Théorie des ensembles
Feuille 2.

Exercice 1. Montrer qu'il existe un ordinal α tel que $\alpha = \aleph_\alpha$.

Exercice 2. Une *fonction de choix* sur un ensemble A est une application $\varphi\colon \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ telle que pour tout $X \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ on ait $\varphi(X) \in X$. Montrer qu'alors les trois énoncés suivants sont équivalents :
(a) Pour tout ensemble A non vide il existe au moins une fonction de choix sur A.
(b) Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles non vides alors $\Pi_{i\in I} A_i$ est non vide.
(c) Pour tous les ensembles X, Y et toute application surjective $g\colon X \to Y$, il existe une application $h\colon Y \to X$ telle que $g \circ h$ soit l'application identique de Y dans Y.

Exercice 3. Soit $(A, <)$ un ensemble totalement ordonné. Prouver l'équivalence suivante : $<$ est un bon ordre sur A si, et seulement si, il n'existe pas de suite $(a_n)_{n\geq 0} \in A^{\mathbb{N}}$ strictement décroissante pour $<$. Avez-vous utilisé l'axiome du choix ?

Exercice 4. Donner une démonstration des deux résultats classiques d'analyse suivants :
(a) Soit X un espace métrique et F une partie de X. Alors F est fermé si, et seulement si, toute suite convergente d'éléments de F a sa limite dans F.
(b) Soit X un espace métrique et $f\colon X \to \mathbb{R}$ (muni de sa topologie usuelle). Alors f est continue (i.e l'image réciproque par f d'un fermé de $\mathbb{R}$ est un fermé de X) si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in X$ on a $\lim f(x_n) = f(x)$.
Que pensez-vous de vos démonstrations ? Pourriez-vous convaincre quelqu'un qui ne croit pas à l'axiome du choix que les résultats sont corrects ? Avez-vous vraiment besoin de l'axiome du choix ou d'une version plus faible (si oui, en donner un énoncé ; on ne demande pas de prouver que cet énoncé est *vraiment* plus faible que l'axiome du choix...) ?

Exercice 5.

1. Trouver des suites de cardinaux (κ_i) et (λ_i) telles que $\kappa_i < \lambda_i$ pour tout i mais $\sum \kappa_i = \sum \lambda_i$.
2. Trouver une suite de cardinaux non nuls (κ_i) (avec I infini) telle que $\sum \kappa_i = \prod \kappa_i$.
3. Calculer $\displaystyle\prod_{i=1}^{+\infty} i$ (comme produit de *cardinaux*).

Exercice 6.

1. Soit κ un cardinal infini. Montrer que $\kappa^\kappa = 2^\kappa$.
2. Montrer que $\displaystyle\prod_{n\in\omega} \aleph_n = \aleph_\omega^{\aleph_0}$.

Exercice 7. On rappelle que la *cofinalité* d'un ordinal α est définie comme le plus petit ordinal β pour lequel il existe une fonction $f\colon \beta \to \alpha$ strictement croissante et d'image non majorée dans α. On dit qu'un cardinal est *régulier* si pour toute partie $X \subseteq \kappa$ de cardinal strictement inférieur à κ on a $\sup(X) < \kappa$.

1. Montrer que $\mathrm{cof}(\alpha)$ est le plus petit ordinal γ tel qu'il existe une fonction $f\colon \gamma \to \alpha$ dont l'image ne soit pas strictement majorée.
2. Montrer que, pour tout ordinal α, $\mathrm{cof}(\alpha)$ est un cardinal.
3. Montrer que $\mathrm{cof}(\mathrm{cof}(\alpha)) = \mathrm{cof}(\alpha)$ pour tout ordinal α.
4. Montrer qu'un cardinal λ infini est régulier si et seulement si $\mathrm{cof}(\lambda) = \lambda$.

Exercice 8.

1. Montrer qu'un cardinal κ est régulier si, et seulement si, pour tout $\lambda < \kappa$ et toute famille $(X_\alpha)_{\alpha\in\lambda}$ d'ensembles tels que $|X_\alpha| < \kappa$ pour tout $\alpha < \lambda$, on a $|\cup X_\alpha| < \kappa$.
2. Soit κ un cardinal ; montrer que $\mathrm{cof}(\kappa)$ est le plus petit ordinal γ tel que α soit la réunion de γ ensembles de cardinal strictement inférieur à κ.
3. On appelle *faiblement inaccessible* un cardinal non dénombrable à la fois limite et régulier. Montrer qu'un tel cardinal α doit vérifier $\alpha = \aleph_\alpha$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 9.

1. Soit κ un cardinal infini et $\lambda < \mathrm{cof}(\kappa)$. Montrer que toute fonction croissante $f\colon \kappa \to \lambda$ est éventuellement constante.
2. Soit κ un cardinal infini et λ un cardinal non nul. Montrer que $(\kappa^+)^\lambda = \kappa^+.\kappa^\lambda$
3. Soit n un entier et λ un cardinal non nul. Montrer que $\aleph_n^\lambda = \aleph_n.2^\lambda$.