Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2009/2010
Master 1 — Introduction à la Logique

Théorie des ensembles
Correction du DM2.

Exercice I.

1. On commence par montrer que si V est un ensemble transitif alors $\mathcal{P}(V)$ est encore un ensemble transitif. En effet, si $a \in b \in \mathcal{P}(V)$, alors $b \subseteq V$ par définition de $\mathcal{P}(V)$, donc on a $a \in V$ par définition de l'inclusion. Comme V est transitif, ceci entraîne que $a \subseteq V$, autrement dit $a \in \mathcal{P}(V)$. On a donc démontré que $(a \in b \in \mathcal{P}(V)) \Rightarrow (a \in \mathcal{P}(V))$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(V)$ est transitif.
   Utilisons cela pour prouver le résultat demandé par récurrence transfinie :
   - $V_0 = \emptyset$ est transitif. On considère maintenant $\alpha > 0$ tel que V_β soit transitif pour tout $\beta < \alpha$.
   - Si $\alpha = \beta + 1$, a :ors ce qu'on vient de démontrer entraîne que $V_\alpha = \mathcal{P}(V_\beta)$ est transitif.
   - Si α est limite, alors V_α est une réunion d'ensembles transitifs ; une union d'ensembles transitifs est un ensemble transitif. On en déduit que V_α est bien un ensemble transitif.
2. Notons que si V est un ensemble transitif alors $V \subseteq \mathcal{P}(V)$; on en déduit par récurrence transfinie que $\beta \leq \alpha \Rightarrow V_\beta \subseteq V_\alpha$. La construction entraîne aussi que $\beta < \alpha \Rightarrow V_\beta \in V_\alpha$.
   Montrons maintenant, par récurrence transfinie, qu'on a $V_\alpha \notin V_\alpha$ pour tout α :
   - $\emptyset \notin \emptyset$;
   - Si $V_{\alpha+1} \in V_{\alpha+1}$ alors $\mathcal{P}(V_\alpha) \in \mathcal{P}(V_\alpha)$; autrement dit $\mathcal{P}(V_\alpha) \subseteq V_\alpha$, et c'est impossible à cause du théorème de Cantor.
   - Si α est limite, $V_\beta \notin V_\beta$ pour $\beta < \alpha$ et $V_\alpha \in V_\alpha$, alors on a $\beta < \alpha$ tel que $V_\alpha \in V_\beta$, et comme $\beta < \alpha$ on a $V_\beta \in V_\alpha$; comme V_β est transitif, on en déduit que $V_\beta \in V_\beta$.

   Supposons maintenant que α, β sont tels que $V_\beta \in V_\alpha$. Si on avait $\alpha < \beta$, alors on aurait $V_\alpha \in V_\beta \in V_\alpha$, et comme V_α est transitif, on aurait aussi $V_\alpha \in V_\alpha$, contredisant notre résultat ci-dessus. De même, $\alpha = \beta$ est impossible, par suite $\beta < \alpha$. Le même raisonnement montre que si $V_\beta \subseteq V_\alpha$ alors on ne peut pas avoir $\alpha < \beta$, et donc $\beta \leq \alpha$.
3. Montrons que $\alpha \notin V_\alpha$ pour tout α :
   - $\emptyset \notin \emptyset$;
   - Si $\alpha + 1 \in V_{\alpha+1}$ alors $\alpha \cup \{\alpha\} \in \mathcal{P}(V_\alpha)$; par conséquent $\{\alpha\} \subseteq V_\alpha$, ce qui entraîne $\alpha \in V_\alpha$.
   - Si α est limite et $\beta \notin V_\beta$ pour tout $\beta < \alpha$, et $\alpha \in V_\alpha$, alors il doit exister $\beta < \alpha$ tel que $\alpha \in V_\beta$, et comme $\beta \in \alpha$ et V_β est transitif ceci entraîne que $\beta \in V_\beta$, contradiction.

   Une récurrence transfinie similaire montrerait que $\alpha \in V_{\alpha+1}$ pour tout α.
4. Rappelons que l'axiome de fondation s'écrit : pour tout ensemble x il existe un ensemble y tel que $y \in x$ et $y \cap x = \emptyset$. Autrement dit, l'axiome de fondation affirme que dans tout ensemble x il existe $y \in x$ qui soit minimal pour $\in$.
   Commençons par supposer que pour tout ensemble x il existe un ordinal γ tel que $x \in V_\gamma$. Etant donné un ensemble x, fixons un tel γ. Alors tout $y \in x$ est aussi dans V_γ, donc tout $y \in x$ a un rang unique. On peut alors poser $\delta = \min\{rg(y) \colon y \in x\}$.
   Il existe $y \in x$ tel que $rg(y) = \delta$. De plus, si $z \in y$ alors on a $z \in y \in V_{\delta+1} = \mathcal{P}(V_\delta)$ donc $z \in V_\delta$, contredisant la minimalité de δ. Par conséquent y est minimal pour $\in$ parmi les éléments de x, et l'axiome de fondation est vérifié.

   Avant de prouver la réciproque, notons que si un ensemble x est tel que tout $y \in x$ appartient à un V_α, alors si on pose $\delta = \sup\{rg(y) \colon y \in X\}$, on a $y \in V_{\delta+1}$ pour tout $y \in V$, par conséquent $x \in V_{\delta+2}$. Considérons donc un ensemble x n'appartenant à aucun V_α ; alors il doit exister $y \in x$ n'appartenant à aucun V_α, et en répétant l'argument on obtient une suite $(y_i)_{i<\omega}$ telle que $y_{i+1} \in y_i$ pour tout i, ce qui contredit l'axiome de fondation.

   Tout ceci est bel et bon, mais dans la démonstration ci-dessus on a utilisé l'axiome des choix dépendants ; peut-on s'en passer ? La réponse est oui : étant donné un ensemble x qui n'appartienne à aucun V_α, on

peut définir, par récurrence, $V_0 = x$ et $V_{i+1} = \bigcup V_i$ (l'ensemble dont les éléments sont les éléments de V_i) puis poser $W = \bigcup_{i<\omega} V_i$. Alors W est un ensemble transitif, qui contient x.
De plus, $\{y \in W : \exists \alpha \; y \in V_\alpha\}$ est un ensemble, par conséquent son complémentaire dans W aussi. Ce dernier doit être non vide (il existe un élément de x qui n'est contenu dans aucun V_α), donc en invoquant l'axiome de fondation on peut trouver un élément de W qui soit $\in$-minimal et n'appartienne à aucun V_α. On arrive finalement à une contradiction : si $z \in y$ alors on doit avoir $z \in W$ puisque ce dernier est transitif, par conséquent la minimalité de y impose que z doit appartenir à un V_α. Ceci étant vrai pour tout $z \in y$, on en déduit que y appartient aussi à la réunion des V_α, contradiction.

Exercice II.

1. Un ensemble totalement ordonné dénombrable peut toujours être vu comme ayant ω comme domaine. Par conséquent, il y a moins d'ensembles totalement ordonnés dénombrables, à isomorphisme près, que de relations binaires sur ω ; ces dernières sont elles-mêmes moins nombreuses que les parties de ω^2, qui sont au nombre de $2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. Il y a donc au plus $2^{\aleph_0}$ ensembles totalement ordonnés dénombrables (à isomorphisme près). On aurait aussi pu démontrer ce fait en prouvant, par va-et-vient, que tout ensemble totalement ordonné dénombrable est isomorphe à un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ muni de son ordre usuel.

   Pour voir l'inégalité réciproque, on pourrait être tenté de dire que deux ordinaux dénombrables distincts ne sont pas isomorphes ; mais il n'y a « que » $\aleph_1$ ordinaux dénombrables, par conséquent, à moins que l'hypothèse du continu ne soit vraie, on n'a pas terminé notre travail. Il nous faut construire $2^{\aleph_0}$ ensembles totalement ordonnés non dénombrables mais isomorphes, un pour chaque partie de ω. Pour cela, on peut par exemple procéder comme suit : on commence par définir l'ensemble totalement ordonné X obtenu en mettant bout à bout ω copies ordonnées B_i de $\mathbb{Q}$ et ω copies C_i de ω, ordonnées de telle façon que $B_0 < C_0 < B_1 < C_1 \ldots$. Puis on définit, pour toute partie A de ω, X_A comme le sous-ensemble obtenu en posant
$$\forall i < \omega \quad X_A \cap B_i = B_i \quad \text{et} \quad X_A \cap C_i = \begin{cases} \{0, \ldots, i\} & \text{si } i \in A \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases} .$$
   Alors chaque X_A est totalement ordonné par l'ordre induit ; de plus, il existe un élément dans X_A qui n'a pas de prédecesseur immédiat et a exactement n successeurs immédiats si, et seulement si, $n \in A$. Par conséquent, si X_A et X_B sont isomorphes alors pour tout n on a $n \in A \Leftrightarrow n \in B$, autrement dit $A = B$.
   On vient donc de montrer que l'application $A \mapsto X_A$ était telle que X_A ne soit pas isomorphe à B dès que A est différent de B ; comme il y a $2^{\aleph_0}$ parties de ω, ceci montre qu'il y a au moins $2^{\aleph_0}$ ensembles totalement ordonnés dénombrables deux à deux non isomorphes.

2. L'énoncé du DM était incorrect ; un ordre discret devrait être décrit de la façon suivante : tout élément qui ne soit pas le minimum ni le maximum doit avoir un successeur immédiat et un prédécesseur immédiat. Un modèle d'ordre discret est donc $\mathbb{Z}$. On sait qu'il y a au plus $2^{\aleph_0}$ ordres discrets dénombrables à isomorphisme près, et comme à la question précédente on doit en construire une famille de cardinal $2^{\aleph_0}$ qui soient deux à deux non isomorphes. Pour cela, on note que pour tout ensemble totalement ordonné dénombrable A l'ensemble $Y_A = A \times \mathbb{Z}$, muni de l'ordre lexicographique
$$(a, n) \leq (a', n') \Leftrightarrow (a < a' \text{ ou } a = a' \text{ et } n \leq n') .$$
   est discret, dénombrable et totalement ordonné. De plus, si l'on applique la dérivation de Hausdorff à Y_A, on identifie exactement les points qui sont dans la même copie de $\mathbb{Z}$; par conséquent, l'ensemble dérivé de Y_A est isomorphe à A. Par suite, si A et B sont non isomorphes alors Y_A et Y_B sont également non isomorphes ; puisqu'il y a $2^{\aleph_0}$ ensembles dénombrables totalement ordonnés et deux à deux non isomorphes, l'application $A \mapsto Y_A$ nous permet donc de construire $2^{\aleph_0}$ ensembles dénombrables totalement ordonnés discrets et deux à deux non isomorphes.

3. Un ensemble dénombrable bien ordonné esr isomorphe à un ordinal dénombrable unique, par conséquent il y a, à isomorphisme près, autant d'ensembles dénombrables totalement ordonnés que d'ordinaux dénombrables, c'est-à-dire autant qu'il y a d'éléments dans ω_1, soit $\aleph_1$.

4. On peut supposer que X est un ordinal α, muni de son ordre usuel. Notons que, si $f : \alpha \to \alpha$ est strictement croissante alors $(f(\alpha), <)$ est isomorphe à α. On en déduit que si X est fini il n'y a qu'un

seul endomorphisme de X. Si maintenant $X = \omega$ (pour nous fixer les idées) alors on voit que pour toute partie infinie A de ω il existe un endomorphisme de $(\omega, <)$ dont l'image est A, par conséquent il y a au moins autant d'endomorphismes de ω que de parties infinies de ω, c'est-à-dire $2^{\aleph_0}$. Comme par ailleurs un endomorphisme est une fonction de ω dans ω, et qu'il y a $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ fonctions de ω dans lui-même, on en déduit qu'il y a exactement $2^{\aleph_0}$ endomorphismes de ω dans lui-même.

Traitons maintenant le cas général : notons déjà que si $\alpha < \beta$ alors tout endomorphisme de $(\alpha, <)$ s'étend en un endomorphisme de $(\beta, <)$, par conséquent il y a plus d'endomorphismes de $(\beta, <)$ que de $(\alpha, <)$. Si l'on sait montrer que pour tout α il y a $2^{\aleph_\alpha}$ endomorphismes de $\aleph_\alpha$ dans lui-même alors on aura gagné : en effet, si β est de cardinal $\aleph_\alpha$ alors il y aura au moins $2^{\aleph_\alpha}$ endomorphismes de β dans lui-même, et il y en a au plus $|\beta|^{|\beta} = 2^{\aleph_\alpha}$. Comme dans le cas de ω, il y a exactement autant d'endomorphismes de $\aleph_\alpha$ que de parties de $\aleph_\alpha$ de cardinal $\aleph_\alpha$.

Finalement, on doit montrer, pour $\alpha > 1$, qu'il y a au moins $2^{\aleph_\alpha}$ endomorphismes de $\aleph_\alpha$. Etant donnée une fonction $f \colon \aleph_\alpha \to \{0, 1\}$, on peut définir une fonction $\tilde{f} \colon \aleph_\alpha \to ON$ par récurrence transfinie, en posant :

- $\tilde{f}(0) = f(0)$;
- $\tilde{f}(\beta + 1) = \tilde{f}(\beta) + f(\beta) + 1$;
- Si β est limite alors $\tilde{f}(\beta) = \sup\{\tilde{f}(\delta) \colon \delta < \beta\} + f(\beta)$.

Cette fonction $\tilde{f}$ est strictement croissante, de plus on vérifie facilement que pour tout $\beta < \aleph_\alpha$ on a $\tilde{f}(\beta) < \beta + \omega$. Par conséquent $\tilde{f}$ est à valeurs dans $\aleph_\alpha$: en effet, pour tout $\beta < \aleph_\alpha$ on a

$$|\beta + \omega| \leq |\beta| + \aleph_0 = \max(|\beta|, \aleph_0) < \aleph_\alpha \text{ , donc aussi } \beta + \omega < \aleph_\alpha \text{ .}$$

Autrement dit, $\tilde{f}$ est un endomorphisme de $\aleph_\alpha$; pour conclure, il nous suffit de remarquer que par construction $f \mapsto \tilde{f}$ est injective.