Université Claude Bernard Lyon I
Master 1

2nd semestre 2009/2010
Introduction à la logique mathématique

DM 3, à rendre le 25 mars 2010

Exercice 1
Dans cet exercice, on fixe un ensemble X infini, de cardinal κ, et on se propose de démontrer[1] le *théorème de Hausdorff* : il y a 2^{2^κ} ultrafiltres distincts sur X.
On dit qu'une famille $\mathcal{A}$ de parties de X est *libre* si elle vérifie la propriété suivante : si $A_1, \ldots, A_m$, $B_1, \ldots, B_m$ sont des éléments deux à deux distincts de $\mathcal{A}$, alors

$$A_1 \cap \ldots \cap A_m \cap (X \setminus B_1) \cap \ldots \cap (X \setminus B_m) \neq \emptyset \ .$$

1. Montrer que le théorème de Hausdorff est une conséquence de l'énoncé suivant : « il existe une famille libre de parties de X qui soit de cardinal 2^κ ».
2. On considère l'ensemble Y formé des couples $(F, (P_1, \ldots, P_n))$ avec F une partie finie de X et $P_1, \ldots, P_n$ une suite finie de parties de F. Calculer le cardinal de Y.
3. A toute partie A de X, on associe une partie A' de $X \sqcup Y$ de la façon suivante :
$$\begin{cases} X \cap A' = A \\ \forall y = (F, (P_1, \ldots, P_n)) \in Y \ (y \in A') \Leftrightarrow (\exists i \, A \cap F = P_i) \end{cases} .$$
Montrer que la famille $\{A' \colon A \subseteq X\}$ est une famille libre de parties de $X \sqcup Y$.
4. Conclure.

Exercice 2
Soit $(A_j)_{j \in J}$ une famille infinie d'anneaux et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur J. On définit $\mathcal{I} \subseteq \prod_{j \in J} A_j$ par

$$\mathcal{I} = \left\{ (a_j) \in \prod_{j \in J} A_j \colon \ \{j \in J \colon a_j = 0_{A_j}\} \in \mathcal{U} \right\} .$$

1. Montrer que $\mathcal{I}$ est un idéal bilatère de l'anneau $A = \prod_{j \in J} A_j$. On appelle *ultraproduit* des anneaux A_j selon l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ l'anneau quotient $A/\mathcal{I}$. Notons B cet ultraproduit.
2. Que peut-on dire de B si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre principal ? Pour la suite on supposera que $\mathcal{U}$ n'est pas principal.
3. Soit n un entier. Montrer que si $\{j \in J \colon |A_j| \geq n\} \in \mathcal{U}$ alors $|B| \geq n$.
4. En déduire que si pour chaque entier n, il y a au plus un nombre fini d'anneaux A_j de cardinal plus petit que n, alors B est infini.
5. Montrer que si les A_j sont tous des corps commutatifs alors B est un corps commutatif.
6. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et $\mathcal{U}_1$ un ultrafiltre non principal sur $\mathcal{P}$. Soit K_1 l'ultraproduit selon $\mathcal{U}_1$ des corps finis $\mathbb{F}_p$ pour p parcourant $\mathcal{P}$. Montrer que K_1 est de caractéristique nulle.
7. (Question facultative) Soit $\mathcal{U}_2$ un ultrafiltre non principal sur ω et p un nombre premier. Soit K_2 l'ultraproduit selon $\mathcal{U}_2$ des corps finis $\mathbb{F}_{p^n}$ pour n parcourant ω. On rappelle que $\mathbb{F}_{p^n}$ est l'unique corps fini de cardinal p^n (à isomorphisme près) et que tout élément x de $\mathbb{F}_{p^n}$ vérifie l'équation algébrique $x^{p^n} = x$. Vérifier que K_2 est de caractéristique p, puis montrer que K_2 est parfait (c.à.d. pour tout élément $x \in K_2$, il existe $y \in K_2$ tel que $x = y^p$). Montrer que tout polynôme de $\mathbb{F}_p[X]$ est scindé sur K_2.

[1] avec l'axiome du choix, bien sûr