Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2009/2010
Master 1 — Introduction à la Logique

Théorie des ensembles
DM 2.

Exercice I. On définit une hiérarchie d'ensembles (V_α) indexée par les ordinaux en posant :

- $V_0 = \emptyset$;
- $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$;
- Si α est limite, $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$.

1. Montrer que V_α est un ensemble transitif pour tout α.
2. Montrer que $\beta < \alpha$ ssi $V_\beta \in V_\alpha$, et que $\beta \leq \alpha$ ssi $V_\beta \subseteq V_\alpha$.
3. Si x est un ensemble, on définit son *rang* $rg(x)$ en posant

$$rg(x) = \begin{cases} \text{le plus petit } \gamma \text{ tel que } x \in V_{\gamma+1} \text{ si un tel } \gamma \text{ existe.} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

   Montrer que $rg(\alpha) = \alpha$ pour tout ordinal α.
4. Montrer que l'axiome de fondation est équivalent à l'énoncé suivant : pour tout ensemble x, il existe un ordinal γ tel que $x \in V_\gamma$.

Exercice II.

1. Montrer que, à isomorphisme près, il existe $2^{\aleph_0}$ ensembles totalement ordonnés dénombrables.
2. Un ordre total $<$ sur l'ensemble X est *discret* si pour toute paire $x < y$ dans X il existe $x', y' \in X$ tels que $x < x' \leq y' < y$ et pour tout $x'', y'' \in X$ on ait $x < x'' \Rightarrow x' \leq x''$ et $y'' < y \Rightarrow y'' \leq y'$.
   Montrer qu'à isomorphisme près il existe $2^{\aleph_0}$ ensembles dénombrables totalement ordonnés discrets.
3. Que deviennent les résultats des deux questions précédentes si l'on considère cette fois les ensembles dénombrables *bien ordonnés* (toujours à isomorphisme près) ?
4. Soit $(X, <)$ un ensemble bien ordonné. Déterminer le cardinal de l'ensemble des endomorphismes de X (i.e les fonctions de X dans X qui préservent $<$).