Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2009/2010
Master 1 — Introduction à la logique mathématique

Théorie des ensembles
Feuille 1.

Exercice 1 (Quelques propriétés élémentaires sur les ordinaux.)

1. Montrer que l'intersection d'un ensemble X d'ordinaux est le plus petit élément de X.
2. Montrer que tout ensemble non vide d'ordinaux admet une borne supérieure (la décrire).
3. Montrer qu'un ordinal α est un entier naturel (i.e. un ordinal fini) si, et seulement si, tout sous-ensemble non vide de α a un plus grand élément.
4. Montrer qu'un ordinal α est limite si et seulement si $\alpha = \sup\{\beta : \beta \in \alpha\}$.
5. Soit $(I, \leq)$ un ordre total et $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles bien ordonnés telle que pour tout $i < j$, X_i est un segment initial de X_j. Soit $X = \cup_{i\in I} X_i$. Montrer qu'il existe une unique façon d'ordonner X telle que chaque X_i soit un segment initial de X. Soit la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ d'ordinaux tel que pour chaque i, X_i est isomorphe à λ_i. Montrer que X est isomorphe à la borne supérieure de $\{\lambda_i : i \in I\}$.
6. Montrer que si A est une partie d'un ordinal α, alors la relation d'appartenance définit sur A une relation de bon ordre, qui est isomorphe à un ordinal plus inférieur ou égal à α.
7. En déduire que si A et B sont deux ensembles bien ordonnés tel que A se plonge dans B (i.e. il existe une injection croissante de A dans B) alors $A \preceq B$.

Exercice 2 (Somme ordinale)

Rappelons la définition par récurrence transfinie de la somme de deux ordinaux α et β :

$$\alpha + \beta = \begin{cases} \alpha & \text{si } \beta = 0 \\ S(\alpha+\gamma) & \text{si } \beta = S(\gamma) \\ \sup\left(\{\alpha+\xi \colon \xi < \beta\}\right) & \text{si } \beta \text{ est limite} \end{cases}$$

Nous allons maintenant décrire une opération sur les bons ordres qui est équivalente :

1. Soient A et B deux ensembles bien ordonnés. Montrer que l'on peut supposer qu'ils sont disjoints.
2. On suppose maintenant$A \cap B = \emptyset$ et on considère $X = A \cup B$. Montrer que l'on peut définir de manière unique un bon ordre sur X prolongeant celui de A et celui de B (i.e. tel que l'ordre de X induise ceux de A et de B) et tel que A soit un segment initial de X.
3. Montrer que si A et B sont respectivement isomorphes aux ordinaux α et β alors X est isomorphe à $\alpha + \beta$.
4. En déduire les propriétés suivantes de l'addition ordinale :
   (a) associativité ;
   (b) non commutativité ;
   (c) monotonie stricte à droite, i.e $\beta < \beta' \Rightarrow \alpha + \beta < \alpha + \beta'$;
   (d) régularité à gauche, i.e $\alpha + \beta = \alpha + \beta' \Rightarrow \beta = \beta'$;
   (e) non monotonie stricte à gauche et non régularité à droite ;

(f) $\alpha \leq \alpha' \Rightarrow \alpha + \beta \leq \alpha' + \beta$.

Exercice 3 (Multiplication ordinale)
Rappelons la définition par récurrence transfinie du produit de deux ordinaux α et β :

$$\alpha.\beta = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta = 0 \\ (\alpha.\gamma) + \alpha & \text{si } \beta = \gamma + 1 \\ \sup\left(\{\alpha.\xi \colon \xi < \beta\}\right) & \text{si } \beta \text{ est limite} \end{cases}$$

Soient deux ordinaux α et β, nous allons définir un bon ordre sur l'ensemble $\alpha \times \beta$ qui sera isomorphe à l'ordinal $\alpha.\beta$:

1. On munit $\alpha \times \beta$ de l'ordre (anti-)lexicographique suivant

$$(\gamma_1, \delta_1) < (\gamma_2, \delta_2) \text{ ssi } \delta_1 < \delta_2 \text{ ou } (\delta_1 = \delta_2 \ \& \ \gamma_1 < \gamma_2).$$

   Montrer que cela définit un bon ordre sur $\alpha \times \beta$.
2. Montrer que ce bon ordre est isomorphe à l'ordinal $\alpha.\beta$.
3. En déduire les propriétés suivantes de la multiplication ordinale :
   (a) associativité ;
   (b) non commutativité ;
   (c) si $\alpha > 0$ et $\beta < \gamma$ alors $\alpha.\beta < \alpha.\gamma$;
   (d) si $\alpha \leq \beta$ alors $\alpha.\gamma \leq \beta.\gamma$;
   (e) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha.\beta + \alpha.\gamma$;

Exercice 4 (Soustraction et division euclidienne sur les ordinaux)

1. Montrer que l'on peut définir une opération $\ominus$ sur les ordinaux telle que pour tous les ordinaux α, β on ait :
   - $\alpha \ominus \beta = 0$ si $\alpha < \beta$
   - $\beta + (\alpha \ominus \beta) = \alpha$ si $\alpha \geq \beta$.

   Donner un exemple d'ordinaux $\alpha > \beta$ tels qu'il n'existe pas d'ordinal γ tel que $\gamma + \beta = \alpha$.
2. Soient α et β deux ordinaux avec $\beta \neq 0$. Montrer qu'il existe un unique couple d'ordinaux (γ, δ) tel que $\alpha = \beta.\gamma + \delta$ et $\delta < \beta$.
   (Indication : on pourra d'abord montrer qu'il existe γ' tel que $\alpha < \beta.\gamma'$ et que le plus petit tel γ' est successeur).

Exercice 5 (Puissance ordinale)
Rappelons la définition par récurrence transfinie de $\alpha > 0$ à la puissance β :

$$\alpha^\beta = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta = 0 \\ \alpha^\gamma.\alpha & \text{si } \beta = \gamma + 1 \\ \sup\left(\left\{\alpha^\xi \colon \xi < \beta\right\}\right) & \text{si } \beta \text{ est limite} \end{cases}$$

1. Vérifiez les propriétés suivantes pour $\alpha > 0$, β et γ trois ordinaux :
   – si $\alpha > 1$ et $\beta > \gamma$ alors $\alpha^\beta > \alpha^\gamma$;
   – $\alpha^\beta.\alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$;
   – $\left(\alpha^\beta\right)^\gamma = \alpha^{\beta.\gamma}$.

2. Montrer que si α et β sont dénombrables alors α^β est aussi dénombrable [1]
3. Prouver qu'il existe un ordinal dénombrable ξ tel que $\xi = \omega^\xi$. Existe-t-il un ordinal tel que $\xi = \xi^\omega$?

Exercice 6 (La dérivation de Hausdorff)
Soit $(X, \leq)$ un ensemble totalement ordonné.

1. Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur X compatible avec l'ordre $\leq$, c'est-à-dire tel que $\leq$ passe au quotient. Expliciter cette propriété. On définit alors $D(\sim)$ la relation sur X obtenue en posant

$$xD(\sim)y \Leftrightarrow \text{ il y a un nombre fini de } \sim\text{-classes entre celle de } x \text{ et celle de } y.$$

2. Montrer que $D(\sim)$ est une relation d'équivalence qui étend $\sim$ et qui est toujours compatible avec $\leq$.
3. Expliciter une construction par récurrence transfinie qui, partant de la relation triviale $\sim_0$ (c'est-à-dire $x \sim_0 y$ ssi $x = y$), permette de répéter l'opération D et ainsi de définir, pour tout ordinal α une relation d'équivalence $\sim_\alpha$ compatible avec $\leq$.
4. Que peut-on dire si on applique cette construction à $\mathbb{N}$, à $\mathbb{Q}$ ou à $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ muni de l'ordre lexicographique ?
5. Montrer que pour tout ordinal α, la relation $\sim_\alpha$ est grossière sur la puissance ordinale ω^α.

Exercice 7 (Développement de Cantor)
Le développement de Cantor d'un ordinal est son développement en base ω. Il s'agit ici de vérifier qu'un tel développement existe, c'est-à-dire de montrer que tout ordinal α non nul s'écrit de manière unique sous la forme

$$\alpha = \omega^{\alpha_1}.n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_m}.n_m,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ sont des ordinaux tels que $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots \alpha_m$ et $n_1, n_2, ..., n_m$ des entiers non nuls.

1. Montrer que pour tout α, $\omega^\alpha \geq \alpha$.
2. Montrer que pour tout α, il existe un unique couple (α_1, n_1) tel que

$$\omega^{\alpha_1}.n_1 \leq \alpha < \omega^{\alpha_1}.(n_1 + 1).$$

3. En déduire qu'il existe un unique $\beta_1 < \omega^{\alpha_1}$ tel que $\alpha = \omega^{\alpha_1}.n_1 + \beta_1$.
4. En itérant le procédé (ou de manière équivalente par induction), montrer l'existence du développement de Cantor.
5. Vérifier l'unicité.
6. Donner un critère de comparaison de deux ordinaux α et β connaissant leurs développements de Cantor.
7. Montrer que les ordinaux de la forme ω^α sont les ordinaux β tels que, pour tout $\gamma < \beta$, $\gamma + \beta = \beta$.
8. En déduire le développement de Cantor de $\alpha + \beta$ connaissant les développements de Cantor de α et β. (On donnera des exemples).
9. En utilisant les développements de Cantor, définir une nouvelle fonction somme, notée $\oplus$, sur les ordinaux qui soit commutative, associative et simplifiable (ou régulière, i.e. si $\alpha \oplus \beta = \alpha \oplus \gamma$ alors $\beta = \gamma$).

---

[1] en particulier, α^β ne correspond PAS à l'ensemble des fonctions de β dans α : ça, c'est le produit de *cardinaux*.