équicontinue) de vérifier que $(f_n(x))$ converge pour tout $x \in D$ pour conclure que (f_n) converge uniformément.

Démonstration. Plaçons nous dans le cadre de l'énoncé ; fixons $\varepsilon > 0$, et trouvons $\delta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$\forall x, x' \in X \quad d_X(x, x') \leq \delta \Rightarrow d_Y(f_n(x), f_n(x')) \leq \varepsilon$$

Puisque D est dense dans (X, d_X), on a

$$X = \bigcup_{x \in D} B(x, \delta)$$

Par compacité de X, on peut donc trouver $x_1, \ldots, x_p \in D$ tels que

$$X = \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \delta)$$

Puisque chaque suite $(f_n(x_i))$ est convergente, et donc de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n, m \geq N \ \forall i \in \{1, \ldots, p\} \quad d_Y(f_n(x_i), f_m(x_i)) \leq \varepsilon$$

Fixons maintenant $n, m \geq N$, et $x \in X$. alors on a i tel que $x \in B(x_i, \delta)$, et

$$\begin{array}{rcl} d_Y(f_n(x), f_m(x)) & \leq & d(f_n(x), f_n(x_i)) + d(f_n(x_i), f_m(x_i)) + d(f_m(x_i), f_m(x)) \\ & \leq & \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \\ & = & 3\varepsilon \end{array}$$

On vient de montrer que pour tout $n, m \geq N$ on a $d_{sup}(f_n, f_m) \leq 3\varepsilon$, c'est-à-dire que (f_n) est une suite de Cauchy dans $(C(X, Y), d_{sup})$. □

Définition 6.39

Soit (X, d) un espace métrique, et A une partie de X.
On dit que A est *relativement compact* si $\overline{A}$ est compact.

Lemme 6.40

Soit (X, d) un espace métrique, et A une partie de X. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est relativement compact.

(ii) Toute suite (a_n) d'éléments de A admet une sous-suite convergente dans (X, d).

Démonstration. Supposons A relativement compact, et considérons une suite (a_n) d'éléments de A. Alors (a_n) est une suite d'éléments du compact $(\overline{A}, d)$, donc admet une sous-suite convergente dans $(\overline{A}, d)$, donc dans (X, d).

Supposons la deuxième condition vérifiée, et soit (b_n) une suite d'éléments de $\overline{A}$. Pour tout n, on peut trouver $a_n \in A$ tel que

$$d(a_n, b_n) \leq 2^{-n}$$

Par hypothèse, la suite (a_n) admet une sous-suite $(a_{\varphi(n)})$ qui converge vers $x \in X$; notons tout de suite que $x \in \overline{A}$ puisque $a_{\varphi(n)} \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, on a pour tout n

$$d(b_{\varphi(n)}, x) \leq d(b_{\varphi(n)}, a_{\varphi(n)}) + d(a_{\varphi(n)}, x) \leq 2^{-\varphi(n)} + d(a_{\varphi(n)}, x)$$

Puisque $2^{-\varphi(n)} \to 0$, on voit que $(b_{\varphi(n)})$ converge également vers $x \in \overline{A}$, ce qui montre que $(\overline{A}, d)$ est compact. □

☆ Théorème 6.41 (Théorème d'Ascoli)

Soit (X, d_X) un espace métrique compact, (Y, d_Y) un espace métrique complet, et $A \subseteq C(X, Y)$. Alors A est relativement compact dans $(C(X, Y), d)$ si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. Pour tout $x \in X$ l'ensemble $\{f(x) \colon f \in A\}$ est relativement compact.
2. A est équicontinu.

Démonstration. Supposons A relativement compact ; l'application δ_x, qui à $f \in C(X, Y)$ associe $f(x)$, est une application continue de $(C(X, Y), d_{sup})$ dans Y.
En effet, la définition de d_{sup} entraîne que δ_x est 1-lipschitzienne :

$$\forall f, g \in C(X, Y) \quad d_Y(\delta_x(f), \delta_x(g)) = d_Y(f(x), g(x)) \leq d_{sup}(f, g)$$

Puisque $\overline{A}$ est compact, $\delta_x(\overline{A})$ est compact, et $\delta_x(A)$ est contenu dans $\delta_x(\overline{A})$. Par conséquent,

$$\delta_x(A) = \{f(x) \colon f \in A\}$$

est relativement compact.

Montrons maintenant que $B = \overline{A}$ est équicontinu. Pour cela, fixons $\varepsilon > 0$ et $x \in X$. Comme B est compact, il existe $f_1, \ldots, f_n \in B$ telles que

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(f_i, \varepsilon)$$

Chaque f_i étant continue en x, il existe $\delta_i > 0$ tel que

$$\forall x' \in X \quad d_X(x, x') < \delta_i \Rightarrow d_Y(f_i(x), f_i(x')) < \varepsilon$$

Posons $\delta = \min\{\delta_i \colon i = 1, \ldots, n\}$, et fixons $f \in A$.
On peut trouver $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $d_{sup}(f, f_i) < \varepsilon$.
Soit $x' \in X$ tel que $d_X(x, x') < \delta$; en particulier $d_X(x, x') < \delta_i$ et on peut écrire :

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(x')) &\leq d_Y(f(x), f_i(x)) + d_Y(f_i(x), f_i(x')) + d_Y(f_i(x'), f_i(x)) \\ &\leq d_{sup}(f, f_i) + \varepsilon + d_{sup}(f, f_i) \\ &\leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

On a fini de montrer une implication du théorème d'Ascoli ; pour établir la réciproque, supposons que A satisfait les conditions (1) et (2) ci-dessus. En particulier, comme (X, d_X) est compact, le théorème 6.37 assure que A est en fait un ensemble uniformément équicontinu.
Soit (f_n) une suite d'éléments de A ; on doit prouver qu'elle admet une sous-suite convergente.
On a déjà vu, au lemme 4.51, que tout compact métrique est séparable. On peut donc choisir un sous-ensemble dénombrable D dense dans (X, d_X).
Pour tout $x \in X$, notons

$$A_x = \delta_x(A) = \{f(x) \colon f \in A\}$$

Alors $Z = \prod_{x \in D} (A_x, d_Y)$ est un produit dénombrable d'espaces métriques compacts, et est donc compact.

De plus, pour tout n la restriction g_n de f_n à D appartient à Z. On peut donc en extraire une sous-suite convergente $(g_{\varphi(n)})$; autrement dit, on peut trouver $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et telle que $(f_{\varphi(n)}(x))$ soit convergente pour tout $x \in D$.
Mais alors, le lemme 6.38 nous assure que $(f_{\varphi(n)})$ est une suite de Cauchy, qui converge dans $(C(X,Y), d_{sup})$ puisque ce dernier est complet (rappelons qu'on a supposé que (Y, d_Y) est complet). □

6.8 Théorème de Baire

Cette section est hors-programme.
Une raison pour laquelle on est souvent amené à manipuler des espaces complets en analyse est qu'il satisfont le théorème de Baire, qu'on va discuter dans cette section. Ce théorème permet de définir une notion de partie "grosse" plus robuste que celle de partie dense, et est fréquemment utilisé pour justifier l'existence de certains objets, souvent de nature apparemment pathologique.

☆ Théorème 6.42 (Théorème de Baire)
Soit (X,d) un espace métrique complet, et (O_n) une suite d'ouverts denses dans (X,d). Alors

$$O = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$$

est dense dans (X,d).

Démonstration. Soit U un ouvert non vide de (X,d). On construit par récurrence une suite d'ouverts non vides (U_n) tels que les conditions suivantes soient satisfaites, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $U_n \subseteq U \cap \bigcap_{i=0}^{n} O_i$.
- $\overline{U_{n+1}} \subseteq U_n$.
- $\mathrm{diam}(U_n) \leq 2^{-n}$.

Justifions que cela est possible : pour trouver U_0, on utilise le fait que O_0 est dense, donc $O_0 \cap U$ est un ouvert non vide de X. On peut trouver une boule $B(x,r)$, de rayon $r \leq 1$, contenue dans $O_0 \cap U$; alors on pose

$$U_0 = B(x, \frac{r}{2})$$

Supposons maintenant avoir construit $U_0, \ldots, U_n$. Comme une intersection finie d'ouverts denses est encore un ouvert dense, $U_n \cap \bigcap_{i=0}^{n} O_i$ est un ouvert non vide, et on applique un raisonnement similaire à celui employé ci-dessus pour trouver U_{n+1}.
Pour conclure, notons que $\bigcap \overline{U_n}$ est une suite décroissante de fermés dont le diamètre tend vers 0 ; comme (X,d) est complet, il existe donc $x \in X$ tel que

$$\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n}$$

Puisque $\overline{U_{n+1}} \subset U_n$ pour tout n, on voit que $x \in \bigcap_{n \in N} U_n = O$; de plus $U_n \subseteq U$ donc $x \in U$.
On vient de prouver que $O \cap U \neq \emptyset$: comme annoncé, O est dense. □

Définition 6.43

Soit (X, d) un espace métrique complet, et $A \subseteq X$. On dit que :

- A est *comaigre* s'il existe une suite d'ouverts denses (O_n) telle que $A \supseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$.
- A est *maigre* si $X \setminus A$ est comaigre, autrement dit s'il existe des fermés F_n tels que chaque F_n soit d'intérieur vide, et $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Le théorème de Baire affirme que, dans un espace complet, une partie comaigre est dense ; comme l'intersection de deux parties comaigres est encore une partie comaigre, on voit qu'une partie ne peut pas à la fois être maigre et comaigre. En particulier, l'espace X tout entier n'est pas maigre.

Exemple 6.44

Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcap_{q\in\mathbb{Q}} (\mathbb{R} \setminus \{q\})$ est comaigre ; et $\mathbb{Q}$ est maigre.

Théorème 6.45

Soit (X, d) un espace métrique complet.

- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties comaigres dans (X, d), alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est une partie comaigre dans (X, d).
- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties maigres dans (X, d), alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est une partie maigre dans (X, d).

Démonstration. Montrons seulement la première propriété, la seconde s'en déduisant par passage au complémentaire ; soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties comaigres. Pour tout n il existe des ouverts denses $O_{n,i}$ tels que

$$A_n \supseteq \bigcap_{i\in\mathbb{N}} O_{n,i}$$

Alors on a

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \supseteq \bigcap_{n,i\in\mathbb{N}} O_{n,i}$$

Comme $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ est dénombrable, on voit ainsi que A contient une intersection dénombrable d'ouverts denses : A est comaigre. □

L'idée intuitive à retenir est que les parties maigres fournissent une notion de partie négligeable, analogue à la notion de partie de mesure nulle : toute partie contenue dans une partie maigre est maigre ; une union dénombrable de parties maigres est encore maigre ; et l'espace X tout entier n'est pas maigre puisque le complémentaire d'une partie maigre est dense (pourvu que (X, d) soit complet et non vide).
Voyons deux exemples classiques d'applications du théorème de Baire.

Théorème 6.46
Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé complet, de dimension infinie. Alors une base de X ne peut pas être dénombrable.

Comme $\mathbb{R}[X]$ est un espace vectoriel admettant une base (infinie) dénombrable, on voit qu'il n'existe pas de norme complète sur $\mathbb{R}[X]$.

Démonstration. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille libre dans X, qui existe puisque X est de dimension infinie. Pour tout n on note

$$F_n = \mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_n)$$

Alors chaque F_n est de dimension finie, donc est fermé dans $(X, \|\cdot\|)$.
Montrons que chaque F_n est d'intérieur vide ; supposons que ce n'est pas le cas, et trouvons n, $r > 0$ et $x \in F_n$ tels que $B(x, r) \subseteq F_n$.
Soit $y \in X$, différent de 0. Alors

$$z = x + r\frac{y}{2\|y\|}$$

appartient à $B(x, r)$, donc à F_n. Mais alors,

$$y = \frac{2\|y\|}{r}(z - x)$$

appartient aussi à F_n.
Donc si F_n est d'intérieur non vide alors $F_n = X$, ce qui est exclu puisque X est supposé ne pas être de dimension finie.
On a ainsi établi que les F_n forment une famille dénombrable de fermés d'intérieur vide : comme $(X, \|\cdot\|)$ est complet, on ne peut pas avoir $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, par conséquent la famille (e_n) n'est pas génératrice. $\square$

Puisque ce cours se fait en parallèle avec un cours de théorie de la mesure, poussons l'analogie un peu plus loin (la fin de cette section est encore plus hors-programme que son début...).

Définition 6.47
Soit (X, d) un espace métrique complet, et A une partie de (X, d).
On dit que A est *Baire-mesurable* s'il existe un ouvert U de (X, d) tel que la différence symétrique $A\Delta U$ soit maigre.

Théorème 6.48
Soit (X, d) un espace métrique complet. Les parties Baire-mesurables forment une σ-algèbre, qui contient la tribu borélienne.

En particulier, on voit qu'une partie A est Baire-mesurable si, et seulement si, il existe un borélien B tel que $A \Delta B$ soit maigre - autrement dit, une partie est Baire-mesurable si, et seulement si, elle est égale à un borélien modulo un ensemble négligeable. Toute analogie avec les notions vues en cours de théorie de la mesure ne serait pas purement fortuite.

Démonstration. Clairement, les ouverts sont Baire-mesurables, puisque pour tout U on peut écrire

$$U \Delta U = \emptyset$$

et $\emptyset$ est maigre.
Si on montre que les parties Baire-mesurables forment une σ-algèbre, on aura alors aussi montré que cette σ-algèbre contient les boréliens, par définition de la tribu borélienne. Notons que, si (A_i) est une suite de parties Baire-mesurables, et qu'on a pour tout i

$$A_i \Delta U_i = M_i$$

avec U_i ouvert et M_i maigre, alors

$$\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \Delta \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i\right) \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \Delta U_i \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$$

Comme $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ est ouvert et $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$ est maigre, on conclut que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ est Baire-mesurable.
Reste à justifier la stabilité par passage au complémentaire ; si $A \Delta U = M$ alors on a aussi

$$(X \setminus A) \Delta (X \setminus U) = M$$

Si on arrive à montrer que tout fermé de (X, d) est Baire-mesurable, alors il existe un ouvert O et une partie maigre N tels que $(X \setminus U) \Delta O = N$, et alors

$$(X \setminus A) \Delta O \subset M \cup N$$

ce qui permettra de conclure.
Finalement, il nous reste à démontrer que tout fermé est Baire-mesurable ; pour cela, notons que si F est fermé alors $\delta F = F \setminus \mathring{F}$ est fermé d'intérieur vide, donc maigre, et

$$F \Delta \mathring{F} = \delta F$$

Donc F est Baire-mesurable, comme annoncé. $\square$

Dans ces notes, on ne fera rien de ces parties Baire-mesurables, qui étaient surtout un prétexte pour manipuler quelques opérations ensemblistes et mentionner l'analogie avec la théorie de la mesure.
Concluons cette section avec une dernière application classique du théorème de Baire.

☆ Théorème 6.49
L'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables est comaigre dans $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

On a déjà établi que $(C([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ est complet ; le théorème ci-dessus nous permet ainsi de voir qu'il existe des fonctions continues nulle part dérivables (ce qu'on pourrait aussi établir sans le théorème de Baire)

Démonstration. Pour simplifier la notation, on va noter $E=(C([0,1],\mathbb{R})$. Pour un entier n donné, on considère

$$F_n=\{f\in E\colon \exists x\in[0,1]\ \forall y\in[0,1]\ |f(y)-f(x)|\leq n|y-x|\}$$

Pour justifier l'introduction de cet ensemble, notons que si f est dérivable en x alors le taux d'accroissement

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

admet une limite finie quand $y\to x$. Donc il existe $\delta>0$ et n tel que

$$|f(y)-f(x)|\leq n|y-x|$$

pour y tel que $|y-x|\leq\delta$; par ailleurs, pour n suffisamment grand et y tel que $|y-x|\geq\delta$ on a

$$n|y-x|\geq n\delta\geq 2\|f\|_\infty\geq|f(y)-f(x)|$$

On voit donc que si f est dérivable en x, alors x témoigne du fait que f appartient à F_n pour n suffisamment grand.
Par conséquent, notre but est de montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est maigre : son complémentaire sera un ensemble comaigre, dont tous les éléments sont des fonctions continues nulle part dérivables.

Montrons que F_n est fermé : soit (f_i) une suite d'éléments de F_n qui converge vers f dans $(E,\|\cdot\|_\infty)$. Pour tout i on a $x_i\in[0,1]$ tel que

$$\forall y\in[0,1]\quad |f_i(y)-f_i(x_i)|\leq n|y-x|$$

Par compacité de $[0,1]$, on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi(i)})$ de (x_i) qui converge vers $x\in[0,1]$. On a pour tout i

$$\begin{array}{rcl} |f_{\varphi(i)}(x_{\varphi(i)})-f(x)| & \leq & |f_{\varphi(i)}(x_{\varphi(i)})-f(x_{\varphi(i)})|+|f(x_{\varphi(i)})-f(x)| \\ & \leq & \|f_{\varphi(i)}-f\|_\infty+|f(x_{\varphi(i)})-f(x)| \end{array}$$

Comme $f_{\varphi(i)}$ converge uniformément vers f, $x_{\varphi(i)}$ converge vers x, et f est continue, on conclut que

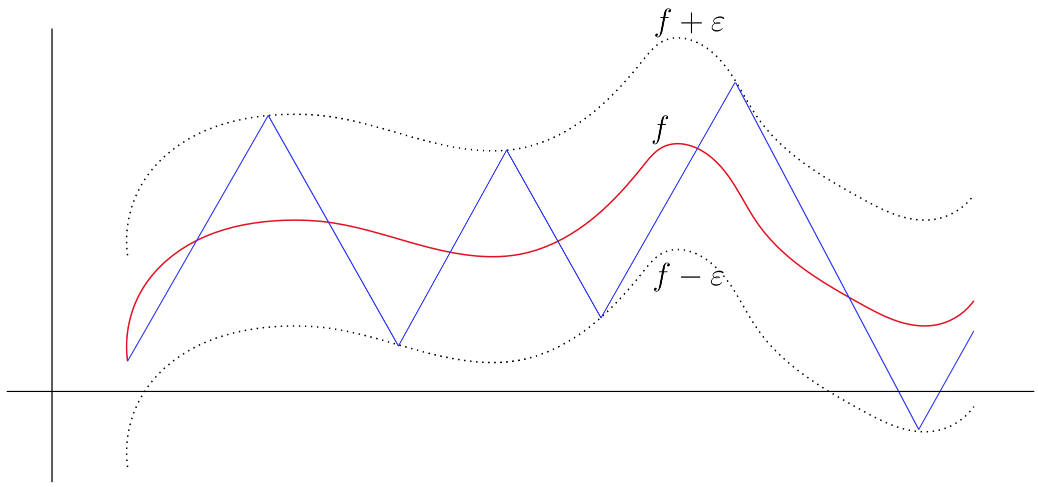
$$|f_{\varphi(i)}(x_{\varphi(i)})-f(x)|$$

tend vers 0 quand i tend vers $+\infty$.
On a alors pour tout $y\in[0,1]$:

$$\begin{array}{rcl} |f(y)-f(x)| & = & \lim\limits_{i\to+\infty}|f_{\varphi(i)}(y)-f_{\varphi(i)}(x_{\varphi(i)})| \\ & \leq & \lim\limits_{i\to+\infty} n|y-x_{\varphi(i)}| \\ & = & n|y-x| \end{array}$$

Donc f appartient à F_n, et F_n est fermé.

Il nous reste à prouver que F_n est d'intérieur vide ; pour cela, fixons $f \in F_n$ et $r > 0$.
On a besoin de trouver une fonction g qui n'appartient pas à F_n, mais est telle que $\|g - f\|_\infty < r$.
Pour cela, on trouve une fonction g, affine par morceaux, avec des pentes de coefficient directeur plus grand que n en valeur absolue, mais qui reste proche de f.
Le dessin suivant donne une idée de cette construction (pas très difficile à mettre en place, en utilisant le fait que f est uniformément continue, mais on va se passer des détails).



En rouge, le graphe de f ; en bleu, le graphe de la fonction g qu'on construit.

Finalement, chaque F_n est un fermé d'intérieur vide, donc leur réunion est maigre dans E. Par conséquent, le complémentaire de $\bigcup_n F_n$ est comaigre, et tous ses éléments sont des fonctions continues et nulle part dérivables. □

Puisqu'on a parlé du lien entre théorie de la mesure et parties maigres/comaigres, concluons par une illustration du fait que les objets construits aléatoirement ont tendance à être réguliers, alors que les objets obtenus par Baire ne le sont souvent pas.

Exemple 6.50

Soit X l'ensemble de Cantor, muni de la mesure de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$; autrement dit, on considère une suite de variables aléatoires uniformes X_i à valeurs dans $\{0, 1\}$, et on regarde la loi de la variable aléatoire associée : pour $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de C, on pose

$$\mu(\mathcal{A}) = \mathbf{P}((X_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A})$$

Alors la loi des grands nombres nous assure que, presque sûrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} X_i = \frac{1}{2}$$

En termes de mesures, cela signifie que si l'on note

$$\mathcal{A} = \left\{ x \in C \colon \lim \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i = \frac{1}{2} \right\}$$

alors $\mu(A) = 1$: avec probabilité 1, notre suite de lancers va, en proportion, donner "pile" une fois sur deux et "face" une fois sur deux.
Baire ne l'entend pas de cette oreille : considérons

$$\mathcal{A}' = \left\{ x \in C \colon \limsup \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i = 1 \right\}$$

Alors un peu de réflexion nous montre que

$$\mathcal{A}' = \bigcap_{m \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} \left\{ x \colon \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i > 1 - \frac{1}{m} \right\}$$

et on en déduit que $\mathcal{A}'$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses, et est donc comaigre.
Le même raisonnement, avec une limite inf (ou en utilisant le fait que $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto (1 - x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est un homéomorphisme de C) permet de voir que

$$\mathcal{A}" = \left\{ x \in C \colon \liminf \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i = 0 \right\}$$

est comaigre.
Par conséquent, les éléments (x_i) de C tels que $\limsup \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i = 1$ et $\liminf \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i = 0$ forment une partie comaigre : du point de vue de la théorie de Baire, la plupart des éléments comportent des suites de 0 consécutifs tellement longues qu'on a l'impression de n'avoir vu presque que des 0 depuis le début ; mais aussi des suites de 1 consécutifs tellement longues qu'on a l'impression de n'avoir presque vu que des 1.
En fait on peut pousser cette idée un peu plus loin pour voir que l'ensemble des $x \in C$ tel que $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i$ est dense dans $[0, 1]$ est comaigre.
On voit ici que, du point de vue d'une mesure naturelle sur C, pour un élément "typique" x la suite $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i$ a un comportement régulier, et converge ; du point de vue de Baire, cette même suite a un comportement imprévisible et oscille énormément.

Le calcul différentiel n'est pas le plat calcul de l'utilitariste, le gros calcul arithmétique qui subordonne la pensée à autre chose comme à d'autres fins, mais l'algèbre de la pensée pure, l'ironie supérieure des problèmes eux-mêmes.

Différence et répétition
G. Deleuze

Deuxième partie

Équations différentielles

Chapitre 1

Révisions

1.1 Un peu de calcul différentiel

Comme on va travailler avec des équations différentielles sur des espaces de dimension finie quelconque, il sera important pour nous de pouvoir utiliser des différentielles de fonctions de plusieurs variables ; il nous faut en particulier bien comprendre ce qu'est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
Les explications ci-dessous sont très rapides, et ne peuvent se substituer à un cours complet sur le sujet ; éventuellement, on pourra les compléter avec les premières vidéos (préparées initialement pour faire réviser des agrégatifs pendant la période de confinement) de la liste accessible ci-contre.
Dans cette section, pour alléger un peu les notations et comme il ne devrait pas y avoir de risque de confusion, on notera toutes les normes par $\|\cdot\|$ (en particulier, il arrivera qu'on utilise la notation $\|\cdot\|$ à la fois pour désigner une norme sur $\mathbb{R}^n$ et une norme sur $\mathbb{R}^m$).

Définition 1.1

Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x \in U$, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ et $g\colon U \to \mathbb{R}$ deux fonctions.
On dit que f *est négligeable devant* g *au voisinage de* x, et on note

$$f(y) = \underset{y \to x}{o}(g(y))$$

s'il existe un ouvert V tel que $x \in V \subseteq U$, et une fonction $\varepsilon\colon V \to \mathbb{R}^+$ telle que

- $\|f(y)\| = \varepsilon(y)|g(y)|$ pour tout $y \in V$.
- $\lim\limits_{y \to x} \varepsilon(y) = 0$.

Quand il n'y a pas de risque de confusion on notera simplement $f = o(g)$.

La notation $f = \underset{y \to x}{o}(1)$ signifie simplement que $\lim\limits_{y \to x} f(x) = 0$; si g ne s'annule pas sur un ouvert contenant x, $f = \underset{y \to x}{o}(g(y))$ est équivalent à $\lim\limits_{y \to x} \dfrac{f(y)}{g(y)} = 0$, et c'est comme cela qu'il faut y penser.

Définition 1.2

Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction.
On dit que f est *différentiable* en $x \in U$ s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ telle que

$$f(y) = f(x) + L(y-x) + \underset{y \to x}{o}(\|y-x\|)$$

On écrira aussi

$$f(x+h) = f(x) + L(h) + \underset{h \to 0}{o}(\|h\|) \text{ ou simplement } f(x+h) = f(x) + L(h) + o(\|h\|)$$

Quand elle existe, l'application linéaire L ci-dessus est unique.

Définition 1.3

Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction, et $x \in U$.
Si f est différentiable en x, on appelle *différentielle de f en x* l'unique application linéaire L telle que

$$f(x+h) = f(x) + L(h) + o(\|h\|)$$

On note $L = Df(x)$.

En dimension 1, on retrouve la notion de dérivée : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en x si, et seulement si, elle est différentiable en x ; et la différentielle de f en x est l'application $h \mapsto f'(x)h$.
Plus généralement, quand U est un ouvert de $\mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}^*$ et $f : U \to \mathbb{R}^d$ est une fonction différentiable, la différentielle de f est de la forme $h \mapsto hy$, où y est un vecteur de $\mathbb{R}^d$ (toutes les applications linéaires de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^d$ sont de cette forme) ; et on note $y = f'(x)$.
Autrement dit, la différentielle de f en x est l'application $h \mapsto hf'(x)$, comme dans le cas des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ (mais cette fois $f'(x)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^d$).

Théorème 1.4 (Règle de la chaîne)

Soit $n, m, p \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V un ouvert de $\mathbb{R}^m$, ainsi que $g : U \to V$, $f : V \to \mathbb{R}^p$ deux fonctions.
Soit $x \in U$ tel que g soit différentiable en x et f soit différentiable en $g(x)$. Alors $f \circ g$ est différentiable en x, et on a

$$D(f \circ g)(x) = Df(g(x)) \circ Dg(x)$$

Démonstration. Pour $h \in \mathbb{R}^n$, de norme suffisamment petite pour que $x + h$ appartienne à U, on a

$$g(x+h) = g(x) + Dg(x)(h) + \varepsilon(h)\|h\|$$

où ε est une fonction qui tend vers 0 quand h tend vers 0.
Pour h assez petit, $g(x+h)$ est arbitrairement proche de $g(x)$, donc appartient à V ; et puisque f est différentiable en $g(x)$ il existe une fonction δ telle que

$$f(g(x)+v) = f(g(x)) + Df(g(x))(v) + \delta(v)\|v\|$$

où δ tend vers 0 quand v tend vers 0.

Notons $h' = Dg(x)(h) + \varepsilon(h)\|h\|$.
Comme g est linéaire continue, il existe une constante M telle que $\|Dg(x)(h)\| \leq M\|h\|$, en particulier h' tend vers 0 quand h tend vers 0 ; et $\|h'\| \leq (M+1)\|h\|$ pour h suffisamment petit
Pour h suffisamment petit, on a donc

$$\begin{aligned} f(g(x+h)) &= f\left(g(x) + h'\right) \\ &= f(g(x)) + Df(g(x))(h') + \delta(h')\|h'\| \end{aligned}$$

Puisque $\|h'\| \leq (M+1)\|h\|$ pour h suffisamment petit, et δ tend vers 0 en 0, $\delta(h')\|h'\| = o(\|h\|)$.
Par ailleurs,

$$\begin{aligned} Df(g(x))(h') &= Df(g(x))(Dg(x)(h) + \varepsilon(h)\|h\|) \\ &= Df(g(x))(Dg(x)(h)) + \|h\| Df(g(x))(\varepsilon(h)) \\ &= Df(g(x)) \circ Dg(x)(h) + o(\|h\|). \end{aligned}$$

En regroupant tout cela, on obtient finalement

$$f(g(x+h)) = f(g(x)) + Df(g(x)) \circ Dg(x)(h) + o(\|h\|)$$

ce qui montre que $f \circ g$ est différentiable en x, de différentielle égale à $Df(g(x)) \circ Dg(x)$. $\square$

Il est particulièrement important de bien comprendre le cas des fonctions à valeurs réelles ; une raison en est que, si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f \colon U \to \mathbb{R}^m$ est une fonction et qu'on note ses coordonnées $(f_1, \dots, f_m)$, alors f est différentiable en $x \in U$ si, et seulement si, chaque f_i est différentiable en x ; et qu'on a alors la formule

$$Df(x)(h) = (Df_1(x)(h), \dots, Df_m(x)(h))$$

Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \colon U \to \mathbb{R}$ est différentiable en un certain $x \in U$, alors $Df(x)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$; si on note $h = (h_1, \dots, h_n)$, il existe donc des réels $a_1, \dots, a_n$ tels que

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i h_i + o(\|h\|)$$

En notant $a = (a_1, \dots, a_n)$, on a donc la formule

$$Df(x)(h) = \langle a, h \rangle \quad \text{(le produit scalaire de } a \text{ et de } h\text{)}$$

Définition 1.5

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f \colon U \to \mathbb{R}$ une fonction et $x \in U$.
Si f est différentiable en x, on appelle *gradient de f en x*, et on note $\nabla f(x)$, l'unique élément de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ on ait

$$Df(x)(h) = \langle \nabla f(x), h \rangle$$

Lemme 1.6

Soit I un ouvert de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\gamma \colon I \to U$ et $f \colon U \to \mathbb{R}$.
On suppose que γ est dérivable en $t_0 \in I$ et f est différentiable en $\gamma(t_0)$.
Alors $t \mapsto f(\gamma(t))$ est dérivable en t_0, et on a la formule

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = \langle \nabla f(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) \rangle$$

Démonstration. C'est une simple application de la règle de la chaîne.
En effet, γ est différentiable en t_0, de différentielle $h \mapsto h\gamma'(t_0)$; et f est différentiable en $\gamma(t_0)$, de différentielle $v \mapsto \langle \nabla f(\gamma(t_0)), v \rangle$.
La règle de la chaîne nous permet alors d'affirmer que $f \circ \gamma$ est différentiable en t_0, de différentielle égale à

$$h \mapsto \langle \nabla f(\gamma(t_0)), h\gamma'(t_0) \rangle = h \langle \nabla f(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) \rangle$$

Autrement dit, $f \circ \gamma$ est dérivable en t_0 et sa dérivée en t_0 est égale à $\langle \nabla f(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) \rangle$. □

Définition 1.7

Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f \colon U \to \mathbb{R}^m$ une fonction.
Si f est différentiable en $x \in U$, on appelle *matrice jacobienne* de f la matrice de $Df(x)$ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$

Les coefficients de la matrice jacobienne peuvent s'écrire à l'aide des dérivées partielles des coordonnées de f, sur lesquelles on va revenir.

Définition 1.8

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f \colon U \to \mathbb{R}$ et $x \in U$.
Pour $h \in U$, on dit que f admet une *dérivée directionnelle* dans la direction h si l'application $t \mapsto f(x + th)$ est dérivable en 0.
Dans le cas particulier où $h = e_i$ (le i-ième vecteur de la base canonique), on utilise la notation

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

pour désigner la dérivée directionnelle de f dans la direction e_i (quand elle existe) et on l'appelle *dérivée partielle de f par rapport à x_i*.

Si on écrit $x = (x_1, \ldots, x_n)$, la définition qu'on vient de donner revient à dire que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ est la dérivée en 0 de

$$t \mapsto f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

Si jamais U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et f est différentiable en $x \in U$, alors f admet des dérivées partielles dans toutes les directions ; en effet, $t \mapsto (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ est dérivable, de dérivée $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (où le seul coefficient non nul est en i-ième position), c'est-à-dire e_i, le i-ième vecteur de base de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

La règle de la chaîne nous permet alors de voir que $t \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n)$ est dérivable en 0, de dérivée égale à $Df(x)(e_i)$.
On vient d'établir la relation suivante, valide dès que f est différentiable en x :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = Df(x)(e_i)$$

En termes de matrice jacobienne, on voit que si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f\colon U \to \mathbb{R}$ est différentiable en x, sa matrice jacobienne est la matrice ligne (matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$) donnée par

$$Jf(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Par définition de la matrice d'une application linéaire, on a

$$\begin{aligned} Df(x)(h_1, \dots, h_n) &= Jf(x) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i \end{aligned}$$

Puisque $Df(x)(h) = \langle \nabla f(x), h \rangle$, on voit que $\nabla f(x)$ est donné par la formule

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

Vu ce qu'on a dit sur la différentielle d'une application à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, il suit également que si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ est différentiable en x, de coordonnées $(f_1, \dots, f_m)$, la matrice jacobienne de f en x est donnée par

$$Jf(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m}$$

Réciproquement, il n'est pas suffisant de supposer que f admette des dérivées partielles (ni même des dérivées directionnelles dans toutes les directions) en x pour conclure que f est différentiable en x. On peut néanmoins établir le résultat suivant, qui est très utile en pratique.

☆ Théorème 1.9
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f\colon U \to \mathbb{R}$ et $x \in U$.
On suppose que chaque dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ existe sur U, et est continue en x.
Alors f est différentiable en x.

En particulier, si les dérivées partielles de f existent et sont continues sur U, alors f est différentiable sur U tout entier ; pour $f\colon U \to \mathbb{R}^m$, on a le même résultat en supposant que chaque $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existe et est continue sur U.

Définition 1.10

Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f\colon U \to \mathbb{R}^m$.
On dit que f est *de classe $\mathcal{C}^1$* si chaque $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existe et est continue sur U.

De manière plus abstraite, cela revient à dire que l'application Df, définie sur U et à valeurs dans l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$, est continue.
Notons que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est lui-même un espace de dimension finie, et que si f est différentiable sur U alors $Df\colon U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est une application définie sur un ouvert d'un espace de dimension finie, à valeurs dans un espace de dimension finie ; on peut donc se demander si cette fonction est elle-même différentiable, ou même de classe $\mathcal{C}^1$.
Ceci motive la définition suivante, par récurrence.

Définition 1.11

Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ une fonction. Soit $k \geq 2$ un entier.
On dit que f est *de classe $\mathcal{C}^k$* si f est différentiable sur U, et

$$Df\colon U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

Exemple 1.12

L'espace $M_n(\mathbb{R})$ est un espace de dimension finie ; on va s'intéresser à la différentielle du déterminant, dans le cas $n \geq 2$ (qu'on va se contenter de calculer en une matrice inversible).
Pour justifier que le déterminant est différentiable en une matrice A, et calculer sa différentielle en A, il nous suffit de justifier que ses dérivées partielles en A existent et sont continues.
Commençons par le cas où $A = I_n$ (la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$) ; fixons une matrice M.
Alors on sait (via les propriétés du polynôme caractéristique) qu'il existe des réels $a_0, \dots, a_{n-2}$ tels que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\det(\lambda I_n + A) = \chi_{-A}(\lambda) = \lambda^n + \lambda^{n-1}\operatorname{tr}(A) + \sum_{i=0}^{n-2} a_i \lambda^i$$

On a donc aussi, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
\det(I_n + tA) &= t^n \det\left(\frac{1}{t} I_n + A\right) \\
&= t^n \left(\frac{1}{t^n} + \frac{1}{t^{n-1}}\operatorname{tr}(A) + \sum_{i=0}^{n-2} a_i \frac{(-1)^i}{t^i}\right) \\
&= 1 + \operatorname{tr}(A)t + \underset{t\to 0}{o}(t)
\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{\det(I_n + tA) - \det(I_n)}{t}$ tend vers $\operatorname{tr}(A)$ quand t tend vers 0 ; ceci montre que I_n admet une dérivée directionnelle dans la direction A, et que celle-ci vaut $\operatorname{tr}(A)$.

Comme $A \mapsto \operatorname{tr}(A)$ est continue (c'est une application linéaire en dimension finie) On en conclut que $\det$ est différentiable en l'identité, et qu'on a pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$ l'égalité

$$D\det(I_n)(A) = \operatorname{tr}(A)$$

Reste à calculer la différentielle en une matrice inversible quelconque (en fait, le déterminant est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ tout entier, et sa différentielle n'est pas beaucoup plus difficile à calculer que ce qu'on fait ici ; mais la formule donnant la différentielle est plus simple en une matrice inversible, et c'est tout ce dont on aura besoin).
Soit donc A une matrice inversible, et $M \in M_n(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}\det(A+M) &= \det(A(I_n + A^{-1}M)) \\ &= \det(A)\det(I_n + A^{-1}M) \\ &= \det(A)(1 + \operatorname{tr}(A^{-1}M) + o(\|A^{-1}M\|))\end{aligned}$$

Ci-dessus, on a muni $M_n(\mathbb{R})$ d'une norme subordonnée $\|\cdot\|$; alors

$$\|A^{-1}M\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|M\|$$

donc une fonction négligeable devant $\|A^{-1}M\|$ est aussi négligeable devant $\|M\|$.
On peut donc écrire

$$\det(A+M) = \det(A) + \det(A)\operatorname{tr}(A^{-1}M) + o(\|M\|)$$

On en conclut que $\det$ est différentiable en A, et que sa différentielle y est donnée par la formule

$$D\det(A)(M) = \det(A)\operatorname{tr}(A^{-1}M)$$

1.2 L'inégalité des accroissements finis.

On fixe deux entiers $n, m \in \mathbb{N}^*$, des normes $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ respectivement, et $\|\cdot\|$ la norme subordonnée associée.

☆ Théorème 1.13 (Inégalité des accroissements finis)
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f \colon U \to \mathbb{R}^m$ une application différentiable, et $x, y \in U$. On suppose que le segment

$$[x,y] = \{x + t(y-x) \colon t \in [0,1]\}$$

est contenu dans U (cette hypothèse est en particulier vérifiée si U est convexe).
On suppose aussi que

$$M = \sup_{z \in [x,y]} \|Df(z)\|$$

est fini. Alors on a l'inégalité

$$\|f(y) - f(x)\| \leq M \cdot \|y - x\|$$

Démonstration. On considère l'application $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}^m$ définie par

$$g(t) = f(x + t(y - x))$$

Puisque $[x, y] \subseteq U$, g est bien définie ; de plus $g(0) = f(x)$, $g(1) = f(y)$. La règle de la chaîne nous assure que g est dérivable sur $]0,1[$, et qu'on a

$$g'(t) = Df(x + t(y - x))(y - x)$$

pour tout $t \in]0,1[$.
Posons $M' = M\|y - x\|$. On a

$$\|g'(t)\| \leq \|\|Df(x + t(y - x))\|\| \cdot \|y - x\| \leq M\|y - x\| = M'$$

pour tout $t \in]0,1[$.
Fixons $\varepsilon > 0$, et considérons

$$I_\varepsilon = \{t \in [0,1] \colon \|g(t) - g(0)\| \leq t(M' + \varepsilon)\}$$

Alors $0 \in I_\varepsilon$, et $I_\varepsilon \subseteq [0,1]$; soit $s_\varepsilon = \sup(I_\varepsilon) \in [0,1]$.
Par caractérisation séquentielle d'un sup, il existe une suite (t_n) d'éléments de I_ε qui converge vers s_ε ; on a alors

$$\|g(t_n) - g(0)\| \leq t_n(M' + \varepsilon)$$

pour tout n.
Par continuité de g, on en déduit en passant à la limite que

$$\|g(s_\varepsilon) - g(0)\| \leq s_\varepsilon(M' + \varepsilon)$$

Donc $s_\varepsilon \in I_\varepsilon$; montrons maintenant que $s_\varepsilon = 1$. Raisonnons par l'absurde, et supposons que tel ne soit pas le cas.
Alors g est dérivable en s_ε, et pour $h > 0$ suffisamment petit on a

$$\|g(s_\varepsilon + h) - g(s_\varepsilon) - hg'(s_\varepsilon)\| \leq h\varepsilon$$

Mais alors, on obtient à l'aide de l'inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned}
\|g(s_\varepsilon + h) - g(0)\| &= \|(g(s_\varepsilon + h) - g(s_\varepsilon) - hg'(s_\varepsilon)) + (g(s_\varepsilon) - g(0)) + hg'(s_\varepsilon)\| \\
&\leq \|(g(s_\varepsilon + h) - g(s_\varepsilon) - hg'(s_\varepsilon))\| + \|g(s_\varepsilon) - g(0)\| + h\|g'(s_\varepsilon)\| \\
&\leq h\varepsilon + s_\varepsilon(M' + \varepsilon) + hM' \\
&= (s_\varepsilon + h)(M' + \varepsilon)
\end{aligned}$$

On en conclut que $s_\varepsilon + h \in I_\varepsilon$ pour $h > 0$ suffisamment petit, ce qui contredit le fait que $s_\varepsilon = \sup(I_\varepsilon)$.
Par conséquent, $s_\varepsilon = 1$, donc $1 \in I_\varepsilon$, autrement dit

$$\|g(1) - g(0)\| \leq M' + \varepsilon$$

On vient d'établir, pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité

$$\|f(y) - f(x)\| \leq M\|y - x\| + \varepsilon$$

On conclut en faisant tendre ε vers 0. $\square$

Attention!

Dans le cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, vous connaissez déjà une *égalité* des accroissements finis ; si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $]a,b[$, continue sur $[a,b]$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(x)(b-a)$.
Pourquoi ne pas avoir établi une telle égalité dans le cadre des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$? Tout simplement parce qu'elle est fausse en général.
La preuve de l'égalité des accroissements finis en dimension 1 est basée sur le lemme de Rolle, qui repose lui même sur l'existence d'un maximum pour toute fonction continue définie sur un segment, à valeurs réelles ; la notion de maximum n'a de sens que parce que $\mathbb{R}$ est muni d'un ordre. Et on ne peut pas munir $\mathbb{R}^n$ d'une structure d'ordre avec d'aussi bonnes propriétés que celles de l'ordre sur $\mathbb{R}$.
Voyons un contre-exemple explicite : la fonction $f\colon t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.
De plus, f est dérivable en tout t, et $f'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$. Donc $f'(t)$ ne s'annule jamais.
Pourtant, on a $f(2\pi) - f(0) = 0$: il ne peut pas exister de c tel que $f(2\pi) - f(0) = 2\pi f'(c)$.

1.3 Intégration de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

Définition 1.14

Soit $a \leq b$ deux réels, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On note

$$f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$$

et on pose alors

$$\int_a^b f(t)dt = \left(\int_a^b f_1(t)dt, \dots, \int_a^b f_n(t)dt\right)$$

Autrement dit, on intègre f coordonnée par coordonnée ; comme d'habitude, si $a > b$, on pose

$$\int_a^b f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$

On conserve les propriétés usuelles de l'intégrale (linéarité, relation de Chasles...).

Théorème 1.15 (Théorème fondamental de l'analyse)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f\colon I \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue sur I. Pour $x \in I$ on pose

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Alors F est dérivable, et on a $F' = f$.

Rappelons que dire que F est dérivable sur I revient à affirmer que chacune de ses coordonnées $F_1, \dots, F_n$ est dérivable sur I, et on a $F' = (F'_1, \dots, F'_n)$.
Notons une formule qui nous sera utile par la suite.

Lemme 1.16

Soit I, J deux intervalle de $\mathbb{R}$, $f\colon J \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue, et $a, b\colon I \to J$ deux fonctions dérivables. Alors la fonction

$$G\colon x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$$

est dérivable sur I, et on a

$$G'(x) = b'(x)f(b(x)) - a'(x)f(a(x))$$

pour tout $x \in I$.

Démonstration. Fixons $c \in J$, et notons $F\colon x \mapsto \int_c^x f(t)dt$. Alors F est bien définie sur J, et on a $F' = f$; de plus, pour tout $x \in I$ on a

$$G(x) = F(b(x)) - F(a(x))$$

Comme a, b, F sont dérivables, on peut appliquer la règle de la chaîne pour conclure que G est dérivable sur I, et qu'on a

$$G'(x) = b'(x)F'(b(x)) - a'(x)F'(a(x)) = b'(x)f(b(x)) - a'(x)f(a(x))$$

pour tout $x \in I$.

□

Théorème 1.17 (inégalité triangulaire)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^d$, $a < b$ deux réels et $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue. On a alors

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt$$

Démonstration. Comme on travaille avec des fonctions continues, on peut utiliser des sommes de Riemann (une preuve plus générale, valable quand on intègre au sens de la théorie de la mesure, s'obtient soit directement à partir de la définition de l'intégrale, soit en appliquant l'inégalité de Jensen).
Détaillons un peu ; comme f et $\|f\|$ sont continues, on a (en appliquant coordonnée par coordonnée ce qu'on sait sur les sommes de Riemann pour les fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}$) :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)dt &= \lim_{m \to +\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} f\left(a + \frac{k(b-a)}{m}\right) \quad \text{et} \\ \int_a^b \|f(t)\|dt &= \lim_{m \to +\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \left\| f\left(a + \frac{k(b-a)}{m}\right) \right\| \end{aligned}$$

Si on fixe $m \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité triangulaire usuelle dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ donne

$$\left\|\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f\left(a+\frac{k(b-a)}{m}\right)\right\| \leq \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\left\|f\left(a+\frac{k(b-a)}{m}\right)\right\|$$

En faisant tendre m vers $+\infty$ et en passant à la limite, on obtient bien

$$\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt$$

$\square$

Chapitre 2

Introduction et premiers exemples

2.1 Définitions

En général, une équation différentielle est une équation de la forme $F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$; et on cherche à en déterminer les solutions. Le contexte (i.e. l'espace où F est définie) peut être très général et abstrait ; on va se placer dans un cadre un peu restreint, mais déjà très riche, et étudier des équations différentielles *résolues* dans des espaces de dimension finie.

Définition 2.1

Dans ce cours, une *équation différentielle* est une équation de la forme

$$y'(t) = f(t, y(t)) \ , \quad t \in I \tag{E}$$

où :

- I est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.
- U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$.
- $f \colon I \times U \to \mathbb{R}^d$ est une application continue.

On dit alors que f est le *champ de vecteurs* associé à (E).

Il arrivera fréquemment qu'on considère des champs de vecteurs satisfaisant des hypothèses plus fortes (de classe $\mathcal{C}^1$, par exemple).
Répétons que nous ne considérons que des équations différentielles *résolues* (cela signifie que $y'(t)$ s'écrit comme une fonction de t et $y(t)$, cas plus sympathique que celui où on doit considérer une équation générale de la forme $F(t, y(t), y'(t)) = 0$) et *du premier ordre* (seule une dérivée de y apparaît).
Un peu plus loin dans ce chapitre, on verra que ne considérer que des équations du premier ordre n'est pas une vraie restriction, pour peu qu'on s'autorise (comme on le fait ici) à travailler dans des espaces de dimension quelconque.

Exemple 2.2

On peut considérer l'équation

$$y'(t) = ty(t)^2 + 1 \ , \quad t \in \mathbb{R}$$

Ici $d = 1$, et le champ de vecteurs associé est la fonction $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t, x) = tx^2 + 1$$

Exemple 2.3

Comme exemple d'équation différentielle en dimension 2, on peut mentionner le *modèle de Lotka–Volterra* : on fixe quatre constantes $a, b, c, d > 0$, et on considère le système d'équations différentielles

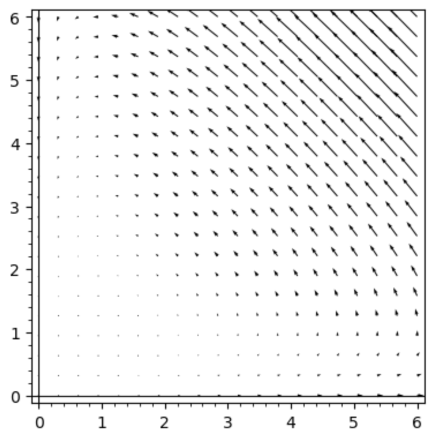
$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t) \\ y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \tag{LV}$$

À première vue, cela ressemble plutôt à un système de deux équations différentielles qu'à une équation différentielle ; si on pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et qu'on considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(t, (x, y)) = \begin{pmatrix} ax - bxy \\ -cy + dxy \end{pmatrix}$$

alors (LV) se réécrit sous la forme $X'(t) = f(t, X(t))$, $t \in \mathbb{R}$.

Dans le cas autonome, c'est-à-dire quand le champ de vecteurs ne dépend pas de t, il est utile d'en avoir une représentation graphique ; c'est le cas du système de Lotka–Volterra.



Le champ de vecteurs associé à l'équation de Lotka–Volterra avec paramètres $a = b = c = d = 1$

Notons que, comme le système est censé modéliser l'interaction entre une espèce "prédatrice" et une espèce "proie", on a seulement représenté le champ de vecteurs dans le quart de plan $\{(x, y)\colon x > 0, y > 0\}$.
Tout notre travail va être d'essayer de comprendre le comportement des *solutions* des équations différentielles (et, déjà, de s'assurer qu'elles existent !).

Définition 2.4

Une *solution* de (E) est une fonction $y\colon J \to \mathbb{R}^d$, définie sur un intervalle ouvert J contenu dans I, dérivable et telle que :

(i) Pour tout $t \in J$, $y(t) \in U$;

(ii) Pour tout $t \in J$, $f(t, y(t)) = y'(t)$.

Attention!

Une solution de (E) est la donnée d'une fonction *et d'un intervalle* sur lequel cette fonction est définie.
Par exemple, si l'on considère l'équation différentielle $y' = 1$, définie sur $\mathbb{R}$, les fonctions

$$y_1 \begin{cases}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto t \end{cases} \quad \text{et} \quad y_2 \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t \end{cases}$$

sont deux solutions différentes (et on dit que y_1 est une *restriction* de y_2, ou que y_2 *prolonge* y_1).

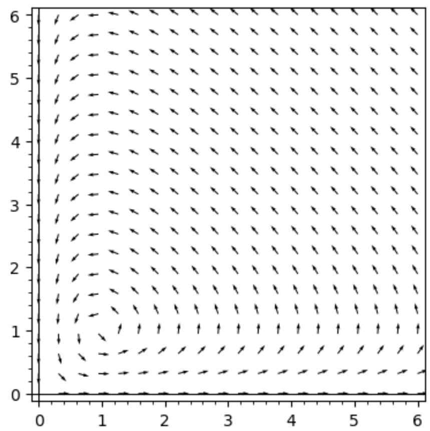
Remarque 2.5

On pourrait ne pas exiger que l'intervalle de définition J soit ouvert (et dans ce cas, ne considérer qu'une dérivée à droite ou à gauche aux extrémités de J, si nécessaire) dans la définition d'une solution. C'est la convention la plus classique ; dans le cadre de ce cours, cette subtilité ne jouera pas de rôle et on ne manipulera que des solutions définies sur des intervalles ouverts.

Reprenons par exemple l'équation de Lotka–Volterra. Comme elle est autonome, on peut s'imaginer les solutions de l'équation différentielle comme des courbes "suivant" les directions infinitésimales imposées par le champ de vecteurs (autrement dit "on se déplace en suivant les flèches").
Il est souvent plus utile, pour se faire une idée des trajectoires, de représenter le champ de vecteur normalisé, i.e de remplacer $f(x, y)$ par $\dfrac{f(x,y)}{\|f(x,y)\|}$; voici ce que l'on obtient pour le système de Lotka–Volterra avec $a = b = c = d = 1$.
Cela permet de se faire une idée intuitive du comportement des solutions... mais on ne sait pour l'instant pas justifier que des solutions existent !
Dans la suite de cette section, on fixe f, I et U comme ci-dessus.

Définition 2.6

Une solution de (E) définie sur I tout entier est dite *globale*.
On dit qu'une solution y de (E), définie sur J, est *maximale* s'il n'existe pas de solution $\tilde{y}\colon \tilde{J} \to \mathbb{R}^d$ de (E) telle que J soit strictement contenu dans $\tilde{J}$, et $y(t) = \tilde{y}(t)$ pour tout $t \in J$.



Le champ de vecteurs normalisé associé à l'équation de Lotka–Volterra ($a = b = c = d = 1$)

Bien sûr, une solution globale est toujours maximale. Mais il n'existe pas toujours de solution globale, et une solution maximale peut tout à fait ne pas être globale (nous allons voir sous peu le théorème de Cauchy–Lipschitz, qui garantit l'existence de solutions maximales de (E), sous certaines conditions sur f ; il arrive fréquemment que ces solutions ne soient pas globales).

Exemple 2.7

Considérons l'équation

$$y'(t) = -(y(t))^2 \ , \quad t \in \mathbb{R}$$

Alors la fonction $y\colon t \mapsto \dfrac{1}{t}$, définie sur $J =]0, +\infty[$, est une solution de l'équation.

Comme $\lim\limits_{t \to 0^+} y(t) = +\infty$, y ne peut se prolonger en une fonction continue sur un intervalle $\tilde{J}$ contenant $[0, +\infty[$. Par conséquent, y est maximale, mais n'est pas globale.

Il est utile de garder le résultat suivant en tête, pour comprendre pourquoi nous allons toujours travailler avec des solutions maximales ; sa démonstration peut être sautée en première lecture et ne jouera pas un rôle important dans le cours.

Théorème 2.8

Toute solution de (E) se prolonge en une solution maximale.

Démonstration. Soit y une solution de (E), définie sur un intervalle ouvert J contenu dans I. Notons $I =]a, b[$ et $J =]s_0, t_0[$. Dans cette preuve, on va supposer a et b finis pour simplifier la rédaction. Considérons

$$\varepsilon_0 = \sup\{\varepsilon \geq 0 \colon y \text{ s'étend en une solution définie sur }]s_0, t_0 + \varepsilon[\}$$

Alors $\varepsilon_0 \geq 0$, et par définition d'un sup on peut trouver $t_1 \geq t_0 + \dfrac{\varepsilon_0}{2}$ et une solution y_1 de (E) définie sur $]s_0, t_1[$ (si jamais $\varepsilon_0 = 0$, $t_1 = t_0$ convient) ; répétons ce processus, en construisant par récurrence :

- Une suite (t_n) croissante telle que $]s_0, t_n[$ soit contenu dans I pour tout n ;

- Une suite (y_n) de solutions de (E) définies sur $]s_0, t_n[$ telles que, pour tout n, y_{n+1} soit un prolongement de y_n ;
- On assure aussi que pour tout n, $t_{n+1} \geq t_n + \frac{\varepsilon_n}{2}$, où

$$\varepsilon_n = \sup\{\varepsilon \geq 0 \colon y_n \text{ s'étend en une solution définie sur }]s_0, t_n + \varepsilon_n[\}$$

Par construction, la suite (t_n) est croissante, et majorée par b. Soit t_∞ sa limite ; puisque les t_n sont tous plus petits que b on a $t_\infty \leq b$. En recollant toutes les fonctions y_n, on obtient une solution y_∞ de (E) définie sur $]s_0, t_\infty[$.
Montrons que y_∞ ne peut être étendue à un intervalle $]s_0, u[$, où $u > t_\infty$. Raisonnons par l'absurde, et supposons que cette situation se produit.
En particulier, $t_\infty < b$; trouvons u tel que $t_\infty < u < b$ et y_∞ s'étende à $]s_0, u[$, puis ε tel que

$$t_\infty + 2\varepsilon > u$$

Pour n suffisamment grand, on a $t_n > t_\infty - \varepsilon$; par définition de ε_n, et puisque y_∞ étend y_n, cela entraîne qu'il existe une solution de (E) qui étend y_n et est définie sur $]s_0, u[$. Par conséquent,

$$\varepsilon_n \geq u - t_n > 2\varepsilon$$

Mais alors

$$t_{n+1} \geq t_n + \frac{\varepsilon_n}{2} > t_n + \varepsilon > t_\infty$$

ce qui est impossible puisque t_∞ est la limite de la suite (t_n), qui est croissante.
On vient donc de trouver $t_\infty \leq b$, et une solution y_∞ définie sur $]s_0, t_\infty[$ ne pouvant être étendue en une solution $]s_0, u[$ où $u > t_\infty$.
Par un argument symétrique, on obtient s_∞ tel que $a \leq s_\infty \leq s_0$ et une solution z de (E) qui étend y_∞ (donc y) et ne peut être étendue à aucun intervalle $]s, t_\infty[$ avec $s < s_\infty$; on vient de construire une solution maximale de (E).
On n'a pas traité le cas où $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$; on peut soit adapter le raisonnement précédent, soit déduire le résultat dans ce cas de ce qu'on vient d'établir, et on laisse ce travail en exercice. $\square$

Notons que, a priori, on n'a pas unicité de la solution maximale qui étend y ; dans quasiment tous les cas que nous allons rencontrer, elle sera unique, et c'est le théorème de Cauchy–Lipschitz qui nous permettra d'établir cela.

2.2 L'exemple des équations linéaires scalaires d'ordre 1

En général, il est très difficile de décrire précisément les solutions d'une équation différentielle ; dans le cas particulier qu'on va étudier dans cette section, ce problème se réduit à deux calculs de primitives [(i)].
On considère ici une équation de la forme

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \ , \ t \in I \tag{L}$$

où I est un intervalle ouvert et $a, b \colon I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues ; ainsi que l'équation *homogène* associée

$$y'(t) = a(t)y(t) \ , \ t \in I \tag{H}$$

(i). Qui peut lui-même être délicat : ce n'est pas toujours évident de calculer une primitive...

Théorème 2.9

Fixons $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$; notons A la primitive de a qui s'annule en t_0 (qui existe puisque a est continue ; explicitement, on a $A(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(s)ds$). Alors :

1. L'équation (H) admet une unique solution maximale définie sur I tout entier et vérifiant $y(t_0) = y_0$. Cette solution est donnée par la formule suivante, valable pour tout $t \in I$:
$$y(t) = y_0 e^{A(t)}$$
2. L'équation (L) admet une unique solution maximale définie sur I tout entier et vérifiant $y(t_0) = y_0$. Cette solution est donnée par la formule suivante, valable pour tout $t \in I$:
$$y(t) = y_0 e^{A(t)} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t)-A(s)} b(s) ds$$

Démonstration. L'idée est de commencer par résoudre l'équation (H), puis, si y en est une solution non nulle, de chercher les solutions de (L) sous la forme $t \mapsto K(t)y(t)$, ce qui nous amène à un calcul de primitive.
Mettons cette idée en pratique, et commençons par chercher à comprendre (H) ; pour cela, considérons J un intervalle ouvert contenu dans I, tel que $t_0 \in J$, et $y \colon J \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Définissons une fonction $z \colon J \to \mathbb{R}$ en posant
$$z(t) = y(t)e^{-A(t)}$$
Alors z est dérivable, et on a pour $t \in J$:
$$z'(t) = (y'(t) - a(t)y(t))e^{-A(t)}$$
Par conséquent,
$$\begin{aligned} y \text{ est solution de (H)} &\Leftrightarrow z' = 0 \text{ sur } J \\ &\Leftrightarrow z \text{ est constante sur } J \\ &\Leftrightarrow \forall t \in J \ z(t) = z(t_0) = y(t_0) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in J \ y(t) = y(t_0)e^{A(t)} \end{aligned}$$
C'est bien la formule donnée dans l'énoncé du théorème ; par ailleurs, la fonction définie par la formule ci-dessus s'étend en une solution de (H) définie sur I tout entier, ce qui montre que les solutions maximales de cette équation sont globales.
Pour comprendre les solutions de (L), notons déjà que si y, z en sont deux solutions définies sur un même intervalle J alors $y - z$ est une solution de (H) sur J.
En effet, on a pour tout $t \in J$ que
$$\begin{aligned} a(t)(y-z)(t) &= a(t)y(t) - a(t)z(t) \\ &= (y'(t) - b(t)) - (z'(t) - b(t)) \\ &= y'(t) - z'(t) \\ &= (y-z)'(t) \end{aligned}$$

Comme on vient de décrire toutes les solutions de (H), il nous suffit donc de trouver *une* solution de (L) pour les connaître *toutes*.
Notons u la solution de (H) qui vaut 1 en t_0, c'est-à-dire $u(t) = e^{A(t)}$ pour tout $t \in I$, et cherchons une solution sous la forme

$$y \colon t \mapsto \lambda(t)u(t)$$

où λ est dérivable. Alors on a $y'(t) = \lambda'(t)u(t) + \lambda(t)u'(t)$; il suit que

$$\begin{aligned} y'(t) - a(t)y(t) &= \lambda'(t)u(t) + \lambda(t)u'(t) - a(t)\lambda(t)u(t) \\ &= \lambda'(t)u(t) \\ &= \lambda'(t)e^{A(t)} \end{aligned}$$

Par conséquent, y est solution de (L) sur I si, et seulement si, on a pour tout $t \in I$ l'égalité

$$\lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)}$$

On en déduit que la formule

$$y(t) = e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} b(s)e^{-A(s)}ds = \int_{t_0}^{t} b(s)e^{A(t)-A(s)}ds$$

définit une solution globale de (L).
Puis, en exploitant le fait que, pour toute solution z de (L) sur un intervalle ouvert J la fonction $z - y$ est une solution de (H) sur J, et le fait qu'on a décrit toutes les solutions de (H), on obtient que les solutions de l'équation (L) sont les fonctions de la forme

$$y \colon t \mapsto Ke^{A(t)} + \int_{t_0}^{t} b(s)e^{A(t)-A(s)}ds \ , \ K \in \mathbb{R}$$

Étant donné $y_0 \in \mathbb{R}$, la seule solution y telle que $y(t_0) = y_0$ est obtenue pour $K = y_0$, et on obtient comme annoncé la formule valable pour tout $t \in I$

$$y(t) = y_0e^{A(t)} + \int_{t_0}^{t} b(s)e^{A(t)-A(s)}ds$$

□

La méthode qu'on a appliquée dans la preuve du théorème précédent s'appelle *méthode de variation de la constante*, et est à connaître. En pratique, on résout (L) en deux étapes :

1. On résout l'équation homogène (H) ; l'espace des solutions maximales est

$$\mathcal{S}_H = \left\{ y \colon I \to \mathbb{R} \colon \exists \lambda \in \mathbb{R}\ \forall t \in I \quad y(t) = \lambda e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \right\}$$

2. On cherche *une* solution particulière de (L), sous la forme

$$y_p(t) = \lambda(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$$

   Il arrive parfois qu'il y ait une solution particulière "évidente", i.e. qu'on arrive à voir sans calcul. On peut alors simplement vérifier que c'est bien une solution, et passer à l'étape suivante (en général, il est facile de vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle, et difficile voire impossible de trouver une solution d'une équation différentielle...).

Les solutions de (L) sur I sont alors les fonctions de la forme $y(t) = \lambda e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + y_p(t)$, où λ est une constante réelle.

2.3 Un peu de vocabulaire

Définition 2.10

- Si le champ de vecteurs ne dépend pas du temps, on dit que l'équation différentielle est *autonome*. Autrement dit, une équation différentielle autonome est une équation de la forme

$$y'(t) = f(y(t))$$

- Une équation différentielle *linéaire* est une équation différentielle de la forme

$$X'(t) = A(t)X(t) + b(t) \ , t \in I$$

où $d \in \mathbb{N}^*$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $A \colon I \to M_d(\mathbb{R})$ et $b \colon I \to \mathbb{R}^d$ sont continues.

- Une équation différentielle d'ordre n est une équation différentielle de la forme

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \ , t \in I \qquad (\mathcal{E})$$

En fait, puisqu'on s'autorise à travailler dans des espaces de dimension finie arbitrairement grande, on ne gagne pas vraiment de généralité à considérer des équations différentielles d'ordre n : elles se ramènent toutes à des équations différentielles d'ordre 1.

En effet, considérons l'équation différentielle $(\mathcal{E})$; pour $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ et $t \in I$ posons

$$F(t, X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ f(t, x_0, \dots, x_{n-1}) \end{pmatrix}$$

On peut alors considérer l'équation différentielle d'ordre 1

$$Y'(t) = F(t, Y(t)) \ , t \in I \qquad \text{(E)}$$

Ici, Y est à valeurs dans $(\mathbb{R}^d)^n \cong \mathbb{R}^{dn}$. Si y est une solution de $(\mathcal{E})$, définie sur J, alors en notant pour tout $t \in J$,

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

on a

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \\ f\left(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\right) \end{pmatrix} = F(t, Y(t))$$

donc Y est une solution de (E) sur J.
Réciproquement, si Y est une solution de (E) définie sur J, et qu'on note

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

alors l'équation $Y'(t) = F(t, y(t))$ revient à dire que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, tout $t \in J$ on a

$$y_i(t) = y'_{i-1}(t) \text{ , et}$$

$$y'_{n-1}(t) = f(y_0(t), y_1(t), \ldots, y_{n-1}(t))$$

On en déduit $y_0^{(n)}(t) = f\left(y_0(t), y_0'(t), \ldots, y_0^{(n-1)}(t)\right)$.

Donc y_0 est une solution de $(\mathcal{E})$ sur J, et pour tout $t \in J$, $Y(t)$ est égal à $\begin{pmatrix} y(t) \\ y_0'(t) \\ \vdots \\ y_0^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$

On voit ainsi que $(\mathcal{E})$ est équivalente à (E), qui est d'ordre 1.

Exemple 2.11

Considérons une équation différentielle décrivant le mouvement d'un pendule (sans amortissement) :

$$y''(t) + \sin(y(t)) = 0 \ , t \in \mathbb{R}$$

On pose $v = y'$ et on arrive au système de deux équations différentielles

$$\begin{cases} y'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\sin(y(t)) \end{cases}$$

Finalement, résoudre l'équation du pendule revient à résoudre l'équation différentielle d'ordre 1

$$Y'(t) = F(Y(t)) \quad \text{où} \quad F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ F(y, v) = (v, -\sin(y))$$

2.4 Lemme de Gronwall

Pour étudier les solutions d'équations différentielles (et leur existence !) on est souvent amené à essayer d'évaluer ou encadrer des fonctions, à partir d'informations sous forme d'inégalités différentielles ou intégrales.
Le lemme de Gronwall est un outil fondamental (et protéiforme : il en existe de nombreux énoncés) pour atteindre cet objectif.

☆ Lemme 2.12 (Lemme de Gronwall, forme intégrale)

Soit I un intervalle, $t_0 \in I$, et a, b, y trois fonctions continues sur I. on suppose que :

- a est à valeurs positives ;
- pour tout $t \in I$, $t \geq t_0$ on a $y(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^{t} a(s)y(s)ds$.

Alors l'inégalité suivante est vérifiée pour tout $t \geq t_0$ appartenant à I :

$$y(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^{t} b(s)a(s)e^{\int_s^t a(u)du}ds$$

Démonstration. Pour simplifier les notations, on va supposer que $I = [0, T]$, $T \in \mathbb{R}^+$, et $t_0 = 0$. Vu notre hypothèse, il suffit d'établir que, pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$b(t) + \int_0^t a(s)y(s)ds \leq b(t) + \int_0^t b(s)a(s)e^{\int_s^t a(u)du}ds$$

Cela revient à montrer que pour tout $t \in [0, T]$

$$\int_0^t a(s)y(s)ds \leq \int_0^t b(s)a(s)e^{\int_s^t a(u)du}ds$$

Considérons la fonction $v\colon t \mapsto \exp\left(-\int_0^t a(s)ds\right)\int_0^t a(s)y(s)ds$. Le théorème fondamental de l'analyse nous permet d'affirmer que v est $\mathcal{C}^1$, et que pour tout $t \in [0, T]$ on a

$$\begin{aligned}
v'(t) &= a(t)y(t)\exp\left(-\int_0^t a(s)ds\right) - a(t)\exp\left(-\int_0^t a(s)ds\right)\int_0^t a(s)y(s)ds \\
&= \exp\left(-\int_0^t a(s)ds\right)a(t)\left(y(t) - \int_0^t a(s)y(s)ds\right) \\
&\leq b(t)a(t)\exp\left(-\int_0^t a(s)ds\right)
\end{aligned}$$

Notons qu'on a utilisé l'hypothèse selon laquelle a est à valeur positives pour pouvoir utiliser le fait que multiplier par $a(t)$ préserve le sens des inégalités.
En utilisant la positivité de l'intégrale, la continuité de v', et le fait que $v(0) = 0$, on obtient en intégrant l'inégalité ci-dessus entre 0 et t que pour tout $t \in [0, T]$

$$v(t) \leq \int_0^t b(s)a(s)\exp\left(-\int_0^s a(u)du\right)ds$$

On a alors pour tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}
\int_0^t a(s)y(s)ds &= v(t)\exp\left(\int_0^t a(s)ds\right) \\
&\leq \left(\int_0^t b(s)a(s)\exp\left(-\int_0^s a(u)du\right)ds\right)\exp\left(\int_0^t a(s)ds\right) \\
&= \int_0^t b(s)a(s)\exp\left(\int_0^t a(u)du - \int_0^s a(u)du\right)ds \\
&= \int_0^t b(s)a(s)e^{\int_s^t a(u)du}ds
\end{aligned}$$

□

Lemme 2.13 (Lemme de Gronwall, cas particulier où b est constante)
On reprend les notations et hypothèses du lemme de Gronwall, et on suppose que b est constante. On a alors, pour tout $t \geq t_0$ appartenant à I, l'inégalité :

$$y(t) \leq b \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$$

Démonstration. Fixons $t \geq t_0$ appartenant à I.
En appliquant la forme intégrale du lemme de Gronwall et le fait que b est constante (notons aussi cette constante b), on obtient

$$y(t) \leq b + b\int_{t_0}^{t} a(s)e^{\int_s^t a(u)du}ds$$

La fonction

$$A\colon s \mapsto e^{\int_s^t a(u)du}$$

est définie sur I, et sa dérivée est donnée par la formule

$$A'(s) = -a(s)e^{\int_s^t a(u)du}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} y(t) &\leq b + b\int_{t_0}^{t} -A'(s)ds \\ &= b + b(A(t_0) - A(t)) \\ &= b + b\left(e^{\int_{t_0}^t a(u)du} - 1\right) \\ &= be^{\int_{t_0}^t a(u)du} \end{aligned}$$

□

L'argument utilisé dans la preuve ci-dessus peut être adapté pour donner une forme différentielle du lemme de Gronwall.

Lemme 2.14 (Lemme de Gronwall, forme différentielle)
Soit I un intervalle, $t_0 \in I$, et a, b, y trois fonctions continues sur I. On suppose que :

- y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
- Pour tout $t \in I$ $y'(t) \leq a(t)y(t) + b(t)$.

Alors l'inégalité suivante est vérifiée pour tout $t \geq t_0$ appartenant à I :

$$y(t) \leq y(t_0)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + \int_{t_0}^{t} b(s)e^{\int_s^t a(u)du}ds$$

Un cas particulier important de ce lemme est celui où b est la fonction nulle, qui se redémontre facilement ; notons qu'ici on n'a pas supposé que a est à valeurs positives.

Démonstration. On considère la fonction v définie sur I par

$$v(t) = y(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}$$

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$, et un calcul de dérivée nous amène à la formule

$$v'(t) = (y'(t) - a(t)y(t))e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds} \leq b(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}$$

En intégrant cela entre t_0 et t (et en utilisant la continuité de v', ce pour quoi on a besoin de supposer y de classe $\mathcal{C}^1$), on obtient pour tout $t \geq t_0$ appartenant à I que

$$v(t) - v(t_0) \leq \int_{t_0}^t b(s)e^{-\int_{t_0}^s a(u)du}ds$$

Nous venons donc d'établir, pour tout $t \geq t_0$ dans I, que

$$y(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds} - y(t_0) \leq \int_{t_0}^t b(s)e^{-\int_{t_0}^s a(u)du}ds$$

En multipliant les deux côtés de l'inégalité par $e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$, on obtient

$$\begin{aligned} y(t) - y(t_0)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} &\leq \left(\int_{t_0}^t b(s)e^{-\int_{t_0}^s a(u)du}ds\right)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} \\ &= \int_{t_0}^t b(s)\left(e^{-\int_{t_0}^s a(u)du}e^{\int_{t_0}^t a(u)}\right)ds \\ &= \int_{t_0}^t b(s)e^{\int_s^t a(u)du}ds \end{aligned}$$

$\square$

Chapitre 3

Théorie de Cauchy–Lipschitz

3.1 Problèmes de Cauchy

Dans cette section, on fixe un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, un ouvert U de $\mathbb{R}^d$, et $f\colon I \times U \to \mathbb{R}^d$.

Définition 3.1

Soit $(t_0, y_0) \in I \times U$. On dit que $y\colon J \to \mathbb{R}^d$ est une *solution au problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)) \ , \ t \in I \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases} \tag{PC}$$

si :

- J est un intervalle ouvert contenu dans I, et $t_0 \in J$;
- y est dérivable sur J ;
- $y(t_0) = y_0$;
- Pour tout $t \in J$, $y(t) \in U$ et $y'(t) = f(t, y(t))$.

On s'intéresse alors à la fois au fait de savoir si (PC) admet une solution, et s'il peut y avoir plusieurs solutions maximales différentes.

Exemple 3.2

Pour essayer de comprendre quelles situations peuvent se présenter, considérons l'exemple du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{|y(t)|} \ , \ t \in \mathbb{R} \\ y(0) \ = 0 \end{cases} \tag{PC2}$$

C'est une équation différentielle autonome, le champ de vecteurs $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par

$$f(t, x) = \sqrt{|x|}$$

est continu.

La fonction nulle est solution de (PC2) ; il y a une autre solution à ce problème de Cauchy. En effet, considérons la fonction y_1 définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y_1(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{4} & \text{si } t \geq 0 \\ -\dfrac{t^2}{4} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Pour tout $t > 0$, on a $y_1'(t) = \dfrac{t}{2} = \sqrt{|y_1(t)|}$; de même, pour $t < 0$, $y_1'(t) = -\dfrac{t}{2} = \sqrt{|y_1(t)|}$.
De plus, $y_1(0) = 0$ et $\dfrac{y_1(t)}{t}$ tend vers 0 quand t tend vers 0, ce qui montre que y est dérivable en 0, de dérivée nulle ; pas conséquent $y_1'(0) = 0 = \sqrt{|y(0)|}$.

Cet exemple nous montre que, même dans le cas d'une équation différentielle autonome associée à un champ de vecteurs continu, il peut y avoir plusieurs solutions maximales différentes d'un même problème de Cauchy.
Par contre, dans le cadre des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1, on a déjà vu que les problèmes de Cauchy admettent une unique solution.
Il est plus délicat de donner des exemples de problèmes de Cauchy n'admettant pas de solution. On a supposé que tous les champs de vecteurs sont continus, ce qui est une condition suffisante d'existence (c'est le théorème de Cauchy–Peano–Arzela).

Exemple 3.3

Autorisons-nous brièvement à considérer des champs de vecteurs non continus ; soit f la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ (i.e. $f(x)$ vaut 1 si $x \in \mathbb{Q}$, et 0 sinon), et l'équation différentielle autonome

$$y'(t) = f(y(t))$$

Considérons le problème de Cauchy associé à cette équation, et à la condition initiale $y(0) = 0$.
Soit y une solution de ce problème de Cauchy définie sur un intervalle ouvert I.
Sa dérivée y' prend la valeur 1, et est à valeurs dans $\{0, 1\}$ puisque f ne prend que ces deux valeurs.
Si $y'(t) = 1$ pour tout $t \in I$, alors on a $y(t) = t$ pour tout $t \in I$, et si on choisit un irrationnel $\alpha \in I$ alors $y'(\alpha) = 1$ et $f(y(\alpha)) = f(\alpha) = 0$, contredisant le fait que y est solution de $y'(t) = f(y(t))$.
Donc y' prend exactement deux valeurs (0 et 1), ce qui contredit le théorème de Darboux selon lequel une fonction dérivée doit satisfaire la conclusion du théorème des valeurs intermédiaires : si elle prend les valeurs 0 et 1 elle doit prendre toutes les valeurs entre 0 et 1. Ce problème de Cauchy ne peut donc pas admettre de solution.
Si on change la condition initiale par $y(0) = \sqrt{2}$ (ou n'importe quelle condition initiale dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$), alors la fonction constante est solution. On voit ainsi que le choix de condition initiale peut influer sur l'existence d'une solution.
Enfin, si on considère l'équation différentielle $y'(t) = 1 + f(y(t))$, où f est toujours la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$, alors un argument similaire à celui qu'on a donné ci-dessus montre qu'il n'y a pas du tout de solutions (quelle que soit la condition initiale).

En pratique, nous allons toujours travailler dans un cadre où un théorème nous garantit l'existence (et l'unicité !) de solutions maximales à un problème de Cauchy donné. Il faudra savoir vérifier les hypothèses de ce théorème... Voyons maintenant comment il s'énonce.

3.2 Énoncé du théorème de Cauchy–Lipschitz

On fixe de nouveau un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, un ouvert U de $\mathbb{R}^d$, et $f\colon I \times U \to \mathbb{R}^d$.
On se donne aussi une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^d$ (rappelons que toutes les normes sur $\mathbb{R}^d$ sont équivalentes, et le choix de la norme n'a pas d'influence sur les énoncés de cette section).

Définition 3.4
On dit que f est une *fonction localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état* si :
Pour tout $(t,x) \in I \times U$ il existe un intervalle ouvert J tel que $t \in J \subseteq I$, un ouvert V tel que $x \in V \subseteq U$, ainsi qu'une constante L satisfaisant

$$\forall s \in J \; \forall y,z \in V \quad \|f(s,y) - f(s,z)\| \leq L\|y-z\|$$

On dit que f est *lipschitzienne par rapport à la variable d'état* si la propriété ci-dessus est vraie pour $J = I$, $U = V$; il faut comprendre le mot "localement" ici comme signifiant : quitte à ne considérer que la restriction de f à un petit ouvert contenant (t,x), on peut supposer que f est lipschitzienne par rapport à la variable d'état.
Cette hypothèse est un peu effrayante, mais on va voir très vite qu'elle est satisfaite par toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème 3.5 (Théorème de Cauchy–Lipschitz)
Soit I un intervalle ouvert, U un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et $f\colon I \times U \to \mathbb{R}^d$. On suppose que :

(H1) f est continue sur $I \times U$.

(H2) f est localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état.

Alors pour tout $(t_0, y_0) \in I \times U$ le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t,y(t)) \ , t \in I \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert $J \subseteq I$.

On repousse la démonstration de ce théorème au chapitre 6 ; pour l'instant, il faut bien comprendre que c'est la solution *maximale* qui est unique.
Comme on a vu au théorème 2.8 que toute solution d'une équation différentielle se prolonge en une solution maximale, le théorème de Cauchy–Lipschitz entraîne que si y_1, y_2 sont deux solutions de (PC) définies sur J_1, J_2 respectivement, alors elles coïncident sur $J_1 \cap J_2$.
L'hypothèse (H2) est délicate à établir, et à manipuler ; c'est pourquoi le résultat suivant sera très utile pour nous en pratique.

Théorème 3.6
Si $f\colon I \times U \to \mathbb{R}^d$ est de classe $\mathcal{C}^1$ alors f satisfait les hypothèses (H1) et (H2) de l'énoncé du théorème de Cauchy–Lipschitz.

Démonstration. Il est bien clair que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ alors elle est continue.
Reste à montrer que f satisfait (H2) ; pour cela, fixons $(t,x) \in I \times U$. On peut trouver un segment J tel que $t \in \mathring{J} \subset I$, ainsi qu'un ouvert convexe V tel que $x \in V$ et $\overline{V}$ soit un compact contenu dans U (une boule ouverte centrée en x, de rayon suffisamment petit, convient).
Munissons $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ de la norme N définie par

$$N(t,x) = |t| + \|x\|$$

et notons $|||\cdot|||$ la norme subordonnée sur l'espace des applications linéaires de $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, N)$ vers $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$.
Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, $J \times \overline{V}$ est compact et la différentielle de f est continue sur $I \times U$, elle doit être bornée sur $J \times \overline{V}$.
Autrement dit, il existe une constante L telle que l'on ait

$$\forall (s,y) \in J \times V \quad |||Df(s,y)||| \leq L$$

Soit $s \in J$. Pour tout (y,z) appartenant à V, le segment reliant (s,y) à (s,z) est contenu dans $J \times V$ et on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis pour obtenir

$$\|f(s,y) - f(s,z)\| \leq L \cdot N(0, y-z) = L\|y-z\|$$

Cette inégalité est en particulier vérifiée pour tout $s \in \mathring{J}$ (qui est un intervalle ouvert contenant t) et tout $y, z \in V$. Cela montre que f est localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état. □

3.3 Premières conséquences du théorème de Cauchy–Lipschitz

Dans cette section, on fixe encore I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et $f \colon I \times U \to \mathbb{R}^d$. On suppose de plus que f satisfait les hypothèses (H1) et (H2) apparaissant dans l'énoncé du théorème de Cauchy–Lipschitz (si ça aide, on pourra penser que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \times U$).

☆ Théorème 3.7
Soit $y_1 \colon J_1 \to \mathbb{R}^d$, $y_2 \colon J_2 \to \mathbb{R}^d$ deux solutions maximales de $y'(t) = f(t, y(t))$.
S'il existe $t_0 \in J_1 \cap J_2$ tel que $y_1(t_0) = y_2(t_0)$, alors $J_1 = J_2$ et $y_1(t) = y_2(t)$ pour tout $t \in J_1$.
On dit que *deux trajectoires distinctes ne peuvent pas se couper*.

Démonstration. On considère le problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t) & = f(t,y(t)) \ , \ t \in I \\ y(t_0) & = y_1(t_0) \end{cases}$.
Alors y_1, y_2 sont deux solutions maximales de ce problème de Cauchy ; puisqu'on a supposé que les conditions d'application du théorème de Cauchy–Lipschitz étaient réunies, on conclut en appliquant ce théorème que $J_1 = J_2$ et $y_1 = y_2$. □

En dimension 1, le théorème des valeurs intermédiaires allié au résultat ci-dessus donne un autre énoncé important.

Théorème 3.8

Soit $y_1 \colon J_1 \to \mathbb{R}$, $y_2 \colon J_2 \to \mathbb{R}$ deux solutions maximales de $y'(t) = f(t, y(t))$.
S'il existe $t_0 \in J_1 \cap J_2$ tel que $y_1(t_0) < y_2(t_0)$, alors $y_1(t) < y_2(t)$ pour tout $t \in J_1 \cap J_2$.
On dit que *dans* $\mathbb{R}$*, les trajectoires sont ordonnées.*

Démonstration. Fixons $t_0 \in J_1 \cap J_2$ tel que $y_1(t_0) < y_2(t_0)$. Alors $J_1 \cap J_2$ est un intervalle, et

$$y_1 - y_2 \colon J_1 \cap J_2 \to \mathbb{R}$$

est une fonction continue.
S'il existe $t_1 \in J_1 \cap J_2$ tel que $y_1(t_1) \geq y_2(t_1)$, alors on a à la fois

$$(y_1 - y_2)(t_0) < 0 \quad \text{et} \quad (y_1 - y_2)(t_1) \geq 0$$

Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure qu'il existe $t \in J_1 \cap J_2$ tel que $y_1(t) - y_2(t) = 0$. D'après le théorème 3.7, on a $J_1 = J_2$ et $y_1 = y_2$, ce qui est impossible puisque $y_1(t_0) < y_2(t_0)$. Par conséquent, il ne peut exister $t_1 \in J_1 \cap J_2$ tel que $y_1(t_1) \geq y_2(t_1)$, autrement dit $y_1(t) < y_2(t)$ pour tout $t \in J_1 \cap J_2$. □

Exemple 3.9

Considérons l'équation différentielle autonome

$$y'(t) = (y(t))^2 \tag{E}$$

Le champ de vecteurs $f \colon (t, x) \mapsto x^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$; de plus, la fonction nulle est solution sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Cauchy–Lipschitz (ou plutôt sa conséquence, le théorème 3.7), une solution de (E) différente de la fonction nulle ne peut pas s'annuler.
Soit $y \colon J \to \mathbb{R}$ une telle solution ; puisqu'on a établi que $y(t)$ ne s'annule pas sur J, on peut écrire

$$\forall t \in J \quad \frac{y'(t)}{(y(t))^2} = 1$$

Par conséquent, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $-\dfrac{1}{y(t)} = t + K$ pour tout $t \in J$, autrement dit

$$\forall t \in J \quad y(t) = -\frac{1}{t + K}$$

Réciproquement, la fonction $t \mapsto -\dfrac{1}{t+K}$ est bien solution de l'équation (E) sur $]-\infty, -K[$ ainsi que sur $]-K, +\infty[$ (et n'admet pas de limite finie en $-K$).
Ainsi, les solutions maximales de (E) sont

- La fonction nulle, définie sur $\mathbb{R}$.
- Pour chaque $K \in \mathbb{R}$, la fonction $y_K^+ \colon]-K, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $y_K^+(t) = -\dfrac{1}{t+K}$.
- Pour chaque $K \in \mathbb{R}$, la fonction $y_K^- \colon]-\infty, -K[\to \mathbb{R}$ définie par $y_K^-(t) = -\dfrac{1}{t+K}$.

Par exemple, essayons de résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t) & = (y(t))^2 \\ y(1) & = 1 \end{cases}.$

On utilise notre description des solutions maximales : on cherche $K \in \mathbb{R}$ tel que $-\dfrac{1}{1+K} = 1$, c'est-à-dire $1 + K = -1$ ou encore $K = -2$.
Finalement, la solution maximale de notre problème de Cauchy est définie sur $]-\infty, -2[$ et donnée sur cet intervalle par la formule $y(t) = -\dfrac{1}{t-2}$.

3.4 Le théorème d'explosion en temps fini

On discute maintenant un autre théorème important, dont la preuve sera vue plus tard.

Théorème 3.10 (Théorème d'explosion en temps fini)
Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert, et $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction vérifiant les hypothèses (H1) et (H2) du théorème de Cauchy–Lipschitz.
Soit y une solution maximale de l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$, définie sur un intervalle ouvert $J =]\alpha, \beta[$. Alors :

- Si $\beta < b$, on a nécessairement $\lim\limits_{t \to \beta^-} \|y(t)\| = +\infty$.
- Si $\alpha > a$, on a nécessairement $\lim\limits_{t \to \alpha^+} \|y(t)\| = +\infty$.

Informellement : si la solution n'est pas globale, alors elle explose en temps fini. En particulier, dans le contexte de l'énoncé ci-dessus, une solution maximale et bornée est nécessairement globale.
Mentionnons quelques conséquences de ce théorème, qui sont importantes pour comprendre le comportement qualitatif de solutions d'équations différentielles.

Théorème 3.11
Soit I un intervalle ouvert, $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction vérifiant les hypothèses (H1) et (H2) du théorème de Cauchy–Lipschitz. On suppose de plus que f est bornée.
Alors toutes les solutions maximales de l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ sont globales.

Démonstration. Soit $y : J \to \mathbb{R}^d$ une solution. Soit $t_0 \in J$.
Puisque $y'(t) = f(t, y(t))$ pour tout $t \in J$, et f est bornée, il existe une constante M telle que $\|y'(t)\| \leq M$ pour tout $t \in J$.
Mais alors l'inégalité des accroissements finis nous assure que pour tout $t \in J$ on a

$$\|y(t) - y(t_0)\| \leq M\|t - t_0\|$$

Par conséquent, $\|y(t)\| \leq \|y(t_0)\| + M\|t - t_0\|$ pour tout $t \in J$, ce qui montre que y est bornée sur tout intervalle borné contenu dans J ; en particulier elle ne peut pas exploser en temps fini.
On en conclut que y est une solution globale. $\square$

Définition 3.12

On dit que $f\colon I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est *globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'état* s'il existe $k\colon I \to \mathbb{R}$ continue et telle que

$$\forall t \in I\ \forall x, y \in \mathbb{R}^d \quad \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k(t)\|x - y\|$$

Attention!

La terminologie (qui est communément employée) est ici un peu trompeuse : dire que f est globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'état ne revient pas à dire que f est lipschitzienne par rapport à la variable d'état sur $I \times \mathbb{R}^d$ tout entier ; c'est un énoncé plus faible.

Théorème 3.13

On suppose que $f\colon I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est continue et globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'état. Alors toutes les solutions maximales de $y'(t) = f(t, y(t))$ sont globales.

Démonstration. Fixons $k\colon I \to \mathbb{R}$ continue et telle que

$$\forall t \in I\ \forall x, y \in \mathbb{R}^d \quad \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k(t)\|x - y\|$$

Soit $y\colon J \to \mathbb{R}^d$ une solution. Fixons $t_0 \in J$; comme ci-dessus, pour montrer que $\sup(J) = \sup(I)$ il suffit de montrer que y est bornée sur $]t_0, \beta[$ pour tout $\beta \in J$ plus grand que t_0.
Fixons un tel β, et notons que pour tout $t \in]t_0, \beta[$ on a

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} y'(s)ds = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \|f(s, y(s))\| &\leq \|f(s, y(s)) - f(s, y(t_0))\| + \|f(s, y(t_0)\| \\ &\leq k(s)\|y(s) - y(t_0)\| + \|f(s, y(t_0))\| \end{aligned}$$

On déduit de cela que

$$\begin{aligned} \|y(t) - y(t_0)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s))\| ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, y(t_0))\| ds + \int_{t_0}^{t} k(s)\|y(s) - y(t_0)\| ds \\ &\leq C + \int_{t_0}^{t} k(s)\|y(s) - y(t_0)\| ds \end{aligned}$$

où $C = \displaystyle\int_{t_0}^{\beta} \|f(s, y(t_0))\| ds$ est une constante finie puisque $s \mapsto f(s, y(t_0))$ est continue et qu'on l'intègre sur un segment.

La forme intégrale du lemme de Gronwall nous assure alors que

$$\|y(t) - y(t_0)\| \leq C \exp\left(\int_{t_0}^{t} k(s)ds\right) \leq C \exp\left(\int_{t_0}^{\beta} k(s)ds\right)$$

Comme k est continue, l'intégrale ci-dessus est finie ; on vient de montrer que y est bornée sur $]t_0, \beta[$ et ne peut donc exploser en β.
On déduit du théorème d'explosion en temps fini que $\sup(J) = \sup(I)$.
L'argument pour montrer que $\inf(J) = \inf(I)$ est similaire (ou se déduit de ce qu'on vient de faire en inversant le sens du temps).

$\square$

Chapitre 4

Équations différentielles linéaires

Dans ce chapitre, nous allons étudier le cas particulier des équations différentielles linéaires ; elles forment une famille importante pour plusieurs raisons :

- Toutes leurs solutions maximales sont globales, et on peut décrire précisément la structure de l'ensemble des solutions maximales (c'est un espace affine).
- Dans le cas des équations à coefficients constants, on peut résoudre explicitement les équations homogènes (via des calculs d'exponentielles de matrices) et bien comprendre le comportement qualitatif de ces solutions.
- Cette compréhension du comportement qualitatif des solutions d'équations différentielles linéaires, homogènes, à coefficients constants, est la base de l'étude du comportement asymptotique des solutions d'équations différentielles autonomes, dont on verra des rudiments au chapitre suivant.

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, d est un entier supérieur ou égal à 1 ; $A \colon I \to M_d(\mathbb{R})$ et $b \colon I \to \mathbb{R}^d$ sont deux fonctions continues.

4.1 Équations différentielles linéaires ; structure de l'espace des solutions

Définition 4.1

Une *équation différentielle linéaire* est une équation de la forme

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \tag{L}$$

L'équation est *linéaire homogène* quand $b = 0$, autrement dit quand elle s'écrit

$$y'(t) = A(t)y(t) \tag{L_H}$$

On dit que (L_H) est l'équation homogène associée à (L).

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions maximales de (L), et $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions maximales de (L_H).

☆ Théorème 4.2 (Structure de l'ensemble des solutions)

1. Pour tout $t_0 \in I$ et tout $y_0 \in \mathbb{R}^d$ il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy
$$\begin{cases} y'(t) & = A(t)y(t) + b(t) \ , t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
et cette solution est globale.
2. L'ensemble $\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de dimension d de l'espace $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$. Pour tout $t_0 \in I$, l'application $\Phi_{t_0} \colon \begin{cases} \mathcal{S}_H \to \mathbb{R}^d \\ y \mapsto y(t_0) \end{cases}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
3. L'ensemble $\mathcal{S}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$, de direction $\mathcal{S}_H$ (autrement dit, si on fixe y appartenant à $\mathcal{S}$, on a $\mathcal{S} = y + \mathcal{S}_H$).

Démonstration. Le champ de vecteurs $f \colon I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ associé à l'équation (L) est donné par la formule
$$f(t, x) = A(t)x + b(t)$$
Ce champ de vecteurs est continu puisqu'on a supposé A, b continues.
Pour montrer la première propriété ci-dessus, il nous suffit d'établir que f est globalement lipschitzienne, puisqu'on pourra alors appliquer le théorème de Cauchy–Lipschitz et le théorème 3.13.
Pour cela, fixons une norme $\| \cdot \|$ sur $\mathbb{R}^d$ et notons que pour tout $t \in I$ et tout $x, y \in \mathbb{R}^d$ on a
$$\|f(t, x) - f(t, y)\| = \|A(t)x - A(t)y\| \leq |||A(t)||| \cdot \|x - y\|$$
L'application $k \colon t \mapsto |||A(t)|||$ étant continue, on vient de montrer que le champ de vecteurs est globalement lipschitzien, ce qui permet de conclure.

Passons à la preuve du fait que $\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$. La fonction nulle appartient bien à $\mathcal{S}_H$, et toute solution de $\mathcal{S}_H$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$.
Reste à établir la stabilité de $\mathcal{S}_H$ par combinaisons linéaires ; pour cela, fixons $y_1, y_2 \in \mathcal{S}_H$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Alors on a pour tout $t \in I$:
$$\begin{aligned} (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)'(t) &= \lambda_1 y_1'(t) + \lambda_2 y_2'(t) \\ &= \lambda_1 A(t) y_1(t) + \lambda_2 A(t) y_2(t) \\ &= A(t)(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)(t) \end{aligned}$$
Donc $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ appartient à $\mathcal{S}_H$, ce qui prouve que c'est bien un sous-espace vectoriel.

Fixons $t_0 \in I$; le théorème de Cauchy–Lipschitz affirme que, pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^d$, il existe un unique $y \in \mathcal{S}_H$ tel que $y(t_0) = y_0$, autrement dit que l'application $\Phi_{t_0} \colon y \mapsto y(t_0)$ est une bijection de $\mathcal{S}_H$ sur $\mathbb{R}^d$.
Il est clair que Φ_{t_0} est linéaire, c'est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels, et la dimension de $\mathcal{S}_H$ est donc celle de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire d.

Il nous reste à décrire la structure de l'espace $\mathcal{S}$ formé par les solutions de (L). Pour cela, fixons $y_p \in \mathcal{S}$. Alors, pour toute fonction $y\colon I \to \mathbb{R}^d$ on a

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{S} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall t \in I \ y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in I \ y'(t) - y_p'(t) = (A(t)y(t) + b(t)) - (A(t)y_p(t) + b(t)) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in I \ y'(t) - y_p'(t) = A(t)(y(t) - y_p(t))) \\ &\Leftrightarrow \quad y - y_p \in \mathcal{S}_H \end{aligned}$$

On vient d'établir que $\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_H$, ce qui conclut la démonstration. □

4.2 Systèmes fondamentaux

Lemme 4.3

Soit k un entier inférieur ou égal à d, et $t_0 \in I$. Soit $y_1, \dots, y_k$ des solutions de (L$_H$). Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) La famille $(y_1, \dots, y_k)$ est libre dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$.

(ii) Pour tout $t \in I$ la famille $(y_1(t), \dots, y_k(t))$ est libre dans $\mathbb{R}^d$.

(iii) Il existe $t_0 \in I$ tel que la famille $(y_1(t_0), \dots, y_k(t_0))$ est libre dans $\mathbb{R}^d$.

Démonstration. Supposons la première propriété vérifiée, et fixons $t \in I$; on a vu au théorème 4.2 que l'application $\Phi_t\colon y \mapsto y(t)$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}_H$ sur $\mathbb{R}^d$. Donc

$$(\Phi_t(y_1), \dots, \Phi_t(y_k)) = (y_1(t), \dots, y_k(t))$$

est une famille libre de $\mathbb{R}^d$.
La troisième propriété est clairement une conséquence de la deuxième ; supposons qu'elle est vérifiée. Alors $(y_1, \dots, y_k) = \left(\Phi_{t_0}^{-1}(y_1(t_0)), \dots, \Phi_{t_0}^{-1}(y_k(t_0))\right)$ est une famille libre. □

Définition 4.4

Une famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$ de solutions indépendantes de (L$_H$) (autrement dit, une base de $\mathcal{S}_H$) est appelée un *système fondamental de solutions* de (L$_H$).

Toute solution y s'écrit alors de manière unique sous la forme $y = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k \varphi_k$.

La *matrice fondamentale* associée à $(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$ au temps $t \in I$ est la matrice

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_d(t) \end{pmatrix}$$

Autrement dit, Φ est une application de I vers $M_d(\mathbb{R})$, et la k-ième colonnne de $\Phi(t)$ est donnée par les coordonnées de $\varphi_k(t)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$.
La déterminant de Φ est appelé *wronskien* du système fondamental $(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$.
Explicitement, on a la formule $w(t) = \det(\Phi(t))$ pour tout $t \in I$.

Théorème 4.5

Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$ une famille fondamentale de solutions de (L_H). Alors :

1. Pour tout $t \in I$ $\Phi(t)$ est inversible, et $w(t) \neq 0$.
2. Le wronskien $w \colon I \to \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle
$$w'(t) = \mathrm{tr}(A(t))w(t)\,,\ t \in I$$
et on a donc pour tout $t, t_0 \in I$ l'égalité
$$w(t) = w(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(A(s))ds\right)$$

Démonstration. Le premier point ci-dessus est une conséquence immédiate du lemme 4.3 puisque les colonnes de $\Phi(t)$ forment une famille libre dans $\mathbb{R}^d$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc $\Phi(t)$ est inversible, et son déterminant $w(t)$ est non nul.
Pour établir la seconde propriété, on va utiliser la règle de la chaîne. Rappelons qu'on a établi en 1.12 que, pour toute matrice inversible A, l'application $\det \colon M_d(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est différentiable en A, et qu'on a pour tout $M \in M_d(\mathbb{R})$ l'égalité
$$D\det(A)(M) = \det(A)\,\mathrm{tr}(A^{-1}M)$$
De plus, comme chaque colonne de Φ est une solution de (L_H), on a l'égalité
$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$$
Fixons $t \in I$. Puisque $w(t) = \det(\Phi(t))$, la règle de la chaîne donne
$$\begin{aligned} w'(t) &= D\det(\Phi(t))(\Phi'(t)) \\ &= \det(\Phi(t))\,\mathrm{tr}\left(\Phi(t)^{-1}\Phi'(t)\right) \\ &= \det(\Phi(t))\,\mathrm{tr}\left(\Phi(t)^{-1}A(t)\Phi(t)\right) \\ &= \det(\Phi(t))\,\mathrm{tr}\left(A(t)\Phi(t)\Phi(t)^{-1})\right) \\ &= w(t)\,\mathrm{tr}\,(A(t)) \end{aligned}$$
On reconnaît une équation différentielle linéaire scalaire, qu'on sait résoudre, et on obtient ainsi la formule $w(t) = w(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(A(s))ds\right)$ valable pour tout $t, t_0 \in I$. $\square$

4.3 Expression des solutions et formule de Duhamel

Toute la difficulté de la résolution des équations différentielles linéaires réside dans la détermination d'un système fondamental de solutions de l'équation homogène associée ou, ce qui revient au même, une matrice fondamentale $\Phi(t)$. En effet, une fois qu'on sait déterminer une matrice fondamentale pour l'équation homogène, on a une formule permettant de calculer les solutions de l'équation linéaire.

☆ Théorème 4.6 (Formule de Duhamel)

Soit $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^d$ et $\Phi \colon I \to M_d(\mathbb{R})$ une matrice fondamentale de (L_H).

1. La solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) &= A(t)y(t) \ , \ t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

est donnée par la formule :

$$\forall t \in I \quad y(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}y_0$$

2. La solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) &= A(t)y(t) + b(t) \ , \ t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

est donnée par la formule :

$$\forall t \in I \quad y(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi(s)^{-1}b(s)ds$$

La formule ci-dessus est appelée *formule de Duhamel*.

Démonstration. Commençons par traiter le cas homogène, et considérons $z \colon I \to \mathbb{R}^d$ définie par

$$z(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}y_0$$

Alors on a $z(t_0) = \Phi(t_0)\Phi(t_0)^{-1}y_0 = y_0$ et

$$\begin{aligned} \forall t \in I \quad z'(t) &= \Phi'(t)\Phi(t_0)^{-1}y_0 \\ &= A(t)\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}y_0 \\ &= A(t)z(t) \end{aligned}$$

Reste à démontrer (2). Pour cela, considérons cette fois la fonction $z \colon I \to \mathbb{R}^d$ définie par

$$z(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi(s)^{-1}b(s)ds = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}y_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}b(s)ds$$

À nouveau, on a $z(t_0) = y_0$; de plus, en appliquant le théorème fondamental de l'analyse, et la formule de dérivation d'un produit, on obtient pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned} z'(t) &= \Phi'(t)\Phi(t_0)^{-1}y_0 + \Phi'(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}b(s)ds + \Phi(t)\Phi(t)^{-1}b(t) \\ &= A(t)\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}y_0 + A(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi(s)^{-1}b(s)ds + b(t) \\ &= A(t)z(t) + b(t) \end{aligned}$$

$\square$

En dimension 1, quand on doit résoudre $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$, $t \in I$, l'espace des solutions de l'équation homogène associé est de dimension 1 : ce sont les multiples de $\varphi\colon t \mapsto e^{A(t)}$, où A est une primitive de a. Dans ce cas, notre matrice fondamentale $\Phi(t)$ s'identifie au scalaire $\varphi(t)$ (c'est une matrice à 1 ligne et 1 colonne !) et on a $\Phi(t)^{-1} = \dfrac{1}{\varphi(t)}$. On a aussi

$$\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1} = e^{A(t)-A(t_0)} = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$$

On voit donc que, en dimension 1, la formule de Duhamel donne la même forme pour les solutions que cette qu'on avait déjà obtenue.
En général, en dimension supérieure à 1, on peut appliquer une méthode de variation de la constante pour résoudre l'équation linéaire, quand on connaît les solutions de l'équation homogène. On ne donnera pas de détails ici, mais notons que :

- Ce n'est pas toujours possible de calculer explicitement $\Phi(t)$ pour tout $t \in I$.
- En dimension 1, on a vu comment faire ; en dimension 2 et supérieure, on n'a souvent pas de calcul explicite des solutions.
- Dans le cas des équations différentielles *à coefficients constants*, qu'on va développer dans la section suivante, on a une méthode explicite, qui repose à nouveau sur un calcul d'exponentielle ; sans surprise, il s'agit cette fois d'exponentielles *de matrices*, et celles-ci peuvent être coûteuses à calculer...

4.4 Interlude : exponentielle de matrices

On commence par travailler dans $M_d(\mathbb{C})$, où $d \in \mathbb{N}^*$; on va privilégier ici le travail dans $\mathbb{C}$ parce que l'algèbre linéaire y est plus simple [(i)] : comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, toute matrice admet un polynôme annulateur scindé. Par conséquent, toute matrice dans $M_d(\mathbb{C})$ est trigonalisable.
Avant de parler d'exponentielle, rappelons un lemme utile d'algèbre linéaire (qui est faux si on travaille sur $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{C}$)

☆ Lemme 4.7
Les matrices diagonalisables sont denses dans $M_d(\mathbb{C})$.

Démonstration. Soit $M \in M_d(\mathbb{C})$; il existe une matrice triangulaire supérieure T et une matrice inversible P telles que $M = PTP^{-1}$ (parce que M admet un polynôme annulateur scindé).
Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ les coefficients diagonaux de T. On peut trouver $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d$ arbitrairement petits et tels que pour tout $i \neq j$ on ait

$$\lambda_i + \varepsilon_i \neq \lambda_j + \varepsilon_j$$

Alors la matrice $\tilde{T} = T + \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$ est triangulaire supérieure, arbitrairement proche de T, et ses coefficients diagonaux sont deux à deux distincts.

Dont $\tilde{T}$ est diagonalisable (elle est annulée par le polynôme $\displaystyle\prod_{i=1}^{d}(X - (\lambda_i + \varepsilon_i))$, qui est scindé à racines simples), et il en va de même de $P\tilde{T}P^{-1}$, qu'on peut rendre arbitrairement proche de T en

(i). "Le plus court chemin entre deux énoncés réels passe par le complexe", disait Hadamard.

choisissant $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d$ suffisamment petits (on utilise ici que le produit de matrices est une application continue sur $M_d(\mathbb{C})$). $\square$

Définition 4.8

Soit $M \in M_d(\mathbb{C})$. On pose $\exp(M) = e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$.

Il faut déjà justifier que cette série est bien convergente ; pour cela, fixons une norme sur $\mathbb{C}^d$, et notons $|||\cdot|||$ la norme subordonnée correspondante.
Puisque $(M_d(\mathbb{C}), |||\cdot|||)$ est complet (c'est un espace de dimension finie), il nous suffit de justifier que la série définissant $\exp(M)$ est absolument convergente.
Pour cela, notons que, pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N} \left|\left|\left| \frac{M^k}{k!} \right|\right|\right| &\leq \sum_{k=0}^{N} \frac{|||M|||^k}{k!} \\ &\leq e^{|||M|||} \end{aligned}$$

En fait, le calcul précédent nous montre que la série définissant l'exponentielle de matrices converge normalement, donc uniformément, sur toute partie bornée de $M_d(\mathbb{C})$; par conséquent, l'application $\exp$ est continue sur $M_d(\mathbb{C})$.

Lemme 4.9

Si M est la matrice diagonale $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ alors $e^M = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_d})$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du fait que $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_d^k)$, et de la formule définissant e^M. $\square$

Lemme 4.10

Soit $A, B \in M_d(\mathbb{C})$ et $P \in Gl_d(\mathbb{C})$. Si $A = PBP^{-1}$ alors $e^A = Pe^BP^{-1}$.

Démonstration. On vérifie par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$A^k = \underbrace{(PBP^{-1}) \dots (PBP^{-1})}_{k \text{ fois}} = PB(P^{-1}P)B \dots (P^{-1}P)BP^{-1} = PB^kP^{-1}$$

Alors on a pour tout $N \in \mathbb{N}$ l'égalité

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{N} P\frac{B^k}{k!}P^{-1} \\ &= P\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{B^k}{k!}\right)P^{-1} \end{aligned}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient $e^A = Pe^BP^{-1}$.

$\square$

En fait, la fonction qui va vraiment nous être utile est celle qui à t associe e^{tA}, où A est une matrice fixée ; pour rester dans l'esprit de cette partie du cours, on va utiliser cette fonction pour établir des propriétés de l'exponentielle matricielle.

Lemme 4.11

Soit $A, B \in M_d(\mathbb{C})$ deux matrices qui commutent. Alors e^{tA} et e^{sB} commutent pour tout $t, s \in \mathbb{R}$

Démonstration. Supposons que A et B commutent.
On commence par remarquer que $A^k B^l = B^l A^k$ pour tout $k, l \in \mathbb{N}$ (à k fixé, cela se démontre par récurrence sur l) puis, en développant les produits, on obtient $P(A)Q(B) = Q(B)P(A)$ pour tous polynômes A, B.
On a en particulier, pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'égalité

$$\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{N} \frac{B^l}{l!}\right) = \left(\sum_{l=0}^{N} \frac{B^l}{l!}\right)\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}\right)$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ et en passant à la limite, on obtient que $e^A e^B = e^B e^A$ dès que A et B commutent.
Puisque tA et sB commutent pour tout $t, s \in \mathbb{R}$ du moment que A et B commutent, on en déduit le résultat attendu. $\square$

Remarque 4.12

On aurait aussi pu arguer que (A étant fixée) l'espace

$$E_A = \{P(A) \colon P \in \mathbb{C}[X]\}$$

est un sous-espace vectoriel de $M_d(\mathbb{C})$. Donc E_A est fermé puisque $M_d(\mathbb{C})$ est de dimension finie.
Puisque $\exp(A)$ est une limite d'éléments de E_A, et que E_A est fermé, on a donc $\exp(A) \in E_A$: il existe un polynôme P tel que $\exp(A) = P(A)$ (attention, ce polynôme dépend de A !).
De même, il existe un polynôme Q tel que $Q(B) = \exp(B)$, et on déduit du fait que $P(A)$ et $Q(B)$ commutent que $\exp(A)$ et $\exp(B)$ commutent.
Notons que cet argument montre aussi que, si A et B commutent, alors A et $\exp(B)$ commutent également, fait qu'on utilisera sans commentaire dans la suite.

Lemme 4.13

Soit $A \in M_d(\mathbb{C})$ et $s, t \in \mathbb{R}$. Alors on a

$$e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA}$$

Démonstration. Si A est diagonale, le résultat suit du lemme 4.9 et du fait que pour $s,t \in \mathbb{R}$ on a $e^{t+s} = e^t e^s$.
Si $A = PDP^{-1}$, où D est diagonale, alors pour tout $s,t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} e^{(t+s)A} &= Pe^{(t+s)D}P^{-1} \\ &= Pe^{tD}e^{sD}P^{-1} \\ &= (Pe^{tD}P^{-1})(Pe^{sD}P^{-1}) \\ &= e^{tA}e^{sA} \end{aligned}$$

Si maintenant A est une matrice quelconque, on peut trouver une suite de matrices diagonalisables (A_n) qui converge vers A dans $M_d(\mathbb{C})$; par continuité de $M \mapsto e^M$, on en déduit pour tout $t,s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e^{(t+s)A} &= \lim_{n\to+\infty} e^{(t+s)A_n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} e^{tA_n}e^{sA_n} \\ &= e^{tA}e^{sA} \end{aligned}$$

□

Nous sommes enfin prêts à démontrer le résultat suivant, qui est fondamental pour nous.

☆ Théorème 4.14

Soit $A \in M_d(\mathbb{C})$. L'application $f_A \colon t \mapsto e^{tA}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f_A'(t) = Ae^{tA}$.

Démonstration. On revient à la définition d'une dérivée ; fixons $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} e^{(t+h)A} &= e^{tA}e^{hA} \\ &= e^{tA}\left(I + hA + h^2A^2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{h^{k-2}A^{k-2}}{k!}\right) \\ &= e^{tA}(I_d + hA + \underset{h\to 0}{o}(h)) \\ &= e^{tA} + hAe^{tA} + \underset{h\to 0}{o}(h) \end{aligned}$$

Donc $\dfrac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h}$ tend vers Ae^{tA} quand h tend vers 0, autrement dit $f_A'(t)$ existe et vaut Ae^{tA}. □

Nous venons donc de trouver la solution de l'équation différentielle homogène, à coefficients constants, $y'(t) = Ay(t)$, qui prend la valeur I_d quand $t = 0$. Profitons de notre travail pour établir quelques propriétés de l'exponentielle de matrices.

☆ Lemme 4.15

Soit $A, B \in M_d(\mathbb{C})$ deux matrices qui *commutent*, i.e. $AB = BA$. Alors on a

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

(et cette égalité est fausse en général)

Démonstration. Considérons l'application $g\colon t \mapsto e^{tA}e^{tB}$. Le travail que nous avons effectué ci-dessus porte ses fruits, et nous pouvons écrire pour tout $h \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} e^{(t+h)A}e^{(t+h)B} &= e^{tA}e^{tB}e^{hA}e^{hB} \\ &= g(t)e^{hA}e^{hB} \\ &= g(t)(I_d + hA + o(h))(I_d + hB + o(h)) \\ &= g(t) + hg(t)(A+B) + \underset{h\to 0}{o}(h) \end{aligned}$$

Par conséquent, g est dérivable, de dérivée $g'(t) = (A+B)g(t)$. Par ailleurs, $g(0) = I_d$.
Le théorème de Cauchy–Lipschitz, appliqué au problème de Cauchy

$$\begin{cases} M'(t) = (A+B)M(t) \\ M(0) \;= I_d \end{cases}$$

nous permet alors de conclure que $g(t) = e^{(A+B)t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (en effet, ces deux fonctions sont solutions du même problème de Cauchy ; on peut appliquer le théorème de Cauchy–Lipschitz puisqu'il s'agit d'une équation différentielle linéaire).
En évaluant en $t = 1$, on obtient comme attendu l'égalité $e^{A+B} = e^A e^B$. □

Attention!

Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On a alors $A^2 = 0$, donc

$$e^A = I_2 + A + 0 + 0 + \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puisque $B^2 = B$ on a $B^n = B$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc

$$e^B = I_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B}{k!} = I_2 + B(e-1) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(on aurait aussi pu remarquer que B est diagonale et appliquer le lemme 4.9)
De même, $(A+B)^2 = A + B$ donc par le même raisonnement que ci-dessus

$$e^{A+B} = I_2 + (A+B)(e-1) = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient alors

$$e^A e^B = \begin{pmatrix} e & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq e^{A+B}$$

Il faut donc se méfier de la formule $e^{A+B} = e^A e^B$, qui peut être fausse si A et B ne commutent pas.

Récapitulons quelques propriétés que nous avons établies dans cette section.

Théorème 4.16 (Quelques propriétés de l'exponentielle matricielle)

1. Si A, B sont deux matrices dans $M_d(\mathbb{C})$ qui commutent, i.e. $AB = BA$, alors on a
$$e^{A+B} = e^A e^B$$
(et cette égalité est fausse en général).
2. Pour tout $A \in M_d(\mathbb{C})$, e^A est inversible, d'inverse e^{-A}.
3. Si $A = PBP^{-1}$ alors $e^A = Pe^B P^{-1}$
4. Si A est la matrice diagonale $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ alors $e^A = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_d})$.

Démonstration. La deuxième propriété est la seule que nous n'avons pas encore démontrée ; elle suit immédiatement du fait que $e^0 = I_d$, et de l'égalité suivante, valable pour tout $A \in M_d(\mathbb{C})$:
$$e^A e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = I_d$$
□

En pratique, calculer l'exponentielle d'une matrice peut être délicat, et il est souvent utile de faire les calculs dans $\mathbb{C}$. On y reviendra plus tard, surtout dans le cas $d = 2$.

4.5 Le cas des équations différentielles linéaires à coefficients constants

Théorème 4.17

Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$, $d \in \mathbb{N}^*$ et $y_0 \in \mathbb{R}^d$.

La solution maximale de $\begin{cases} y'(t) &= Ay(t) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$ est $y \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ définie par $y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0$.

Attention!

Le produit $e^{(t-t_0)A} y_0$ est le produit de la *matrice* $e^{(t-t_0)A}$ par le *vecteur* y_0 (écrit en colonne) ; on ne peut pas écrire $y_0 e^{(t-t_0)A}$, ce produit n'ayant pas de sens (sauf si $d = 1$...).

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 4.14 pour obtenir :
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(e^{(t-t_0)A} y_0\right) &= \frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) e^{-t_0 A} y_0 \\ &= Ae^{tA} e^{-t_0 A} y_0 \\ &= A\left(e^{(t-t_0)A} y_0\right) \end{aligned}$$

Il est également immédiat que $y(t_0) = e^0 y_0 = y_0$. □

Exemple 4.18

Étudions en détail le cas d'une équation différentielle linéaire $y'(t) = Ay(t)$ où $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $A \in M_2(\mathbb{R})$. Plusieurs cas sont possibles.

1. A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$: dans ce cas, on trouve deux valeurs propres réelles λ_1, λ_2 et v_1, v_2 deux vecteurs propres associés non colinéaires (on peut avoir $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, auquel cas $A = \lambda I_2$).

   Notons P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2), autrement dit la matrice dont les deux colonnes sont v_1 et v_2, écrits dans la base canonique. On a alors $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$, d'où la formule valable pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

   Alors la solution de $y'(t) = Ay(t)$ satisfaisant $y(0) = y_0$ s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} e^{tA} y_0 &= P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1} y_0 \\ &= P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \alpha_1 \\ e^{\lambda_2 t} \alpha_2 \end{pmatrix} \\ &= \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \end{aligned}$$

   Finalement, on voit que dans ce cas les fonctions $t \mapsto e^{\lambda_1 t} v_1$ et $t \mapsto e^{\lambda_2 t} v_2$ forment une base de l'espace des solutions.

2. A admet une valeur propre réelle double λ, et est non diagonalisable.

   On doit avoir $(A - \lambda I_2)^2 = 0$ et $A - \lambda I_2 \neq 0$. En particulier, l'image de $A - \lambda I_2$ doit être de dimension 1, puisqu'elle n'est ni réduite à $\{0\}$ ni égale à $\mathbb{R}^2$.

   Soit v_1 un vecteur propre associé à la valeur propre λ ($\mathbb{R}v_1$ est le seul espace propre de A), et w un vecteur générateur de l'image de $A - \lambda I_2$.

   Alors il existe u tel que $w = (A - \lambda I_2)(u)$, donc

$$(A - \lambda I_2) w = (A - \lambda I_2)^2 u = 0$$

   Autrement dit, $Aw = \lambda w$, ce qui n'est possible que si w est colinéaire à v_1 ; par conséquent, v_1 est dans l'image de $A - \lambda I_2$, et on peut donc trouver v_2 tel que $v_1 = (A - \lambda I_2) v_2$, c'est-à-dire

$$A v_2 = v_1 + \lambda v_2$$

Nécessairement, v_2 n'est pas colinéaire à v_1, donc (v_1, v_2) forme une base de $\mathbb{R}^2$. En notant P la matrice de passage associée, on a

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1} = P\tilde{A}P^{-1}$$

En notant $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a $N^2 = 0$, donc $e^N = I_2 + N$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e^{t\tilde{A}} &= e^{t\lambda I_2 + tN} \\ &= e^{\lambda t I_2} e^{tN} \\ &= e^{\lambda t}(I_2 + tN) \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On fait le même calcul que dans le premier cas : comme plus haut, les solutions de l'équation $y'(t) = Ay$ s'écrivent sous la forme

$$\begin{aligned} e^{tA}y_0 &= P \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} P^{-1}y_0 \\ &= P \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} e^{\lambda t}\alpha_1 + te^{\lambda t}\alpha_2 \\ e^{\lambda t}\alpha_2 \end{pmatrix} \\ &= \alpha_1 e^{\lambda t} v_1 + \alpha_2(te^{\lambda t}v_1 + e^{\lambda t}v_2) \end{aligned}$$

On voit finalement que, dans ce cas, une base de l'espace des solutions de $y'(t) = Ay(t)$ est donnée par les fonctions $t \mapsto e^{\lambda t}v_1$ et $t \mapsto te^{\lambda t}v_1 + e^{\lambda t}v_2$.

3. Le dernier cas est celui où A a deux valeurs propres complexes distinctes $\lambda, \overline{\lambda}$.

   Soit v un vecteur propre associé à la valeur propre λ dans $\mathbb{C}^2$; puisque A est réelle, $\overline{v}$ est vecteur propre pour la valeur propre $\overline{\lambda}$.

   Le même calcul que dans le premier cas (fait dans $\mathbb{C}^2$, cette fois) nous montre que $z\colon t \mapsto e^{\lambda t}v$ satisfait $z'(t) = Az(t)$; mais z est à valeurs dans $\mathbb{C}^2$.

   Notons v_1, v_2 la partie réelle et la partie imaginaire de v ; alors v_1, v_2 est une base de $\mathbb{R}^2$ (parce que v et $\overline{v}$ ne sont pas colinéaires dans $\mathbb{C}^2$).

   Si on écrit $\lambda = \alpha + i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{\alpha t + i\beta t}(v_1 + iv_2) \\ &= e^{\alpha t}\left((\cos(\beta t)v_1 - \sin(\beta t)v_2) + i(\cos(\beta t)v_2 + \sin(\beta t)v_1)\right) \\ &= e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t)v_1 - \sin(\beta t)v_2\right) + ie^{\alpha t}\left(\cos(\beta t)v_2 + \sin(\beta t)v_1\right) \end{aligned}$$

Comme $z'(t) = Az(t)$ et A est réelle, la partie réelle et la partie imaginaire de z satisfont la même équation ; finalement, les fonctions

$$\begin{cases} z_1 : & t \mapsto e^{\alpha t} \left(\cos(\beta t)v_1 - \sin(\beta t)v_2\right) \\ z_2 : & t \mapsto e^{\alpha t} \left(\cos(\beta t)v_2 + \sin(\beta t)v_1\right) \end{cases}$$

sont deux solutions à valeurs réelles de $y'(t) = Ay(t)$.
De plus $z_1(0) = v_1$ et $z_2(0) = v_2$ forment une famille libre, donc (z_1, z_2) est un système fondamental de solutions de $y'(t) = Ay(t)$.
Finalement, toute solution s'écrit comme combinaison linéaire de z_1 et z_2.

On voit donc que, pour résoudre $y'(t) = Ay(t)$ avec A dans $M_2(\mathbb{R})$, il faut déterminer les valeurs propres de A, puis trouver les vecteurs propres associés, et appliquer la formule adaptée parmi celles qu'on vient d'établir (selon le cas dans lequel on se trouve).
Résumons les résultats que nous avons obtenus dans cet exemple :

Théorème 4.19
Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$, On considère l'équation linéaire homogène

$$y'(t) = Ay(t) \ , t \in \mathbb{R} \tag{E}$$

Les solutions s'expriment de la façon suivante, qui dépend des valeurs propres de A :

1. Si A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, et que (v_1, v_2) forment une base de vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme

$$t \mapsto K_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + K_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \ , K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

2. Si A n'est pas diagonalisable et admet une seule valeur propre réelle λ, alors il existe un vecteur propre v_1 et un vecteur v_2 tel que $(A - \lambda I)v_2 = v_1$.
Les solutions de (E) sont alors toutes les fonctions de la forme

$$t \mapsto K_1 e^{\lambda t} v_1 + K_2 (t e^{\lambda t} v_1 + e^{\lambda t} v_2) \ , \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

3. Si A a deux valeurs propres $\lambda, \overline{\lambda} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on écrit $\lambda = \alpha + i\beta$, on trouve v un vecteur propre pour la valeur propre λ et on note v_1, v_2 sa partie réelle et sa partie imaginaire.
Alors les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme

$$t \mapsto e^{\alpha t} \left[K_1(\cos(\beta t)v_1 - \sin(\beta t)v_2) + K_2(\cos(\beta t)v_2 + \sin(\beta t)v_1)\right] \ , \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

Dans un cadre plus général, le calcul pratique de e^{tA} est délicat. Si A est diagonalisable, disons

$$A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d) P^{-1}$$

alors c'est facile :

$$e^{tA} = P \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_d}) P^{-1}$$

et un calcul similaire à celui qu'on vient de faire dans le cas $d = 2$ nous montre que, si $v_1, \dots, v_d$ sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ alors la famille $(y_k)_{k=1,\dots,d}$ définie par

$$y_k \colon t \mapsto e^{\lambda_k t} v_k$$

forme un système fondamental de solutions de $y'(t) = Ay(t)$, $t \in \mathbb{R}$.
Dans le cas où A n'est pas diagonalisable, on essaie quand même de la mettre sous une forme dont l'exponentielle est facile à calculer ; il existe plusieurs façons de faire cela, l'une d'entre elles étant basée sur la *réduction de Jordan*. On ne développera pas cette approche ici, même si elle est très importante en pratique pour étudier les équations différentielles linéaires.

4.6 Lien avec les équations scalaires d'ordre d

Dans cette section, on fixe I un intervalle de $\mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}^*$ et $g, a_0, \dots, a_{d-1} \colon I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. On considère l'équation linéaire scalaire d'ordre d

$$x^{(d)}(t) + a_{d-1}(t)x^{(d-1)}(t) + \ldots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = g(t) \tag{E}$$

Pour $t \in I$ on introduit la matrice

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ -a_0(t) & \dots & \dots & \dots & -a_{d-1}(t) \end{pmatrix}$$

Alors $A \colon I \to M_d(\mathbb{R})$ est continue. Considérons aussi $b \colon I \to \mathbb{R}^d$ définie par

$$b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$$

Pour $x \colon J \to \mathbb{R}$ d fois dérivable, avec J un intervalle contenu dans I, on introduit

$$y \colon t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(d-1)}(t) \end{pmatrix}$$

C'est la méthode qu'on a déjà vue pour ramener une équation différentielle d'ordre d en dimension 1 à une équation différentielle d'ordre 1 en dimension d : x est solution de (E) sur J si, et seulement si, y vérifie $y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$.
Par conséquent, les résultats de structure obtenus au sujet des équations différentielles linéaires d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^d$ s'appliquent aux équations linéaires scalaires d'ordre d en dimension 1, et on obtient l'énoncé suivant.

Théorème 4.20

1. Les solutions maximales de (E) sont globales.
2. L'ensemble des solutions maximales de (E) forme un sous-espace affine de dimension d de $\mathcal{C}^d(I, \mathbb{R})$ (un sous-espace vectoriel dans le cas particulier où l'équation est homogène, c'est-à-dire où $g = 0$).
3. Pour tout $(x_0, \ldots, x_{d-1}) \in \mathbb{R}^d$ et tout $t_0 \in I$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x^{(d)}(t) + \ldots + a_{d-1}(t)x^{(d-1)}(t) + \ldots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = g(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ \vdots \\ x^{(d-1)}(t_0) = x_{d-1} \end{cases}$$

admet une unique solution maximale définie sur I tout entier.

Démonstration. Les deux premiers points ci-dessus découlent immédiatement du théorème sur la structure des solutions des équations différentielles linéaires, et de la discussion précédant l'énoncé du théorème 4.20.
Pour le dernier point, en reprenant les notations de la discussion précédant l'énoncé du théorème, il suffit de noter que x est solution de ce problème de Cauchy si, et seulement si, y est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) &= A(t)y(t) \\ y(t_0) &= \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{d-1} \end{pmatrix} \end{cases}$$

et d'appliquer le théorème de Cauchy–Lipschitz pour les équations linéaires d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^d$. $\square$

On va maintenant détailler le cas des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre d, à coefficient constants, c'est-à-dire les équations le la forme

$$x^{(d)}(t) = a_{d-1}x^{(d-1)}(t) + \ldots + a_0x(t) \ , x \in \mathbb{R} \tag{E}$$

Notons que le résultat ci-dessus nous permet d'affirmer que l'espace des solutions de (E) est un sous-espace vectoriel de dimension d de $C^d(I, \mathbb{R})$. Comme précédemment, on pose

$$y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(d-1)}(t) \end{pmatrix} \ , \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ a_0 & \ldots & \ldots & \ldots & a_{d-1} \end{pmatrix}$$

Alors l'équation (E) est équivalente à

$$y'(t) = Ay(t) \tag{H}$$

Notons que A est la *matrice compagnon* [(i)] du polynôme

$$P = X^d - \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$$

Le polynôme caractéristique

$$\chi_A(X) = \det(XI_d - A)$$

est égal à P. En particulier, les valeurs propres de A sont les racines de P.
On sait qu'on peut écrire $y(t) = e^{tA}y_0$, avec $y(0) = y_0$; en regardant la première ligne de ce produit, on voit que x est une combinaison linéaire (à coefficients complexes en général, si certaines valeurs propres sont complexes non réelles) de fonctions de la forme $t \mapsto e^{\lambda t}t^k$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. Les solutions s'obtiennent en calculant $\exp(At)$.

Exemple 4.21

Comme dans la section précédente, traitons en détail le cas $d = 2$; on considère une équation de la forme

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0 \ , t \in \mathbb{R} \tag{E}$$

où a, b, c sont des réels et $a \neq 0$. Pour se ramener au cadre des équations résolues, on commence par diviser par a et réécrire (E) sous la forme

$$x''(t) = -\frac{b}{a}x'(t) - \frac{c}{a}x(t)$$

On introduit alors la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix}$, de polynôme caractéristique égal à $X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a}$.
Pour déterminer les solutions de $y'(t) = Ay(t)$ on doit trouver les valeurs propres de A, c'est-à-dire les racines de P, ou encore les solutions de l'*équation caractéristique*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Trois cas se présentent selon la valeur du discriminant associé.
Ci-dessous, on utilise le fait que les solutions forment un espace vectoriel F de dimension 2 : dès qu'on trouve deux fonctions telles que l'espace G engendré par ces fonctions contient toutes les solutions, on doit avoir $F = G$ (si un espace de dimension 2 est contenu dans un espace de dimension au plus 2, alors les deux espaces en question sont égaux).

1. L'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes λ_1, λ_2.
   Si v_1, v_2 sont les vecteurs propres associés, les solutions de $y'(t) = Ay(t)$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \alpha_1 e^{\lambda_1 t}v_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}v_2$ avec $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
   En regardant la première coordonnée de y, on en déduit que x est une combinaison linéaire de $t \mapsto e^{\lambda_1 t}$ et $t \mapsto e^{\lambda_2 t}$, qui forment donc une base de l'espace des solutions.
2. L'équation caractéristique a une racine réelle double λ.
   Dans ce cas, on a vu que y était une combinaison linéaire de $t \mapsto e^{\lambda t}v_1$ et $t \mapsto (te^{\lambda t}v_1 + e^{\lambda t}v_2)$, où v_1, v_2 sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

(i). Une autre convention, peut-être plus fréquente, est d'appeler matrice compagnon de P la transposée de A.

En regardant la première coordonnée de y, on en déduit que toute solution de (E) est une combinaison linéaire de $t \mapsto e^{\lambda t}$ et $t \mapsto te^{\lambda t}$. Ces deux fonctions forment donc une base de l'espace des solutions de (E).

3. L'équation caractéristique a deux solutions $\lambda, \overline{\lambda} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
   En écrivant $\lambda = \alpha + i\beta$, on a vu qu'il existe deux vecteurs v_1, v_2 de $\mathbb{R}^2$ tels que y s'écrit comme une combinaison linéaire de
   $$t \mapsto e^{\alpha t}(\cos(\beta t)v_1 - \sin(\beta t)v_2) \ , \quad t \mapsto e^{\alpha t}(cos(\beta t)v_2 + \sin(\beta t)v_1)$$
   À nouveau en regardant la première coordonnée de y, on en déduit que toute solution de (E) est une combinaison linéaire de $t \mapsto e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ et $t \mapsto e^{\alpha t}\sin(\beta t)$. Ces deux fonctions forment donc une base de l'espace des solutions.

4.7 Comportement asymptotique des solutions d'équations différentielles linéaires à coefficients constants

Il est fréquent qu'on ne puisse pas calculer les solutions d'équations différentielles ; il est alors important de pouvoir étudier leur comportement asymptotique. Il est très utile pour cela de bien comprendre le cas des équations linéaires homogènes.
C'est pour cela que, dans cette section, on s'intéresse au comportement asymptotique des solutions de l'équation $y'(t) = Ay(t)$, où $A \in M_d(\mathbb{R})$ quand $t \to +\infty$. Autrement dit, on cherche à analyser ce qui arrive à $e^{tA}y_0$ quand $t \to +\infty$, pour $y_0 \in \mathbb{R}^d$ fixé.
Quand on a fait le calcul de e^{tA}, on a vu apparaître des termes de type $t^i e^{\lambda t}$, où λ est une valeur propre de A ; ce sont ces valeurs propres qui vont jouer un rôle crucial dans notre analyse.
Rappelons pour commencer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et $t \in \mathbb{R}$ on a $\left|e^{\lambda t}\right| = e^{\mathrm{Ré}(\lambda)t}$.
Fixons une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{C}^d$. S'il existe une valeur propre λ de partie réelle strictement positive, soit v_k un vecteur propre associé (peut-être à coefficients complexes).
Alors $z\colon t \mapsto e^{\lambda_k t}v_k$ satisfait $z'(t) = Az(t)$, et
$$\|z(t)\| = e^{\mathrm{Ré}(\lambda_k)t}\|v_k\| \to +\infty$$
Considérons $z_1 = \mathrm{Ré}(z)$, $z_2 = \mathrm{Im}(y)$: ce sont deux solutions de $y'(t) = Ay(t)$, et $z_1 + iz_2 = z$ est non bornée. Donc z_1 ou z_2 est non bornée quand $t \to +\infty$.
Par conséquent, dès qu'il existe une valeur propre de partie réelle > 0, il existe des solutions non bornées quand $t \to +\infty$.

Le cas où toutes les valeurs propres sont de partie réelle ≤ 0 nécessite plus de travail.
Pour nous y préparer, commençons par regarder ce qui arrive quand A est diagonalisable (dans $\mathbb{C}$) ; soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ les valeurs propres de A, et $v_1, \ldots, v_d$ une base de vecteurs propres associés.
Alors pour toute solution y de $y'(t) = Ay(t)$ il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{C}$ tels que
$$y = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i e^{\lambda_i t} v_i$$
Par conséquent, pour tout $t \geq 0$ on a
$$\|y(t)\| \leq \sum_{i=1}^{d} |\alpha_i| e^{\mathrm{Ré}(\lambda_i)t}\|v_i\| \leq \sum_{i=1}^{d} |\alpha_i|\|v_i\|$$

(Rappelons qu'on suppose $\mathrm{Ré}(\lambda_i) \leq 0$ pour tout i)
On voit ainsi que, si A est diagonalisable et a toutes ses valeurs propres réelles de partie réelle ≤ 0, alors toutes les solutions de $y'(t) = A(t)$ sont bornées quand $t \to +\infty$. On peut obtenir mieux si les valeurs propres sont de parties réelles < 0 : dans ce cas, posons

$$\delta = \min\{-\mathrm{Ré}(\lambda_k) \colon k \in \{1, \ldots, d\}\}$$

Alors $\delta > 0$, et l'inégalité obtenue ci-dessus nous montre que pour toute solution y de $y'(t) = Ay(t)$ il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq \sum_{i=1}^{d} |\alpha_i| e^{\mathrm{Ré}(\lambda_i)t} \|v_i\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{d} |\alpha_i| \|v_i\| e^{-\delta t} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{d} |\alpha_i| \|v_i\| \right) e^{-\delta t} \end{aligned}$$

Donc $y(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$ dans ce cas-là.
Le cas d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ nous montre que les solutions de $y'(t) = Ay(t)$ ne tendent pas forcément vers 0 quand une valeur propre est de partie réelle nulle.

Avant de passer au cas général (hélas, toutes les matrices ne sont pas diagonalisables !), récapitulons : quand une valeur propre est de partie réelle > 0, il y a des solutions non bornées (obtenues par exemple en prenant comme condition initiale un vecteur propre pour cette valeur propre) ; quand toutes les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative, les solutions tendent vers 0 quand $t \to +\infty$; et le cas où une valeur propre est de partie réelle nulle semble plus subtil.
Passons maintenant au cas général ; soit $A \in M_d(\mathbb{R})$ et χ_A son polynôme caractéristique. Il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ et $m_1, \ldots, m_k$ tels que

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

Notons

$$E_i = \ker\left((A - \lambda_i I)^{m_i}\right)$$

l'*espace caractéristique* associé à la valeur propre λ_i. Puisque $\chi_A(A) = 0$, le lemme des noyaux nous permet d'écrire

$$\mathbb{R}^d = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i$$

Pour $x \in E_i$ et $t \in \mathbb{R}$ on a $t^l (A - \lambda_i I)^l x = 0$ pour tout $l \geq m_i$, d'où l'égalité

$$\begin{aligned} e^{t(A - \lambda_i I)} x &= \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{t^l (A - \lambda_i I)^l x}{l!} \\ &= \sum_{l=0}^{m_i - 1} \frac{t^l (A - \lambda_i I)^l x}{l!} \end{aligned}$$

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}^d$ quelconque ; on peut écrire de manière unique

$$x = \sum_{i=1}^{k} x_i \ , \quad x_i \in E_i$$

et on a alors pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e^{tA}x &= \sum_{i=1}^{k} e^{tA} x_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} e^{t\lambda_i I + t(A-\lambda_i I)} x_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} e^{t\lambda_i} e^{t(A-\lambda_i I)} x_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} e^{t\lambda_i} \left(\sum_{l=0}^{m_i-1} \frac{t^l (A-\lambda_i I)^l x_i}{l!} \right) \end{aligned}$$

On en déduit la majoration suivante, valable pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \|e^{tA}x\| &\leq \sum_{i=1}^{k} \left| e^{t\lambda_i} \right| \left(\sum_{l=0}^{m_i-1} \left\| \frac{t^l (A-\lambda_i I)^l x_i}{l!} \right\| \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} \left| e^{t\lambda_i} \right| \left(\sum_{l=0}^{m_i-1} \frac{|||t^l (A-\lambda_i I)^l||| \|x_i\|}{l!} \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} e^{t \operatorname{Ré}(\lambda_i)} \left(\sum_{l=0}^{m_i-1} \frac{|t|^l |||A-\lambda_i I|||^l}{l!} \right) \|x_i\| \end{aligned}$$

En utilisant le fait que, pour tout polynôme P de degré r en t il existe C tel que $|P(t)| \leq C(1+|t|)^r$ pour tout t, la majoration ci-dessus donne finalement des constantes C_i telles que

$$\|e^{tA}x\| \leq \sum_{i=1}^{k} e^{t \operatorname{Ré}(\lambda_i)} C_i (1+|t|)^{m_i-1} \|x_i\|$$

En notant $C = \max(C_i)$, et en utilisant le fait que $m_i \leq d$ pour tout i, on obtient

$$\|e^{tA}x\| \leq C \left(\sum_{i=1}^{k} e^{t \operatorname{Ré}(\lambda_i)} \right) (1+|t|)^{d-1}$$

Ceci nous permet de traiter le cas où toutes les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative : en effet, si on pose comme précédemment

$$\delta = \min\{-\operatorname{Ré}(\lambda_i) \colon 1 \leq i \leq k\} > 0$$

on a l'inégalité suivante, valable pour tout x et tout $t \geq 0$:

$$\|e^{tA}x\| \leq C \left(\sum_{i=1}^{k} e^{-t\delta} \|x_i\| \right) (1+|t|)^{d-1}$$

On va encore simplifier un peu cette inégalité. Comme $x \mapsto \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^d$, et toutes les normes sur $\mathbb{R}^d$ sont équivalentes, il existe une constante K telle que, pour tout x on ait

$$\sum_{i=1}^{k} \|x_i\| \leq K\|x\|$$

De plus, si on fixe α tel que $0 < \alpha < \delta$, alors il existe K' tel que

$$\forall t \geq 0 \; e^{-t\delta}(1+|t|)^{d-1} \leq K'e^{-t\alpha}$$

Cela nous permet de conclure que, sous nos hypothèses, il existe une constante D telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $t \geq 0$ on ait

$$\|e^{tA}x\| \leq De^{-\alpha t}\|x\| \tag{I}$$

Donc $e^{tA}x$ tend (très rapidement !) vers 0 quand t tend vers $+\infty$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Pour finir notre analyse, il nous reste à traiter le cas où toutes les valeurs propres sont de partie réelle négative, mais il en existe qui ont une partie réelle nulle.
Soit λ_i une valeur propre imaginaire pure, et x un élément de E_i. Alors on a déjà vu l'égalité

$$e^{tA}x = e^{t\lambda_i} \sum_{l=0}^{m_i-1} \frac{t^l(A-\lambda_i I)^l x}{l!}$$

On voit apparaître deux sous-cas :

- $m_i = 1$.
  Alors $e^{tA}x = e^{t\lambda_i}x$, qui est de norme constante. Donc $e^{tA}x$ est bornée quand $t \to +\infty$.
- $m_i > 1$.
  Alors une puissance strictement positive de t apparaît dans la formule déterminant $e^{tA}x$, ce qui permet de voir que $\|e^{tAx}\| \to +\infty$ quand $t \to +\infty$

On voit ainsi que, si $m_i > 1$, alors il existe des solutions non bornées quand $t \to +\infty$.
Par contre (toujours dans le cas où chaque valeur propre est de partie réelle négative), si pour chaque i tel que λ_i soit de partie réelle nulle on a $m_i = 1$, alors en écrivant $x = \sum_{i=1}^{k} x_i$ et en raisonnant comme ci-dessus on établit que toutes les solutions sont bornées quand $t \to +\infty$.
Avant d'énoncer un théorème résumant ce que nous avons obtenu, introduisons un peu de vocabulaire.

Définition 4.22

Soit $A \in M_d(\mathbb{C})$, et λ une valeur propre de A. On dit que λ est *semi-simple* si l'espace propre associé à la valeur propre λ est égal à l'espace caractéristique associé à λ.
De manière équivalente : une valeur propre λ est semi-simple si

$$\ker(A - \lambda I) = \ker(A - \lambda I)^2$$

Ou encore : λ est semi-simple si c'est une racine de multiplicité 1 du polynôme minimal de A.

☆ Théorème 4.23

Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$. On considère l'équation différentielle linéaire homogène

$$y'(t) = Ay(t)\ , t \in \mathbb{R} \tag{E}$$

1. Si A admet une valeur propre de partie réelle > 0, alors il existe des solutions de (E) non bornées quand $t \to +\infty$.
2. Si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle < 0, alors toutes les solutions de (E) tendent vers 0 quand $t \to +\infty$.
3. Si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle ≤ 0, et certaines sont de partie réelle nulle, deux sous-cas sont à considérer :
   a) Si toutes les valeurs propres de A de partie réelle nulle sont semi-simples, alors toutes les solutions de (E) sont bornées quand $t \to +\infty$ (et certaines ne tendent pas vers 0 en $+\infty$).
   b) S'il existe une valeur propre de partie réelle nulle qui n'est pas semi-simple, alors (E) a des solutions non bornées quand $t \to +\infty$.

Chapitre 5

Étude qualitative des équations différentielles autonomes

Dans ce chapitre, on se place dans le cadre suivant : $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et on considère l'équation

$$y'(t) = f(y(t)) \ , \ t \in \mathbb{R} \tag{E}$$

On fixe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^d$.

5.1 Stabilité des équilibres

Définition 5.1

Soit $y^* \in \mathbb{R}^d$. On dit que y^* est un *équilibre* de (E) si $f(y^*) = 0$.
Autrement dit, y^* est un équilibre si la fonction constante $t \mapsto y^*$ est solution de (E) ; on dit que c'est une *solution stationnaire*.

Exemple 5.2

Soit $r > 0$. Cherchons les équilibres de l'équation

$$y'(t) = ry(t)(1 - y(t)) \ , t \in \mathbb{R}$$

Cela revient à chercher les points où $f\colon x \mapsto rx(1-x)$ s'annule : les équilibres sont 0 et 1.

Exemple 5.3

Voyons un exemple en dimension 2. Considérons le champ de vecteurs $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$f(x, y) = (x, -2x - \sin(y))$$

Les équilibres de l'équation différentielle autonome associée à ce champ de vecteurs sont tous les points (x,y) tels que

$$x = 0 = -2x - \sin(y)$$

Par conséquent, ces équilibres sont tous les points $\{(0,k\pi)\colon k\in\mathbb{Z}\}$.

Définition 5.4

Soit y^* un équilibre de (E).

(i) On dit que y^* est un équilibre *stable* si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^d$ satisfaisant $\|y^* - y_0\| \leq \eta$, la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) \ = y_0 \end{cases}$$

est définie sur un intervalle contenant $[0,+\infty[$ et vérifie :

$$\forall t \geq 0 \quad \|y(t) - y^*\| \leq \varepsilon$$

(ii) On dit que y^* est un équilibre *asymptotiquement stable* si y^* est stable, et de plus il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^d$ satisfaisant $\|y^* - y_0\| \leq \delta$, la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) \ = y_0 \end{cases}$$

vérifie $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = y^*$

(iii) Si y^* n'est pas stable on dit qu'il est *instable*.

En employant ce langage, les résultats du théorème 4.23 nous donnent le résultat suivant (notons que le résultat de 4.23 est plus précis que ce qu'on énonce ci-dessous).

Théorème 5.5

Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$. On considère l'équation $y'(t) = Ay(t)\ , t\in\mathbb{R}$.

(i) 0 est un équilibre asymptotiquement stable si, et seulement si, toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative.

(ii) 0 est stable si, et seulement si, toutes les valeurs propres sont de partie réelle négative, et les valeurs propres de partie réelle nulle sont semi-simples.

On va s'intéresser au cas non linéaire. L'idée est de *linéariser* le problème au voisinage d'un équilibre y^*. Comme f est supposée de classe $\mathcal{C}^1$, on a en effet l'identité (qui utilise seulement la différentiabilité de f en y^*) :

$$\begin{aligned} f(y) &= f(y^*) + Df(y^*)(y-y^*) + \underset{y\to y^*}{o}(\|y-y^*\|) \\ &= Df(y^*)(y-y^*) + \underset{y\to y^*}{o}(\|y-y^*\|) \end{aligned}$$

L'idée est alors de se dire que, au voisinage de y^*, (E) est proche de l'équation linéarisée

$$y'(t) = Df(y^*)(y(t) - y^*) \ , t \in \mathbb{R} \tag{E$_L$}$$

Posons $u = y - y^*$ et notons $A = Jf(y^*)$ la matrice jacobienne $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(y^*)\right)_{1 \le i,j \le d}$.
Alors (E$_L$) se réécrit

$$u'(t) = Au(t) \ , t \in \mathbb{R}$$

Il n'est pas toujours possible d'utiliser les propriétés de l'équation linéarisée pour analyser la stabilité de l'équilibre y^*, mais on peut le faire sous certaines hypothèses, comme énoncé dans le théorème suivant.

☆ Théorème 5.6 (Théorème de Lyapounov)
Soit y^* un équilibre de (E) ; on note A la matrice jacobienne de f en y^* (on rappelle que f est supposée être de classe $\mathcal{C}^1$).

(i) Si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle < 0, alors y^* est un équilibre asymptotiquement stable de (E).

(ii) (admis) Si A a une valeur propre de partie réelle > 0, alors y^* est un équilibre instable de (E).

(iii) Dans les cas restants, on n'a pas suffisamment d'informations pour conclure sur la stabilité de y^* et une analyse plus fine est requise.

Démonstration. On ne va montrer que le premier point. Commençons par nous rappeler l'inégalité (I) du chapitre précédent, qui nous assure (en supposant que toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle < 0) qu'il existe $\alpha > 0$ et une constante $C > 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $t \in \mathbb{R}$ on ait

$$\|e^{At}x\| \le Ce^{-\alpha t}x$$

Soit y une solution définie sur I. Pour simplifier un peu les notations, introduisons $u \colon I \to \mathbb{R}^d$ définie par $u(t) = y(t) - y^*$, et posons

$$g(v) = f(y^* + v) - Av$$

Dire que f est différentiable en y^* revient à dire que $\dfrac{\|g(v)\|}{\|v\|}$ tend vers 0 quand v tend vers 0 ; de plus g est continue parce que f et A le sont.
On a, pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned}
u'(t) &= y'(t) \\
&= f(y(t)) \\
&= f(y^* + u(t)) \\
&= Df(y^*)(u(t)) + f(y^* + u(t)) - Df(y^*)(u(t)) \\
&= Au(t) + g(u(t))
\end{aligned}$$

On considère le terme $g(u(t))$ comme le second membre d'une équation linéaire, et la formule de Duhamel (alliée au fait qu'on sait résoudre l'équation linéaire homogène $z'(t) = Az(t)$) nous donne l'égalité

$$u(t) = e^{tA}u(0) + \int_0^s e^{(t-s)A}g(u(s))ds$$

On a donc aussi la majoration

$$\|u(t)\| \leq Ce^{-\alpha t}\|u_0\| + \int_0^s Ce^{-\alpha(t-s)}\|g(u(s))\|ds \tag{D}$$

On est en situation pour appliquer le lemme de Gronwall pour contrôler la croissance de $\|u(t)\|$.
Fixons maintenant $\varepsilon > 0$; pour des raisons techniques qui vont être apparentes sous peu, on peut supposer que

$$\varepsilon C - \alpha = \beta < 0$$

(on peut rendre β arbitrairement proche de $-\alpha$ en choisissant ε suffisamment petit).
Puisque $\|g(v)\|$ est négligeable devant $\|v\|$ quand v tend vers 0, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|v\| \leq \delta \Rightarrow \|g(v)\| \leq \varepsilon\|v\|$$

Quitte à réduire δ, on peut supposer que $\delta \leq \varepsilon$. Supposons maintenant que

$$\|u(0)\| \leq \min(\delta, \frac{\delta}{C})$$

et considérons l'ensemble

$$J = \{T \geq 0 \colon \forall t \in [0, T]\ \|u(t)\| \leq \delta\}$$

J est non vide ($0 \in J$) et contenu dans $[0, +\infty[\cap I$, qui est un intervalle.

☆ Lemme 5.7

J est ouvert et fermé dans $[0, +\infty[\cap I$. Par conséquent, $J = [0, +\infty[\cap I$.

Une fois ce lemme démontré, on a établi la stabilité de y^* : en effet, il implique que y est bornée sur $I \cap [0, +\infty[$, et le théorème d'explosion en temps fini entraîne alors que $[0, +\infty[\subset I$.
Par suite $J = [0, +\infty[$ donc $\|u(t)\| \leq \delta \leq \varepsilon$ pour tout $t \geq 0$.
Reste à démontrer le lemme, qui nous permettra aussi de conclure que y^* est asymptotiquement stable.

Montrons d'abord que J est fermé. Soit (T_n) une suite d'éléments de J qui converge vers T. Alors $\|u(T_n)\| \leq \delta$ pour tout n, donc par continuité de u on a

$$\|u(T)\| = \lim_{n \to +\infty} \|u(T_n)\| \leq \delta$$

Par ailleurs, si $t < T$, an a $T_n \geq t$ pour tout n suffisamment grand, donc $\|u(t)\| \leq \delta$. On a fini de montrer que $T \in J$ et donc J est fermé.

Passons à la preuve du fait que J est ouvert.
Soit $T \in J$; tout $t \in [0, T]$ appartient aussi à J, et il nous suffit donc de montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $T + r \in J$.

Pour cela, appliquons la forme intégrale du lemme de Gronwall à l'équation (D). Puisque $\|u(t)\| \leq \delta$ pour tout $t \leq T$ on a $\|g(u(t))\| \leq \varepsilon\|u(t)\|$ pour tout $t \leq T$, et on a pour tout $t \leq T$

$$\|u(t)\| \leq Ce^{-\alpha t}\|u_0\| + C\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\varepsilon\|u(s)\|ds \quad \text{(par (D))}$$

Donc on a aussi

$$e^{\alpha t}\|u(t)\| \leq C\|u_0\| + \int_0^t C\varepsilon e^{\alpha s}\|u(s)\|ds$$

En appliquant Gronwall (forme intégrale, avec b constante et $a = C\varepsilon$) à $t \mapsto e^{\alpha t}\|u(t)\|$ on obtient pour tout $t \leq T$

$$e^{\alpha t}\|u(t)\| \leq C\|u_0\|e^{C\varepsilon t}$$

On a donc

$$\|u(t)\| \leq C\|u_0\|e^{(C\varepsilon-\alpha)t} \leq \delta e^{-\beta t}$$

Donc $\|u(T)\| < \delta$, et par continuité de u cela nous donne $r > 0$ tel que $\|u(t)\| \leq \delta$ pour tout $t \in [T, T + r[$, ce qui conclut la preuve du lemme.
Au cours de la preuve du lemme, nous avons également établi que pour tout $t \in [0, +\infty[$ on a l'inégalité

$$\|u(t)\| \leq \delta e^{-\beta t}$$

ce qui entraîne que $u(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ et donc que y^* est un équilibre asymptotiquement stable. □

Attention!
Il faut bien noter que le théorème de Lyapounov nous permet (dans les cas favorables) de prédire le comportement asymptotique de $y(t)$ seulement *pour des conditions initiales proches de l'équilibre* y^* : on ne sait rien sur les solutions avec une condition initiale loin de l'équilibre. Une condition *locale* (la différentielle en y^*) ne peut pas suffire, hors hypothèses supplémentaires, pour établir une conclusion *globale* (le comportement asymptotique de toutes les solutions).

Exemple 5.8
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x(x^2 + y^2), y(x^2 + y^2))$$

Le seul équilibre de l'équation $X'(t) = f(X(t))$ est $(0, 0)$. La jacobienne de f en (x, y) est égale à

$$\begin{pmatrix} 3x^2 + y^2 & 2xy \\ 2xy & 3y^2 + x^2 \end{pmatrix}$$

En $(0, 0)$ on obtient la matrice nulle, et le théorème de Lyapounov ne s'applique pas. Cela ne signifie pas pour autant qu'on ne peut pas déterminer si l'équilibre est stable ; mais il faut raisonner autrement.
La forme de l'équation se prête bien à une étude en coordonnées polaires : soit

$$t \mapsto X(t) = (x(t), y(t))$$

une solution définie sur un intervalle I contenant 0 ; posons

$$r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

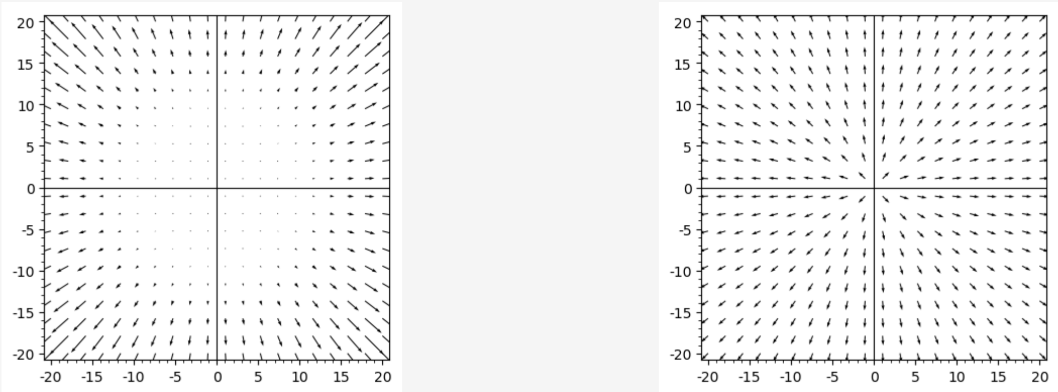
Alors on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(r^2(t)\right) &= 2x'(t)x(t) + 2y'(t)y(t) \\ &= 2x^2(t)(x^2(t) + y^2(t)) + 2y^2(t)(x^2(t) + y^2(t)) \\ &= 2r^4(t) \end{aligned}$$

On voit que r^2 est solution de l'équation différentielle $y'(t) = 2y^2(t)$, équation autonome scalaire qu'on sait résoudre. On obtient la formule

$$r^2(t) = \frac{r^2(0)}{1 - 2tr^2(0)}$$

On voit ainsi que toutes les solutions non stationnaires explosent en temps fini : $(0,0)$ est instable. Voici l'allure du champ de vecteurs ; on voit bien que $(0,0)$ est instable, en suivant les flèches les trajectoires partent loin de $(0,0)$.



À gauche, le champ de vecteurs f ; à droite, le champ de vecteurs normalisé $\dfrac{f}{\|f\|_2}$

Si on remplace f par $-f$ dans l'équation différentielle, on obtient bien sûr le même point d'équilibre $(0,0)$, où la matrice jacobienne est nulle et un calcul similaire à celui ci-dessus amène cette fois à l'équation

$$r^2(t) = \frac{r^2(0)}{1 + 2tr^2(0)} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ceci montre que, cette fois, $(0,0)$ est asymptotiquement stable.

Remarque 5.9

Remplacer le champ de vecteurs f par $-f$, comme ci-dessus, revient à inverser le sens du temps (on parcourt les mêmes trajectoires, en sens inverse), ce qui explique pourquoi la formule du deuxième cas ci-dessus est obtenue à partir de la première en remplaçant t par $-t$.

Pour étudier les trajectoires, il peut être très utile d'arriver à déterminer des *intégrales premières*, c'est-à-dire des quantités conservées le long des trajectoires.

Exemple 5.10

Considérons $x\colon I \to \mathbb{R}$ solution de $mx''(t) = F(x(t))$ où F dérive d'un potentiel V de classe C^2, c'est-à-dire $F = -V'$ (on reconnaîtra la loi de Newton...) et m est une constante strictement positive.
En considérant l'équation différentielle

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) \\ v'(t) = \dfrac{F(x(t))}{m} \end{cases}$$

on se ramène au cadre des équations d'ordre 1.
Notons $E\colon (x, v) \mapsto \dfrac{1}{2}mv^2 + V(x)$ l'énergie totale du système. Si $t \mapsto (x(t), y(t))$ est une solution définie sur un intervalle I, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(x(t), v(t)) &= x'(t)\frac{\partial E}{\partial x}(x(t), v(t)) + v'(t)\frac{\partial E}{\partial v}(x(t), v(t)) \\ &= x'(t)V'(x(t)) + mv(t)v'(t) \\ &= -v(t)F(x(t)) + v(t)F(x(t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, l'énergie est conservée le long d'une trajectoire ; l'analyse des courbes de niveau de E peut alors permettre de déterminer la stabilité des équilibres et de mieux comprendre le comportement des solutions de l'équation différentielle (on refera ces calculs en étudiant l'équation d'un pendule simple dans la section suivante).

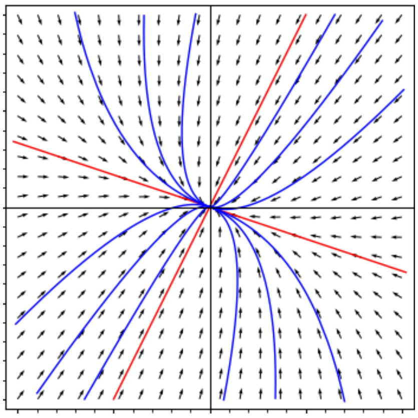
5.2 Portraits de phase

On considère l'équation $y'(t) = f(y(t))$, où $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (on se limite dans ces notes au cas de la dimension 2).
Un *portrait de phase* est une représentation graphique de quelques trajectoires représentatives, permettant de se faire une idée qualitative du comportement des solutions de l'équation différentielle autonome considérée.
Il n'y a pas de méthode générale pour tracer un portrait de phase. Une première idée est de chercher les points où on connaît le sens du champ de vecteurs, par exemple les points où il est vertical (la première coordonnée de f est nulle) ou horizontal (deuxième coordonnée de f nulle). Les trajectoires doivent être tangentes en tout point au champ de vecteurs.
Un cas très favorable est celui où on arrive à déterminer une intégrale première, c'est-à-dire une fonction H telle que pour toute solution y la fonction $H(y(t))$ soit constante : alors les trajectoires sont incluses dans *les lignes de niveau* de H, c'est-à-dire les parties de la forme $\{H(y) = c\}$, où c est une constante. Comprendre ces lignes de niveau peut aider à déterminer si un équilibre donné est stable.

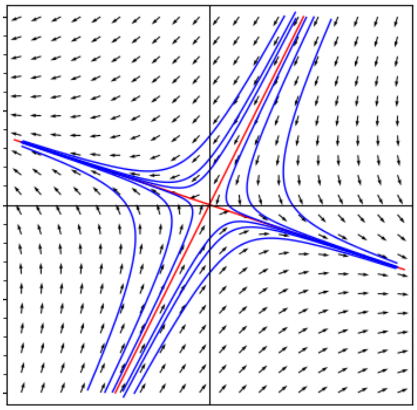
Notre étude des équations différentielles linéaires nous permet de dresser leurs portraits de phase ; considérons une matrice non nulle $A \in M_2(\mathbb{R})$ et l'équation différentielle $y'(t) = Ay(t)$. Divers comportements se produisent, selon les valeurs propres de A (et la dimension des espaces caractéristiques associés).

1. Si A a deux valeurs propres réelles distinctes, alors on est dans un des cas suivants (sur les dessins ci-dessous, les droites en rouge correspondent aux deux espaces propres de A).

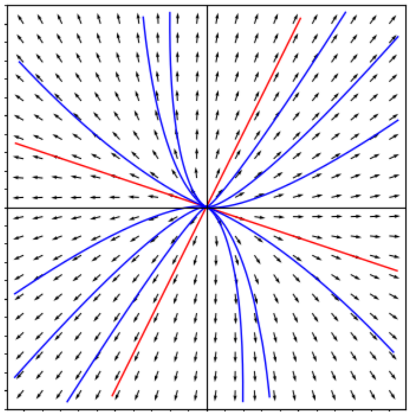
• Les deux valeurs propres sont non nulles ; c'est un *noeud répulsif* si elles sont strictement positives, un *noeud attractif* si elles sont strictement négatives, et un *point selle* si elles sont de signes opposés.



Noeud attractif

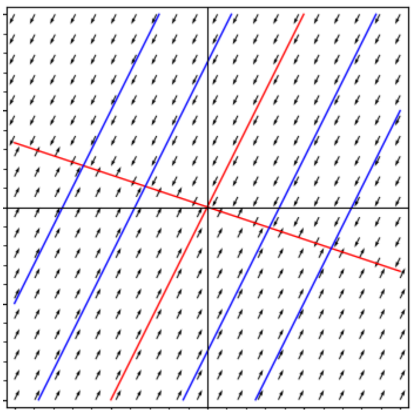


Point selle

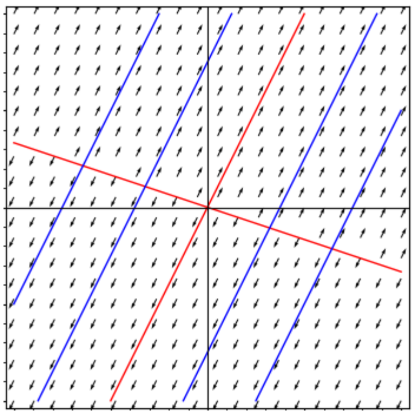


Noeud répulsif

• Une des valeurs propres est nulle.



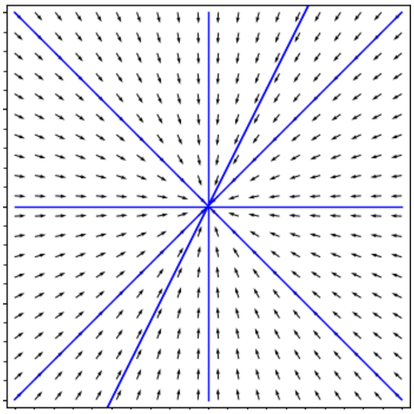
Une valeur propre nulle, une < 0



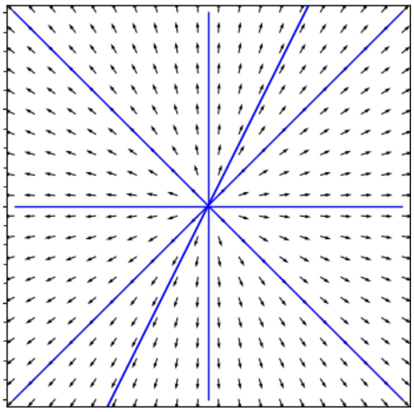
Une valeur propre nulle, une > 0

2. Si A a une valeur propre réelle double, deux sous-cas se produisent.

• $A = \lambda I_2$, avec λ différent de 0.

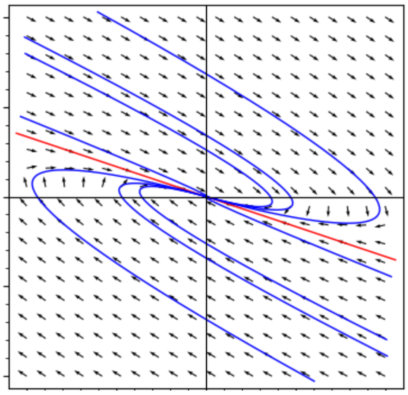


$A = \lambda I_2,\ \lambda < 0$

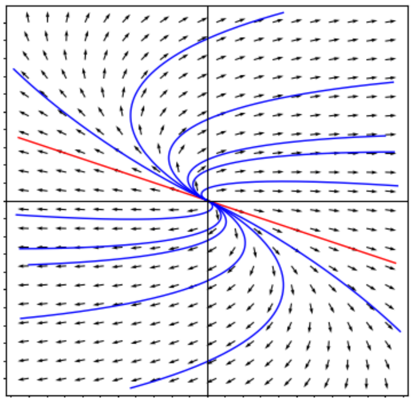


$A = \lambda I_2,\ \lambda > 0$

• A est non diagonalisable ; on a alors affaire à un *noeud exceptionnel répulsif* si la valeur propre est strictement positive, un *noeud exceptionnel attractif* si elle est strictement négative. De nouveau, la droite rouge représente l'espace propre de A.

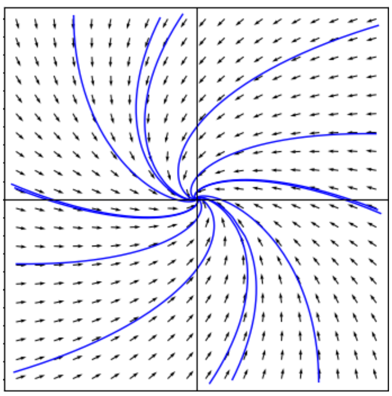


Noeud exceptionnel attractif

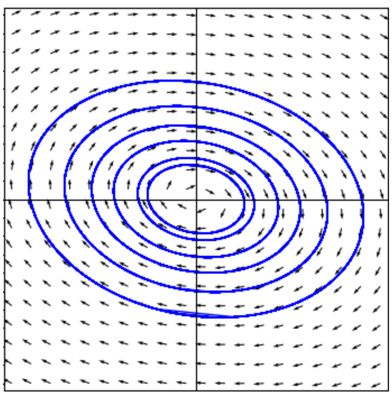


Noeud exceptionnel répulsif

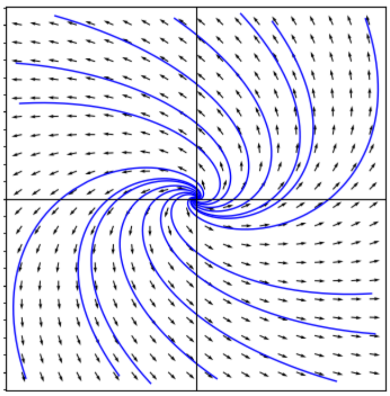
3. Le dernier cas est celui où A admet deux valeurs propres complexes non réelles, nécessairement conjuguées, de la forme $a \pm ib$. Trois sous-cas se produisent : si $a < 0$ c'est un *foyer attractif*, si $a = 0$ c'est un *centre* (et toutes les orbites sont périodiques), et enfin si $a > 0$ c'est un *foyer répulsif*.



Foyer attractif



Centre



Foyer répulsif

Exemple 5.11

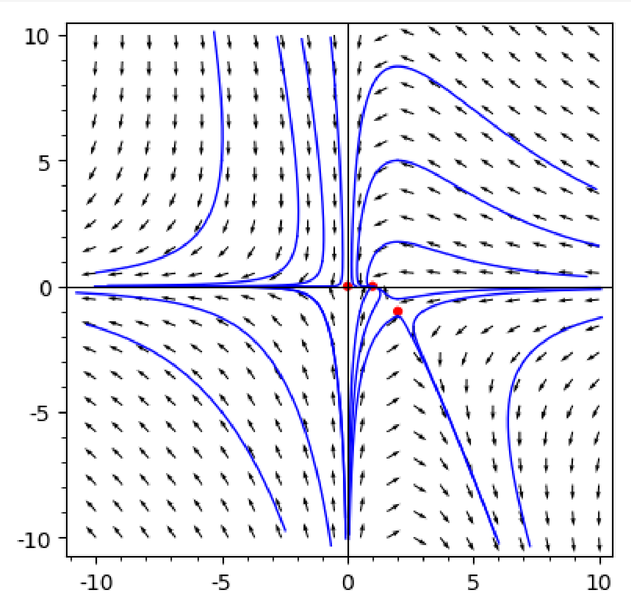
Considérons l'équation

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(1 - y(t) - x(t)) \\ y'(t) = y(t)(2x(t) - 4) \end{cases}$$

Ici le champ de vecteurs est $f\colon (x, y) \mapsto (x(1 - y - x), y(2x - 4))$.
Une résolution de système nous donne trois équilibres :$(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(2, -1)$.
La matrice jacobienne de f en (x, y) vaut $Jf(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - y - 2x & -x \\ 2y & 2x - 4 \end{pmatrix}$.
En $(0, 0)$ on obtient $Jf(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. Ll'équilibre est instable.
On a aussi $Jf(1, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, le point d'équilibre $(1, 0)$ est donc attractif.
Enfin, $Jf(2, -1) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Pour chercher les valeurs propres, on calcule le polynôme caractéristique (ou, ce qui revient au même en dimension 2, le déterminant et la trace) qui vaut

$$X^2 + 2X - 4 = (X + 1)^2 - 5 = (X + 1 - \sqrt{5})(X + 1 + \sqrt{5})$$

On a à nouveau deux valeurs propres réelles, de signes opposés, c'est de nouveau un point selle.
Pour tracer un portrait de phase, on place des flèches correspondant aux endroits où on comprend bien la direction du champ de vecteurs (par exemple, ici, le champ de vecteurs est vertical quand $x = 0$ ou $y = 1 - x$, et horizontal quand $y = 0$ ou $x = 2$).
On arrive à un dessin comme celui ci-dessous, où on voit que $(1, 0)$ attire beaucoup de trajectoires, alors que les deux autres points critiques ne sont pas attractifs. Les points rouges représentent les trois équilibres.



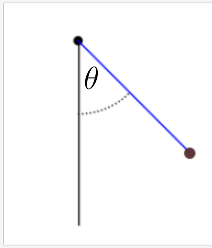
Une ébauche de portrait de phase.

Exemple 5.12

Reprenons l'équation du pendule sans amortissement

$$\theta''(t) + \sin(\theta(t)) = 0 \ , \ t \in \mathbb{R}$$

L'angle θ mesure la déviation du pendule par rapport à la verticale, comme sur le dessin ci-dessous.



L'équation différentielle provient de la loi de Newton, où on considère que la seule force appliquée au pendule est la gravité.
Avec $v = \theta'$, $y = (\theta, v)$ ceci nous amène à l'équation

$$\begin{cases} \theta' = v \\ v' = -\sin(\theta) \end{cases}$$

Le champ de vecteurs est ici $f(\theta, v) = (v, -\sin(\theta))$. Il est globalement lipschitzien : les solutions maximales sont globales.
Les équilibres correspondent à $v = 0$, $\theta = 0[\pi]$ (le pendule est à la verticale, sans vitesse initiale : il ne bouge pas). Pour déterminer leur stabilité, on écrit la jacobienne

$$Jf(\theta, v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

Quand $\theta = 0[2\pi]$ et $v = 0$, $Jf(\theta, v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; c'est une matrice de rotation qui a deux valeurs propres i et $-i$. Avec nos résultats, on n'est donc pas à même de conclure sur la stabilité de cet équilibre.
On va justifier un peu plus bas que cet équilibre est stable (le pendule pointe vers le bas, si on le pousse un peu il va faire de petites oscillations en restant proche de son point d'équilibre).
Quand $\theta = \pi[2\pi]$ et $v = 0$, $Jf(\theta, v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; c'est une matrice de symétrie qui a deux valeurs propres 1 et -1, et l'équilibre est instable (le pendule est vers le haut, une petite impulsion ou un petit déplacement suffisent à le faire partir très loin de son équilibre).
Comme f est globalement lipschitzienne, les solutions maximales sont globales.
Pour tracer le portrait de phase, on peut chercher une intégrale première ; comme on modélise un phénomène physique sans frottement, on s'attend à ce que l'énergie totale du pendule (cinétique+potentielle) soit conservée.

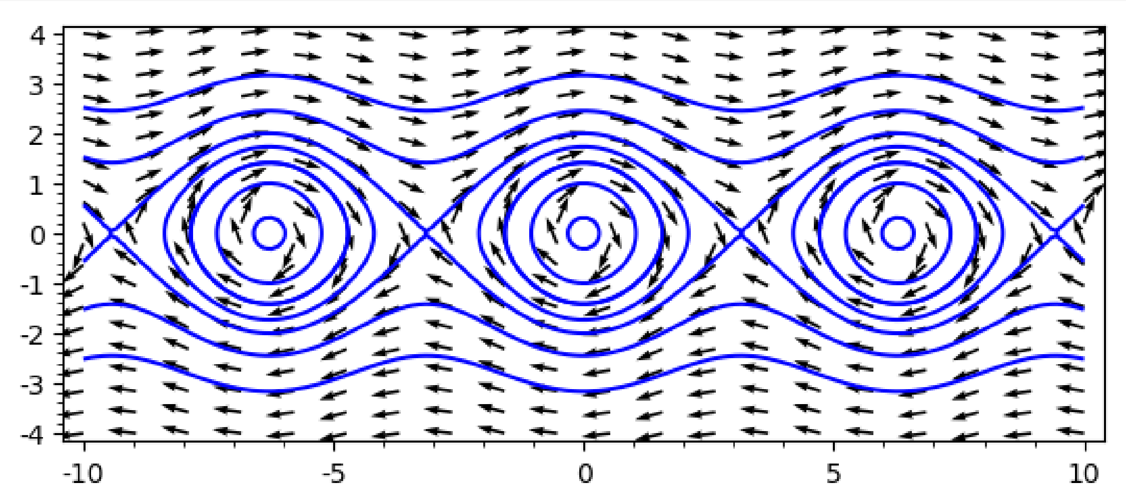
Mathématiquement, cela se voit en introduisant

$$H(\theta, v) = \frac{1}{2}v^2 - \cos(\theta)$$

Si (θ, v) est une solution sur $\mathbb{R}$, considérons $h(t) = H(\theta(t), v(t))$; on a pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} h'(t) &= \theta'(t)\frac{\partial H}{\partial \theta}(\theta(t), v(t)) + v'(t)\frac{\partial H}{\partial v}(\theta(t), v(t)) \\ &= \theta'(t)\sin(\theta(t)) + v'(t)v(t) \\ &= -v(t)v'(t) + v(t)v'(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc h est constante, autrement dit $H(\theta(t), v(t))$ est constante si (θ, v) est une solution : comme annoncé, H est une intégrale première, et les trajectoires sont contenues dans les lignes de niveau de H.
Voici une esquisse du portrait de phase du pendule non amorti. Les courbes bleues ci-dessous représentent les courbes de niveau de H, et on va justifier ci-dessous que ce sont aussi les trajectoires pour notre portrait de phase.



Le portrait de phase du pendule non amorti

On "lit" sur le portrait de phase (c'est un bon exercice d'essayer de justifier rigoureusement les assertions ci-dessous !) qu'il y a 3 types de trajectoires en plus des solutions stationnaires :

- Si $-1 < H(\theta_0, v_0) < 1$ alors la courbe de niveau correspondante est compacte (et homéomorphe à un cercle). Montrons que dans ce cas les solutions sont périodiques.

  Supposons que (θ, v) ne prenne pas deux fois la même valeur. Alors $(\theta(t), v(t))$ admet une limite en $+\infty$ (Pour le démontrer, on peut par exemple utiliser le fait qu'un cercle privé d'un point est homéomorphe à un intervalle, et utiliser un argument de monotonie. On passe les détails...). Comme $v = \theta'$, v doit tendre vers 0. Donc θ doit tendre vers un angle θ_∞ tel que $\cos(\theta_\infty) = H(\theta_0, v_0)$ (il y a deux possibilités sur la courbe de niveau, selon la valeur de θ_0).

Mais alors, $v'(t) = -\sin(\theta(t))$ a une limite non nulle quand t tend vers $+\infty$, ce qui force v à tendre vers $\pm\infty$, une contradiction.

Par conséquent, il existe $t_1 < t_2$ tels que $(v(t_1), \theta(t_1)) = (v(t_2), \theta(t_2))$. Alors les fonctions

$$y_1 : t \mapsto (\theta(t), v(t)) \quad \text{et}$$

$$y_2 : t \mapsto (\theta(t + t_2 - t_1), v(t + t_2 - t_1))$$

sont deux solutions maximales de $y' = f(y)$ qui prennent la même valeur en t_1. Le théorème de Cauchy–Lipschitz nous permet de conclure que ces deux fonctions sont égales : le mouvement est périodique (et $t_2 - t_1$ en est une période).

Ce cas correspond à une condition initiale (θ_0, v_0) proche de $(k\pi, 0)$ avec k un nombre pair ; on voit ainsi que, pour ces conditions initiales, les trajectoires restent proches de $(k\pi, 0)$ sans tendre vers $(k\pi, 0)$ quand t tend vers $+\infty$. C' un équilibre stable mais pas asymptotiquement stable.

"Physiquement", le pendule oscille entre deux positions, suivant un mouvement périodique.

- Si $H(\theta_0, v_0) = 1$ alors la solution admet une limite en $\pm\infty$ de la forme $k\pi$, et une en $-\infty$ de la forme $(k+1)\pi$ (selon que $v_0 > 0$ ou $v_0 < 0$; si v_0 était égal à 0 la solution serait stationnaire puisqu'on aurait $\cos(\theta) = -1$).

  "Physiquement", le pendule met un temps infini pour atteindre une position verticale (on se doute bien que ceci ne peut pas se produire en réalité...)
- Si $H(\theta_0, v_0) > 1$ $v(t)$ oscille entre deux valeurs (toutes deux strictement positives ou strictement négatives, et du même signe que v_0) et $\theta(t)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, $-\infty$ en $-\infty$ si $v_0 > 0$, $-\infty$ en $+\infty$ et $+\infty$ en $-\infty$ si $v_0 < 0$.

  "Physiquement", le pendule fait une infinité de tours, en gardant toujours le même sens de rotation ; il ralentit quand il va vers le haut, et accélère quand il va vers le bas. Sa vitesse initiale est telle qu'il ne s'arrête jamais.

Exemple 5.13

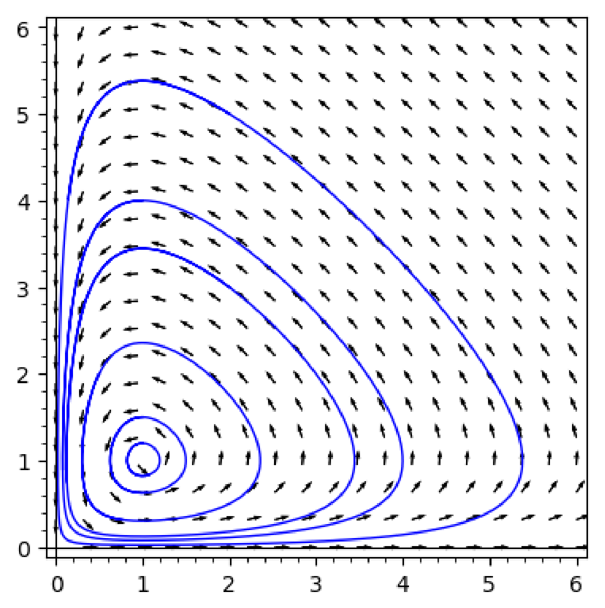
Revenons brièvement sur le cas du *système de Lotka–Volterra* mentionné au début du cours. Rappelons qu'on fixe quatre constantes $a, b, c, d > 0$, et considérons le système différentiel

$$\begin{cases} x' = ax - bxy, \ x > 0 \\ y' = -cy + dxy, \ y > 0 \end{cases}$$

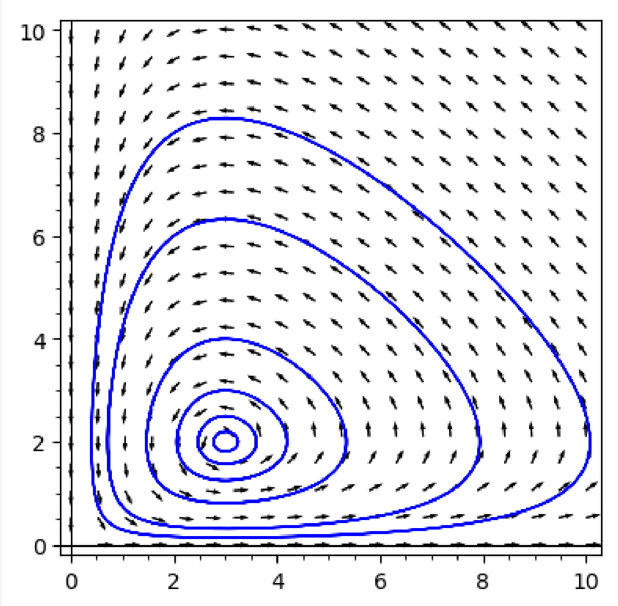
Cette équation modélise l'interaction entre deux espèces, une "proie" et un "prédateur".

L'unique point critique (on n'étudie l'équation que sur le quart de plan $x > 0$, $y > 0$) se situe en $x = \dfrac{c}{d}$, $y = \dfrac{a}{b}$.

Contentons-nous de donner les portraits de phase dans deux cas pour avoir une idée du comportement de ce système.



$a = b = c = d = 1$



$a = 2,\ b = 1,\ c = 3,\ d = 1$

On voit ainsi que les trajectoires "tournent" ; comme dans le cas du pendule, il faut un peu plus de travail pour démontrer qu'elles sont fermées, i.e. que les solutions sont périodiques. En tout cas, le fait que les courbes de niveau de l'intégrale première sont bornées nous permet de voir que les solutions maximales sont globales (puisqu'il ne peut y avoir explosion en temps fini).

Chapitre 6

Démonstrations de quelques grands théorèmes

6.1 Démonstration du théorème de Cauchy–Lipschitz

Dans cette section, on fixe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^d$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et $f\colon I\times U\to\mathbb{R}^d$ une fonction satisfaisant les conditions (H1) et (H2) du théorème de Cauchy–Lipschitz (c'est-à-dire que f est continue, et localement lipschitzienne en la variable d'état).
On fixe $(t_0,y_0)\in I\times U$, et on souhaite établir qu'il existe une unique solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) & = f(t,y(t)) \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases} \tag{PC}$$

Existence locale d'une solution.

Par hypothèse sur f, on peut trouver $L>0$, $\alpha_0>0$ et $r_0>0$ tels que

- $K=[t_0-\alpha_0,t_0+\alpha_0]\times B_f(y_0,r_0)\subseteq I\times U$
- $\forall (t,x),(t,y)\in K\ \|f(t,x)-f(t,y)\|\leq L\|x-y\|$ (parce que f est localement lipschitzienne en la variable d'état)
- Il existe $M>0$ tel que $\|f(t,x)\|\leq M$ pour tout $(t,x)\in K$ (parce que f est continue et K est compact).

Pour $\alpha\in\,]0,\alpha_0]$ on note

$$J_\alpha=[t_0-\alpha,t_0+\alpha] \quad \text{et} \quad F_\alpha=C(J_\alpha,B_f(y_0,r_0))$$

On munit F_α de la norme $\|\cdot\|_\infty$: $\|y\|_\infty=\sup\{\|y(t)\|\colon t\in J_\alpha\}$.
On cherche une solution de $y'(t)=f(t,y(t))$ telle que $y(t_0)=y_0$; on va réécrire cela sous forme de recherche de point fixe. On considère $\Phi\colon F_\alpha\to C(J_\alpha,\mathbb{R}^d)$ définie par

$$\Phi(y)\colon t\mapsto y_0+\int_{t_0}^t f(s,y(s))ds$$

Si jamais y est une solution de notre problème de Cauchy, définie sur un intervalle ouvert contenant J_α, alors on a pour tout $t \in J_\alpha$

$$\begin{aligned}\Phi(y)(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} y'(s)ds \\ &= y_0 + y(t) - y(t_0) \\ &= y(t)\end{aligned}$$

Autrement dit, y est un point fixe de Φ. Réciproquement, si $\Phi(y) = y$ alors

$$y(t_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, y(s))ds = y_0$$

De plus on peut appliquer le théorème fondamental de l'analyse pour obtenir

$$\forall t \in \overset{\circ}{J}_\alpha \quad y'(t) = f(t, y(t))$$

On voudrait donc pouvoir établir l'existence d'un point fixe de Φ ; on souhaiterait appliquer le théorème du point fixe de Picard. Pour cela, il nous faudrait :

- Que F_α soit complet.
- Que $\Phi(F_\alpha)$ soit contenu dans F_α.
- Que Φ soit lipschitzienne de rapport $k < 1$ sur F_α.

Le premier point est vérifié puisque J_α est compact (c'est pour cela qu'on travaille avec un intervalle fermé plutôt que les intervalles ouverts auxquels on est habitué) et $B_f(y_0, r_0)$ est fermé dans $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$ et donc complet.

Il nous reste à justifier que, si $\alpha > 0$ est suffisamment petit, alors les deux autres conditions sont satisfaites. Fixons donc $y, z \in F_\alpha$.
Pour tout $t \in J_\alpha$, on a

$$\begin{aligned}\|\Phi(y)(t) - y_0\| &= \left\|\int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds\right\| \\ &\leq \left|\int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s))\|\, ds\right| \\ &\leq \left|\int_{t_0}^{t} M ds\right| \text{ (parce que } (s, y(s)) \in K\text{)} \\ &\leq M|t - t_0| \\ &\leq M\alpha\end{aligned}$$

Il nous suffit donc de choisir α suffisamment petit pour que $\alpha M \leq r_0$ pour garantir que $\Phi(F_\alpha) \subseteq F_\alpha$.
Pour tout $t \in J_\alpha$ on a

$$\begin{aligned}\|\Phi(y)(t) - \Phi(z)(t)\| &= \left\|\int_{t_0}^{t} (f(s, y(s)) - f(s, z(s))ds\right\| \\ &\leq \left|\int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\|\, ds\right| \\ &\leq \left|\int_{t_0}^{t} L\|y(s) - z(s)\|ds\right| \\ &\leq L|t_0 - t|\|y - z\|_\infty \\ &\leq L\alpha\|y - z\|_\infty\end{aligned}$$

Pour la troisième condition, il nous suffit donc de demander $L\alpha < 1$, par exemple $\alpha \leq \dfrac{1}{2L}$.

Les calculs ci-dessus permettent d'appliquer le théorème du point fixe de Picard pour conclure que, si $M\alpha \leq r_0$ et $L\alpha < 1$ alors Φ admet un unique point fixe sur F_α.
Par conséquent, le problème de Cauchy (PC) admet une solution sur $\mathring{J}_\alpha$; c'est par ailleurs la seule solution qui s'étend en un élément de F_α.
C'est la fin de la première étape de notre raisonnement. Résumons ce que nous avons établi.

Lemme 6.1
Soit $(t_0, y_0) \in I \times U$. Supposons que α_0, r_0, L et M sont des réels > 0 tels que

- $K = [t_0 - \alpha_0, t_0 + \alpha_0] \times \mathcal{B}_f(y_0, r_0) \subseteq I \times U$
- $\forall (t, x), (t, y) \in K \ \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$
- $\|f(t, x)\| \leq M$ pour tout $(t, x) \in K$.

On suppose que $\alpha > 0$ est tel que $\alpha \leq \min\left(\alpha_0, \dfrac{r_0}{M}, \dfrac{1}{2L}\right)$.
Alors il existe une solution du problème de Cauchy (PC) sur $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$; cette solution se prolonge en une fonction continue sur $J_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.
C'est l'unique solution définie sur $\mathring{J}_\alpha$, prenant toutes ses valeurs dans $B_f(y_0, r_0)$, et admettant une limite en $t_0 \pm \alpha$.

Unicité locale d'une solution.

On reprend les notations du lemme 6.1. On pose

$$\alpha = \min\left(\alpha_0, \frac{r_0}{M}, \frac{1}{2L}\right)$$

et on souhaite montrer qu'il existe une seule solution du problème de Cauchy (PC) définie sur $\mathring{J}_\alpha$.
Pour cela, on commence par établir que toute solution de (PC) définie sur $\mathring{J}_\alpha$ est à valeurs dans $B_f(y_0, r_0)$.
Soit donc z une telle solution ; raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe $t \in J_\alpha$ tel que $\|z(t) - y_0\| > r_0$. Supposons par exemple $t > t_0$ (l'autre cas se traite de façon similaire)
Comme $t \mapsto \|z(t) - y_0\|$ est continue, vaut 0 en 0 et prend une valeur $> r_0$, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure qu'il existe $u \in J_\alpha$ tel que $\|z(u) - y_0\| = r_0$. Considérons

$$u_0 = \inf\{u \geq t_0 \colon \|z(u) - y_0\| = r_0\}$$

Alors on a :

- $\|z(u_0) - y_0\| = r_0$
  En effet, il existe une suite (u_n) qui converge vers u et telle que $\|z(u_n) - y_0\| = r_0$; on conclut par continuité.
- $t_0 < u_0 < t_0 + \alpha$
  La première inégalité est immédiate puisque $u_0 \geq t_0$ et $\|z(u_0) - y_0\| \neq \|z(t_0) - y_0\|$. Si la deuxième était fausse, on aurait $\|z(t) - y_0\| < r_0$ pour tout $t \in]t_0, t_0 + \alpha[$, donc aussi $\|z(t_0 + \alpha) - y_0\| \leq r_0$ par continuité.

- Pour tout $s \in]t_0, u_0[$ on a aussi $\|z(s) - y_0\| < r_0$.

Mais alors, les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} r_0 &= \|z(u_0) - y_0\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^{u_0} z'(s) ds \right\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^{u_0} f(s, y(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^{u_0} \|f(s, y(s))\| ds \\ &\leq M |u_0 - t_0| \\ &< M\alpha \\ &\leq r_0 \end{aligned}$$

On vient de déduire $r_0 < r_0$ de notre hypothèse selon laquelle z n'est pas à valeurs dans $B_f(y_0, r_0)$, qui est donc contradictoire.

Pour montrer que $z = y$ sur $\mathring{J}_\alpha$, fixons $\beta < \alpha$; alors les restrictions de z et y à J_β sont deux solutions de (PC), appartenant à F_β, et admettant une limite en $t_0 \pm \beta$. Le lemme 6.1 nous permet de conclure que $y = z$ sur $]t_0 - \beta, t_0 + \beta[$.

Puisque cela est vérifié pour tout $\beta < \alpha$ on conclut que y est, comme annoncé, la seule solution de (PC) définie sur $\mathring{J}_\alpha$.

Existence et unicité de la solution maximale.

L'existence d'une solution de (PC) nous garantit que ce problème de Cauchy admet une solution maximale, puisque d'après le théorème 2.8 toute solution d'une équation différentielle peut se prolonger en une solution maximale.

Reste à en établir l'unicité : soit $y_1 \colon J_1 \to \mathbb{R}^d$ et $y_2 \colon J_2 \to \mathbb{R}^d$ deux solutions maximales de (PC).

Considérons $J = \{t \in J_1 \cap J_2 \colon y_1(t) = y_2(t)\}$. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :

- $t_0 \in J$, donc J est non vide.
- J est fermé dans $J_1 \cap J_2$, puisque y_1 et y_2 sont continues.
- J est ouvert dans $J_1 \cap J_2$.

Pour justifier le dernier point, considérons $s_0 \in J$; puisque $y_1(s_0) = y_2(s_0)$, l'unicité locale des solutions de problèmes de Cauchy (qu'on a déjà établie) nous garantit qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que y_1 et y_2 coïncident sur $]s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon[$. Donc $]s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon[$ est contenu dans $J_1 \cap J_2$, qui est donc ouvert.

Puisque $J_1 \cap J_2$ est un intervalle, et est donc connexe, on conclut que $J = J_1 \cap J_2$.

Pour l'instant, on a établi que $y_1 = y_2$ sur $J_1 \cap J_2$. Si, par exemple, $\sup(J_1) < \sup(J_2)$, alors y_1 n'est pas une solution maximale, puisque y_2 la prolonge à droite de $\sup(J_1)$, une contradiction ; donc $\sup(J_1) = \sup(J_2)$, et de même $\inf(J_1) = \inf(J_2)$.

Finalement, $J_1 = J_2$ et $y_1 = y_2$. On a enfin terminé de démontrer le théorème de Cauchy–Lipschitz.

6.2 Théorème de sortie des compacts

On va maintenant établir un théorème généralisant le théorème d'explosion en temps fini.

☆ Théorème 6.2 (Théorème de sortie des compacts)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et $f\colon I \times U \to \mathbb{R}^d$ une fonction satisfaisant les conditions (H1) et (H2) du théorème de Cauchy–Lipschitz.
Soit y une solution maximale de $y'(t) = f(t, y(t))$, définie sur un intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$.
Si $\beta < \sup(I)$ alors y sort de tout compact de U, c'est-à-dire :
Pour tout compact K contenu dans U, il existe $\eta \in J$ tel que pour tout $t \in J$ avec $t \geq \eta$ on ait $y(t) \notin K$.

Avant de passer à la preuve, remarquons que le théorème d'explosion en temps fini correspond au cas $U = \mathbb{R}^d$ de ce théorème : sortir de tous les compacts de $\mathbb{R}^d$ revient à sortir de toute partie bornée, c'est-à-dire que $\|y(t)\|$ doit tendre vers $+\infty$ quand t tend vers β.

Démonstration. Soit $y\colon J \to \mathbb{R}^d$ une solution maximale. On note $I =]a, b[$ et $J =]\alpha, \beta[$. On suppose $\beta < b$; en particulier $\beta \in \mathbb{R}$ (on autorise $a = -\infty$, $b = +\infty$).
Supposons, pour établir une contradiction, qu'il existe un compact $K \subseteq U$ tel que

$$\forall \eta < \beta \ \exists t \in J \cap [\eta, \beta[\ y(t) \in K$$

En appliquant cette propriété avec $\beta - \eta = 2^{-n}$, on peut construire une suite (t_n) d'éléments de J, qui converge vers β, et telle que $y(t_n) \in K$ pour tout n.
Par compacité de K, $(y(t_n))$ admet une suite extraite $(y(t_{\varphi(n)}))$ qui converge vers $l \in K$; pour simplifier un peu la notation, on note $s_n = t_{\varphi(n)}$.
Lors de notre démonstration du théorème de Cauchy–Lipschitz, nous avons obtenu un contrôle sur le temps d'existence d'une solution locale (le α qui apparaît dans la preuve) et c'est ce qui va nous permettre de conclure ici.
Comme dans la preuve du théorème de Cauchy–Lipschitz, on trouve $\eta_0 > 0$, $r_0 > 0$, $L > 0$, $M > 0$ tels que :

- $A = [\beta - \eta_0, \beta + \eta_0] \times B_f(l, r_0) \subseteq I \times U$
- $\forall (t,x), (t,x') \in A \ \|f(t,x) - f(t,x')\| \leq L\|x - x'\|$
- $\forall (t,x) \in A \ \|f(t,x)\| \leq M$

Soit $\eta = \min\left(\frac{\eta_0}{2}, \frac{r_0}{2M}, \frac{1}{2L}\right)$.
On peut trouver $k \in \mathbb{N}$ tel que $\|y(s_k) - l\| \leq \frac{r_0}{2}$ et $|\beta - s_k| \leq \frac{\eta}{2}$. Notons $s = s_k$.
Grâce au choix de η_0 et à l'inégalité triangulaire, on voit que

$$[s - \eta, s + \eta] \times B_f(y(s), \frac{r_0}{2}) \subseteq A$$

D'après le lemme 6.1, il existe une solution z au problème de Cauchy

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) \\ z(s) \ = y(s) \end{cases}$$

définie sur $]s - \eta, s + \eta[$, et on a vu que cette solution est unique.
Mais alors on peut prolonger y en une solution $\tilde{y}\colon]\alpha, s + \eta[$, qui contient strictement $]\alpha, \beta[$, en posant

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y(t) & \text{si } t \in]\alpha, s[\\ z(t) & \text{si } t \in [s, s + \eta[\end{cases}$$

Ceci contredit la maximalité de y, et conclut donc la démonstration. □

Exemple 6.3
Voyons un exemple simple où la solution sort de tout compact tout en restant bornée. Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) &= -\dfrac{1}{x(t)} \ , \ t \in \mathbb{R} \\ x(0) &= x_0 > 0 \end{cases}$$

Ici, le champ de vecteurs est $f\colon \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ défini par $f(t,x) = -\dfrac{1}{x}$.
C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, on peut donc appliquer le théorème de Cauchy–Lipschitz pour obtenir l'existence et l'unicité d'une solution maximale définie sur un intervalle ouvert J contenant 0.
Dans ce cas, il n'est pas très compliqué de résoudre l'équation, qui est autonome : on a pour tout $t \in J$ $x'(t)x(t) = -1$, donc $x(t)^2 - x_0^2 = -2t$, soit encore $(x(t))^2 = x_0^2 - 2t$.
Cela impose $2t \leq x_0^2$, c'est-à-dire $t \leq \dfrac{x_0^2}{2}$. Comme x est à valeurs dans U, $x(t) > 0$ pour tout $t \in J$. Finalement, on obtient

$$J =]-\infty, \frac{x_0^2}{2}[\quad \text{et} \quad x(t) = \sqrt{x_0^2 - 2t}$$

La solution maximale n'est pas globale, et sa limite à droite de son intervalle de définition vaut 0 : au voisinage de $\sup J$, elle sort de tous les compacts de $U =]0,+\infty[$ tout en restant bornée.

6.3 Le flot associé à une équation différentielle

Comme d'habitude, on fixe I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $f\colon I \times U \to \mathbb{R}^d$ et on considère l'équation différentielle

$$y'(t) = f(t, y(t)) \ , \ t \in I \tag{E}$$

Définition 6.4
Pour tout $(t_0, y_0) \in I \times U$, on note $J_{(t_0,y_0)}$ l'intervalle de définition de la solution maximale y de (E) vérifiant $y(t_0) = y_0$. On définit

$$D = \left\{(t, t_0, y_0)\colon t_0 \in I \ , \ y_0 \in U \ , \ t \in J_{(t_0,y_0)}\right\}$$

On définit $\varphi\colon D \to U$ en notant $\varphi(t, t_0, y_0)$ la valeur au temps t de la solution maximale y de (E) vérifiant $y(t_0) = y_0$.
La fonction φ est appelée le *flot* associé à (E).

Par définition, φ admet une dérivée partielle par rapport à t, et on a pour tout $(t, t_0, y_0) \in D$ l'égalité

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, t_0, y_0) = f(t, \varphi(t, t_0, y_0))$$

Exemple 6.5

Considérons le cas d'une équation linéaire.

1. Commençons par une équation de la forme $y'(t) = Ay(t)$, avec $t \in \mathbb{R}$ et $A \in M_d(\mathbb{R})$. Le flot dans ce cas est défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, et on a la formule

$$\varphi(t, t_0, y_0) = e^{(t-t_0)A} y_0$$

2. Si l'équation est de la forme $y'(t) = A(t)y(t)$ avec $A \colon I \to M_d(\mathbb{R})$ continue, alors le flot est défini sur $I \times I \times \mathbb{R}^d$ (les solutions maximales sont globales) ; et si Φ désigne une matrice fondamentale pour notre équation, le flot est donné par la formule

$$\varphi(t, t_0, y_0) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1} y_0$$

3. Enfin, si l'équation est de la forme $y'(t) = A(t)y(t)+b(t)$ avec $A \colon I \to M_d(\mathbb{R})$ et $b \colon I \to \mathbb{R}^d$ continues, et Φ est une matrice fondamentale pour l'équation homogène associée, la formule de Duhamel nous assure que le flot est défini sur $I \times I \times \mathbb{R}^d$ par la formule

$$\varphi(t, t_0, y_0) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1} y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi(s)^{-1} b(s) ds$$

Théorème 6.6

Sous les hypothèses du théorème de Cauchy–Lipschitz, le domaine de définition du flot est un ouvert de $I \times I \times U$, et $\varphi \colon D \to \mathbb{R}^d$ est continu (en fait, localement lipschitzien).

Ceci exprime le fait que les solutions dépendent continûment des conditions initiales.

Démonstration. Soit $(t_0, y_0) \in I \times U$. On reprend l'argument employé dans la preuve du théorème de Cauchy–Lipschitz, qui nous permet d'obtenir un contrôle sur les solutions de (E). Pour cela, on fixe $\alpha_0 > 0$, $r_0 > 0$, $L > 0$ et $M > 0$ tels que

- $K = [t_0 - \alpha_0, t_0 + \alpha_0] \times B_f(y_0, r_0) \subseteq I \times U$
- $\forall (t, x), (t, y) \in K \ \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$
- $\forall (t, x) \in K \ \|f(t, x)\| \leq M$

Considérons $(t_1, y_1) \in [t_0 - \frac{\alpha_0}{2}, t_0 + \frac{\alpha_0}{2}] \times B_f(y_0, \frac{r_0}{2})$.
Alors $[t_1 - \frac{\alpha_0}{2}, t_1 + \frac{\alpha_0}{2}] \times B_f(y_0, \frac{r_0}{2}) \subseteq K$; si on pose

$$\alpha = \min(\frac{\alpha_0}{2}, \frac{r_0}{2M}, \frac{1}{2L})$$

Le lemme 6.1 garantit l'existence de solutions $y \colon [t_0 - 2\alpha, t_0 + 2\alpha] \to \mathbb{R}^d$ et $z \colon [t_1 - \alpha, t_1 + \alpha] \to \mathbb{R}^d$ telles que $y(t_0) = y_0$ et $z(t_1) = y_1$.
On vient d'établir que, pour tout $(t_1, y_1) \in \left[t_0 - \frac{\alpha}{2}, t_0 + \frac{\alpha}{2}\right]$ et tout $y_1 \in B_f(y_0, r_0)$, $\varphi(t, t_0, t_1)$ est défini pour tout $t \in [t_1 - \alpha, t_1 + \alpha]$, et cet intervalle contient $[t_0 - \frac{\alpha}{2}, t_0 + \frac{\alpha}{2}]$.

Par conséquent,
$$\left[t_0-\frac{\alpha}{2},t_0+\frac{\alpha}{2}\right]\times\left[t_0-\frac{\alpha}{2},t_0+\frac{\alpha}{2}\right]\times B_f(y_0,r_0)\subseteq D$$
De plus, $[t_1-\alpha,t_1+\alpha]\subseteq[t_0-2\alpha,t_0+2\alpha]$ et pour tout $t\in[t_1-\alpha,t_1+\alpha]$ on a
$$\begin{array}{rcl}\|y(t)-z(t)\| & = & \left\|y_0-y_1+\int_{t_0}^t f(s,y(s))ds-\int_{t_1}^t f(s,z(s))ds\right\| \\ & \leq & \|y_0-y_1\|+\left\|\int_{t_0}^{t_1} f(s,y(s))ds\right\|+\left\|\int_{t_1}^t (f(s,y(s))-f(s,z(s))ds\right\| \\ & \leq & \|y_0-y_1\|+M|t_0-t_1|+L\left|\int_{t_1}^t \|y(s)-z(s)\|ds\right|\end{array}$$
À l'aide de l'inégalité de Gronwall, on obtient pour tout $t\in[t_1,t_1+\alpha]$ l'inégalité
$$\begin{array}{rcl}\|y(t)-z(t)\| & \leq & (\|y_1-y_0\|+M|t_1-t_0|)\,e^{L(t-t_1)} \\ & \leq & (\|y_1-y_0\|+M|t_1-t_0|)\,e^{\alpha L}\end{array}$$
La même inégalité est valable pour $t\in[t_1-\alpha,t_1]$ (et peut se déduire de ce qu'on a établi en remplaçant f par $-f$)
On a en particulier établi que pour tout $t,t_1\in\left[t_0-\frac{\alpha}{2},t_0+\frac{\alpha}{2}\right]$ et tout $y_1\in B_f(y_0,r_0)$ on a
$$\|\varphi(t,t_0,y_0)-\varphi(t,t_1,y_1)\|\leq(\|y_1-y_0\|+M|t_1-t_0|)\,e^{\alpha L}$$
Alors, pour tout $t,\tau,t_1\in\left[t_0-\frac{\alpha}{2},t_0+\frac{\alpha}{2}\right]$ on obtient
$$\begin{array}{rcl}\|\varphi(t,t_0,y_0)-\varphi(\tau,t_1,y_1)\| & \leq & \|\varphi(t,t_0,y_0)-\varphi(t,t_1,y_1)\|+\|\varphi(t,t_1,y_1)-\varphi(\tau,t_1,y_1)\| \\ & \leq & (\|y_1-y_0\|+M|t_1-t_0|)\,e^{\alpha L}+\left\|\int_\tau^t f(s,\varphi(s,t_1,y_1))ds\right\| \\ & \leq & (\|y_1-y_0\|+M|t_1-t_0|)\,e^{\alpha L}+M\|t-\tau\|\end{array}$$
Récapitulons : on a montré que, pour tout $(t,t_0,y_0)\in D$ il existe $\alpha>0$ tel que
$$U_\alpha=\left[t_0-\frac{\alpha}{2},t_0+\frac{\alpha}{2}\right]\times\left[t_0-\frac{\alpha}{2},t_0+\frac{\alpha}{2}\right]\times B_f(y_0,r_0)\subseteq D$$
et φ est lipschitzienne sur U_α.
En particulier, (t_0,t_0,y_0) appartient à l'intérieur de D, et φ est lipschitzienne sur un ouvert contenant (t_0,t_0,y_0).
Reste à établir le même résultat au voisinage d'un point quelconque $(t,t_0,y_0)\in D$. Cela se déduit en fait de ce qu'on vient de faire, par une simple translation du temps : fixons $(t,t_0,y_0)\in D$, et considérons l'équation différentielle
$$y'(s)=f(s+t-t_0,y(s+t-t_0))$$
Si on note ψ le flot associé à ce champ de vecteurs, on a l'égalité
$$\psi(s,t_0,y_0)=\varphi(s+t-t_0,t_0,y_0)$$

Il existe $\alpha > 0$ tel que $\left[t_0 - \frac{\alpha}{2}, t_0 + \frac{\alpha}{2}\right] \times \left[t_0 - \frac{\alpha}{2}, t_0 + \frac{\alpha}{2}\right] \times B_f(y_0, r_0)$ soit contenu dans le domaine de définition de ψ, et ψ y est lipschitzienne ; cela revient à dire que

$$\left[t - \frac{\alpha}{2}, t + \frac{\alpha}{2}\right] \times \left[t_0 - \frac{\alpha}{2}, t_0 + \frac{\alpha}{2}\right] \times B_f(y_0, r_0) \subseteq D$$

et que φ y est lipschitzienne.

□

En fait, on peut montrer que le flot est "aussi régulier que f" ; c'est un résultat plus difficile, qu'on ne va pas établir ici. Énonçons le tout de même.

Théorème 6.7 (Théorème de différentiabilité du flot)
Supposons f de classe $\mathcal{C}^k$, pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$.
Alors le flot associé à l'équation (E) est également de classe $\mathcal{C}^k$ sur son domaine de définition (qui est un ouvert de $I \times I \times U$)

Notons que, comme f est (au moins) de classe $\mathcal{C}^1$, les hypothèses du théorème de Cauchy–Lipschitz sont vérifiées, ce qui nous permet de parler du flot associé à (E), et d'affirmer que son domaine de définition est ouvert.

Exemple 6.8
Donnons un exemple d'application du théorème de différentiabilité du flot : on va montrer que l'exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $M_d(\mathbb{R})$.
Pour cela, on considère l'équation différentielle

$$(M'(t), A'(t)) = (A(t)M(t), 0) \ , \ t \in \mathbb{R}$$

où $A, M \in M_d(\mathbb{R})$.
Le champ de vecteurs $(A, M) \mapsto (AM, 0)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $M_d(\mathbb{R})$ (c'est une fonction dont les coordonnées sont polynomiales en les coefficients de A et M).
Les solutions de cette équation différentielle sont simples à obtenir :
De $A'(t) = 0$ on conclut que A est constante, égale à $A(0)$; et alors M est solution de

$$M'(t) = A(0)M(t)$$

autrement dit $M(t) = \exp(A(0)t).M(0)$.
Par conséquent, le flot associé à cette équation différentielle est défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (M_d(\mathbb{R}) \times M_d(\mathbb{R}))$, et donné par la formule

$$\varphi(t, t_0, (M_0, A_0)) = e^{(t-t_0)A_0} M_0$$

Comme le champ de vecteurs est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (autrement dit, $\mathcal{C}^k$ pour tout k) le théorème de différentiabilité du flot nous permet de conclure que ce flot est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$. En particulier,

$$A \mapsto e^A = \varphi(1, 0, I_d, A)$$

est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Remarque 6.9
Dans l'exemple précédent, le fait d'ajouter l'inconnue A dans l'équation, et d'imposer $A' = 0$, nous a en fait permis à peu de frais d'obtenir une version "à paramètres" du théorème de régularité du flot : on a manipulé une famille d'équations différentielles de la forme $M'(t) = AM(t)$, et fait varier le paramètre A.
Nous allons utiliser une remarque analogue dans la prochaine section, pour établir l'existence de solutions d'équations différentielles en supposant seulement le champ de vecteurs continu : pour simplifier la rédaction, on ne va considérer qu'une équation différentielle autonome.
En effet, le problème de Cauchy $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ est équivalent au problème de Cauchy autonome (où la dimension augmente de 1)

$$(z, s)'(t) = (f(s, z(s)), 1)$$

avec condition initiale $z(t_0) = y_0$ et $s(t_0) = t_0$ (on a alors $s(t) = t$ et $z'(t) = f(t, z(t))$).
Le champ de vecteurs $\tilde{f}(t, z, s) = (f(s, z), 1)$ est bien indépendant de t.

6.4 Théorème de Cauchy–Peano–Arzela

Théorème 6.10 (Cauchy–Peano–Arzela)
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \times U \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs continu. Pour tout $(t_0, y_0) \in I \times U$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

admet une solution maximale, définie sur un intervalle ouvert contenant y_0.

On a déjà vu, au tout début du cours, qu'une telle solution maximale pouvait ne pas être unique.
Comme mentionné dans la remarque qui conclut la section précédente, on va démontrer ce théorème seulement dans le cas autonome, c'est-à-dire pour $f\colon U \to \mathbb{R}^d$ continue et l'équation différentielle $y'(t) = f(y(t))$.

Démonstration. Pour simplifier, on se ramène au cas $t_0 = 0$ (par translation) ; on fixe $y_0 \in U$ et une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^d$.
L'idée de l'argument est de construire une suite de "solutions approchées" du problème de Cauchy sur un petit voisinage de $(0, y_0)$, puis d'utiliser un argument de compacité (le théorème d'Ascoli) pour en extraire une sous-suite qui converge vers une solution. Rappelons que l'existence de solutions locales nous suffit pour garantir l'existence de solutions maximales.
Comme dans la preuve du théorème de Cauchy–Lipschitz, on commence par fixer $r_0 > 0$ et M tels que $B_f(y_0, r_0) \subseteq U$ et $\|f(y)\| \leq M$ pour tout $y \in B_f(y_0, r_0)$; puis on pose $T = \dfrac{r_0}{M}$.
On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, et on va construire une solution approchée $t \mapsto z_n(t)$. Pour cela, pose $h_n = \dfrac{T}{n}$ et on définit ensuite par récurrence, pour $i \in \{1, \dots, N\}$,

$$y_i = y_{i-1} + h_n f(y_{i-1})$$

Pour que cela soit bien défini, il nous faut remarquer, par récurrence, que $y_i \in B_f(y_0, r_0)$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$; c'est vrai si $i = 0$, et si on suppose que c'est vrai pour tout $j \in \{0, \ldots, i-1\}$ alors on peut écrire

$$\begin{aligned}
\|y_i - y_0\| &\leq \sum_{j=1}^{i} \|y_i - y_{i-1}\| \\
&= \sum_{j=1}^{i} \|h_n f(y_{i-1})\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{i} h_n M \\
&= \frac{ir_0 M}{nM} \\
&\leq r_0
\end{aligned}$$

Donc y_i est bien défini pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, et appartient à $B_f(y_0, r_0)$.
On note $z_n \colon [0, T] \to \mathbb{R}^d$ la fonction affine sur chaque $[y_{i-1}, y_i]$ et telle que $z_n\,(ih_n) = y_i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$.
Puisque $B_f(y_0, r_0)$ est convexe, et chaque y_i appartient à $B_f(y_0, r_0)$, z_n est à valeurs dans $B_f(y_0, r_0)$.
L'idée est que z_n est dérivable à droite en $i_n h$ et sa dérivée à droite y vaut $f\,(z_n\,(ih_n))$; si on arrive à faire converger une sous-suite de z_n, on peut espérer que sa limite z soit dérivable et $z'(t) = f(z(t))$.
Puisque $\|f\| \leq M$ sur $B_f(y_0, r_0)$, la définition de z_n assure qu'elle est M-lipschitzienne.
En effet, fixons $s \leq t \in [0, T]$. S'il existe i tel que $ih_n \leq s \leq t \leq (i+1)h_n$ alors on a

$$\|z_n(t) - z_n(s)\| = \|(t-s) f(y_{i-1})\| \leq |t-s| M$$

Sinon, on peut trouver $i \leq j$ tel que $s \in [(i-1)h_n, ih_n]$ et $t \in [jh_n, (j+1)h_n]$, et écrire

$$\begin{aligned}
\|z_n(t) - z_n(s)\| &= \|z_n(t) - y_j\| + \|y_j - y_{j-1}\| + \ldots + \|y_{i+1} - y_i\| + \|y_i - y(s)\| \\
&\leq M(t - jh_n) + M(j-i)h_n + M(ih_n - s) \\
&= M(t-s)
\end{aligned}$$

Si on considère maintenant la famille $A = (z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on a les propriétés suivantes :

- A est une famille de fonctions continues du compact $[0, T]$ vers le complet $B_f(y_0, r_0)$;
- A est équicontinue (puisque tous les éléments de A sont M-lipschitziens) ;
- Pour tout $t \in [0, T]$, l'ensemble $\{z_n(t) \colon n \in \mathbb{N}^*\}$ est contenu dans $B_f(y_0, r_0)$, qui est compact [(i)], et est donc relativement compact.

Toutes les conditions du théorème d'Ascoli sont donc satisfaites. Par conséquent, A est relativement compact dans $C([0, T], B_f(y_0, r_0))$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, et on peut donc extraire une sous-suite convergente $(z_{\varphi(n)})$ de la suite (z_n).
Notons z sa limite ; c'est une fonction continue et, puisque $z_n(0) = y_0$ pour tout n, on a aussi $z(0) = y_0$.

(i). Ici, on utilise de façon cruciale le fait qu'on travaille en dimension finie : en dimension infinie, les boules fermées ne sont pas compactes... Le théorème de Cauchy–Peano–Arzela n'est d'ailleurs pas valide dans tout espace de Banach de dimension infinie, contrairement au théorème de Cauchy–Lipschitz.

Il nous reste à justifier que z est dérivable sur $]0,T[$ et $z'(t) = f(z(t))$ pour tout $t \in]0,T[$.
Pour cela, on va utiliser le fait que f est uniformément continue sur $B_f(y_0, r_0)$, puisque ce dernier est compact [(i)].
Fixons $\varepsilon > 0$, et trouvons $\delta > 0$ tel que pour tout $y, y' \in B_f(y_0, r_0)$ on ait

$$\|y - y'\| \leq \delta \Rightarrow \|f(y) - f(y')\| \leq \varepsilon$$

Considérons n tel que $\dfrac{T}{n} \leq \delta$, et soit $t \in [0,T]$. On trouve i tel que $ih_n \leq t \leq (i+1)h_n$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
\left\| z_n(t) - \left(y_0 + \int_0^t f(z_n(s))ds \right) \right\| &\leq \left\| z_n(t) - y_i - \int_{ih_n}^t f(y(s))ds \right\| + \sum_{j=1}^{i} \left\| y_j - y_{j-1} - \int_{(j-1)h_n}^{jh_n} f(y(s))ds \right\| \\
&= \left\| (t - ih_n)f(y_i) - \int_{ih_n}^t f(y(s))ds \right\| + \sum_{j=1}^{i} \left\| h_n f(y_{i-1}) - \int_{(j-1)h_n}^{jh_n} f(y(s)) \right\| \\
&\leq \left\| \int_{ih_n}^t (f(y_i) - f(y(s)))ds \right\| + \sum_{j=1}^{i} \left\| \int_{(j-1)h_n}^{jh_n} (f(y_j) - f(y(s)))ds \right\| \\
&\leq \varepsilon(t - ih_n) + \sum_{j=1}^{i} \varepsilon h_n \\
&\leq \varepsilon t \\
&\leq \varepsilon T
\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, et en utilisant que $(z_{\varphi(n)})$ converge uniformément vers z (ce qui permet d'échanger limite et intégrale ci-dessus, puisqu'on a convergence uniforme sur un segment), on obtient donc

$$z(t) = y_0 + \int_0^t f(z(s))ds$$

En appliquant le même raisonnement à gauche de 0, on construit aussi une fonction continue $\tilde{z}$, définie sur $[-T,0]$ et telle que pour tout $t \in [-T,0]$ on ait

$$\tilde{z}(t) = y_0 + \int_0^t f(z(s))ds$$

En recollant z et $\tilde{z}$ on obtient une fonction continue w, définie sur $[-T,T]$ et telle que pour tout $t \in [-T,T]$ on ait

$$w(t) = y_0 + \int_0^t f(w(s))ds$$

Alors, pour tout $t \in [-T,T]$ on a $w'(t) = f(w(t))$.
On a bien trouvé une solution w définie sur $]-T,T[$, ce qui montre que les problèmes de Cauchy associés à des champs de vecteurs continus admettent des solutions.
Comme toute solution se prolonge en une solution maximale, le théorème de Cauchy–Peano–Arzela est démontré.

□

(i). On utilise une nouvelle fois la compacité de la boule fermée.

Index