DM 4 à rendre le 22 avril 2010

Exercice 1 Deux théories T_1 et T_2, dans un même langage, sont dites *compagnes* l'une de l'autre si tout modèle de l'une peut se plonger dans un modèle de l'autre et vice versa.

1. (a) Soit T_1, T_2 deux théories compagnes l'une de l'autre. Montrer qu'elles ont mêmes conséquences universelles[1].

   (b) Soit T_1, T_2 deux théories telles que toute conséquence universelle de T_2 est également conséquence de T_1. Soit $\mathcal{M}$ un modèle de T_1. Après avoir nommé chaque élément de M par un nouveau symbole de constante, montrer par un argument de compacité que l'ensemble d'énoncés suivant est consistant :

   $$T_2 \cup \{\phi(\bar{m}) : \mathcal{M} \models \phi(\bar{m}), \phi \text{ formule sans quantificateurs}\}.$$

   En déduire que tout modèle de T_1 se plonge dans un modèle de T_2.

   (c) Conclure que deux théories sont compagnes l'une de l'autre si et seulement si elles ont même conséquences universelles.

2. (a) Montrer que les groupes $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ et $\langle \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, 0, + \rangle$ ne sont pas élémentairement équivalents. (On pourra par exemple comparer les indices des sous-groupes $2\mathbb{Z}$ et $2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ dans les groupes respectifs.)

   (b) Montrer que tout énoncé universel vrai dans $\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ est vrai dans $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$.

   (c) Montrer par un argument de compacité qu'il existe une extension élémentaire G du groupe $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ contenant deux éléments non nuls a et b tels que les sous-groupes engendrés par a et b sont d'intersection triviale.

   (d) Montrer que $\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ se plonge dans G.

   (e) En déduire que les structures $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ et $\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ satisfont les mêmes énoncés universels. (Leurs théories sont donc compagnes l'une de l'autre.)

[1] Un formule est dite universelle si elle est de la forme $\forall x_1 \dots x_n \phi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$ avec $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ sans quantificateurs. Une conséquence universelle d'une théorie T est un énoncé universel θ tel que $T \vdash \theta$.

Exercice 2 Le but de cet exercice est de donner une démonstration modèle-théorique du théorème suivant :

Théorème (Ax 1969)[2] **:** *Soit f une application polynômiale*[3] *de $\mathbb{C}^m$ dans $\mathbb{C}^m$ $(m > 0)$. Si f est injective alors f est surjective.*

Par la suite, toutes les structures considérées seront des structures sur le langage des anneaux $L = \{0, 1, +, -, \cdot\}$. Soit θ un énoncé dans ce langage.

1. Montrer que si θ est satisfait par tout corps algébriquement clos de caractéristique 0 alors il existe un entier $k > 0$ tel que θ est satisfait par tout corps algébriquement clos de caractéristique supérieure à k.
2. Vérifier que la réciproque est également vraie[4].
3. Soit A un anneau commutatif et $m > 0$. Montrer que la propriété $\mathcal{P}_m$,

   "toute application polynomiale de A^m dans A^m qui est injective est surjective",

   s'exprime par une famille d'énoncés de L.
4. Que peut-on dire si A est un anneau fini ?
5. Soit p un nombre premier. On rappelle (ou on admettra) que le corps fini $\mathbb{F}_p(= \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ admet à isomorphisme près une unique clôture algébrique $\tilde{\mathbb{F}}_p$ et que

$$\tilde{\mathbb{F}}_p = \bigcup_{n>0} \mathbb{F}_{p^n}$$

   où $\mathbb{F}_{p^m} := \{x \in \mathbb{F}_p \colon x^{p^n} = x\}$ est l'unique sous-corps de cardinal p^n de $\tilde{\mathbb{F}}_p$.
   Montrer que $\tilde{\mathbb{F}}_p$ satisfait la propriété $\mathcal{P}_m$ pour tout $m > 0$.
6. En déduire que tout corps algébriquement clos satisfait la propriété $\mathcal{P}_m$ pour tout $m > 0$.

---

[2]Ax a en fait montré plus généralement que tout endomorphisme injectif d'une variété algébrique est surjective.

[3]Si A est un anneau commutatif, une fonction polynômiale f de A^m dans A^m est une fonction de la forme

$$f(a_1, \ldots, a_m) = (P_1(a_1, \ldots, a_m), \ldots, P_m(a_1, \ldots, a_m))$$

où $P_1, \ldots, P_m \in A[X_1, \ldots, X_m]$

[4]Vous venez de vérifier ainsi un théorème de transfert entre la classe des corps algébriquement clos de caractéristique nulle et celle des corps algébriquement clos de caractéristique strictement positive.