Théorie des modèles
Feuille 5.

On appelle *n-type* d'une théorie complète T tout type d'un n-uple dans un modèle de T. On note l'ensemble des n-types de T,

$$S_n(T) := \{\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a})\colon \mathcal{M} \models T,\ \bar{a} \in M^n\}.$$

Un type $p \in S_n(T)$ est dit *réalisé* dans $\mathcal{M}$ s'il existe un n-uple $\bar{a}$ de M tel que $p = \mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a})$.

Exercice 1

1. Pourquoi la théorie des relations d'équivalence ayant une infinité de classes toutes infinies est-elle complète ?
2. Montrer que cette théorie élimine les quantificateurs.
3. Combien cette théorie a-t-elle de 1-types, de 2-types, de 3-types ?

Exercice 2 Soit $L = \{P_i : i \in \omega\}$ où les P_i sont des relations unaires. Soit T la théorie dans le langage L qui dit que les P_i sont deux à deux disjoints et que chaque P_i est infini. On a vu dans la feuille 4 que T est complète. En vous inspirant de la preuve de la complétude, montrer que T élimine les quantificateurs. Décrire $S_1(T)$. Est-ce que tous les types de $S_1(T)$ sont réalisés dans chacun des modèles de T ?

Exercice 3 Soit $\mathcal{M}$ une L-structure, $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ et $p \in S_n(T)$. Supposons qu'il existe $k > 0$, tel que pour chaque extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$, il y a au plus k réalisations de p dans $\mathcal{N}$ (un tel type est dit algébrique). Montrer qu'alors toute réalisation de p dans une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ est en fait dans $\mathcal{M}$. Indication : montrer qu'il existe une formule dans p qui n'est satisfaite que par un nombre fini m d'éléments. Choisir une telle formule ϕ avec m minimal et montrer que ϕ isole p, c'est-à-dire que p est l'unique type de $S_n(T)$ contenant ϕ.

Exercice 4

1. Donner une axiomatisation de la théorie T des ordres totaux discrets sans extrémités dans le langage $\{<\}$.
2. Combien T a-t-elle de modèles dénombrables ?
3. Montrer que T n'élimine pas les quantificateurs.
4. On considère le langage $L = \{<, S\}$ où S est une fonction unaire et dans ce langage, la théorie $T' = T \cup \{\forall x\ x < S(x) \wedge \neg\exists y(x < y < S(x))$. Montrer que T' est complète et élimine les quantificateurs.
5. En déduire que T est également complète et décrire les n-types de T.
6. Une théorie est dite *modèle-complète* si pour tous modèles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de cette théorie, si $\mathcal{M}$ est sous-structure de $\mathcal{N}$ alors $\mathcal{M}$ est sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$. Montrer que T' est modèle-complète mais que T ne l'est pas.

Types sur des paramètres. Soit $\mathcal{M}$ une L-structure, $A \subset \mathcal{M}$ un ensemble de paramètres et $\bar{a}$ un uple de $\mathcal{M}$. Le type de $\bar{a}$ sur A (dans $\mathcal{M}$) est l'ensemble

$$\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}/A) := \{\phi(\bar{x}) \in L(A) : \mathcal{M} \models \phi(\bar{a})\}.$$

Exercice 5 Dans cet exercice on considère le langage $L = \{<\}$, où $<$ est une relation binaire, et la L-structure $(\mathbb{Q}, <)$, où $<$ est l'ordre usuel sur les rationnels.

1. On définit
$$A = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{2 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} \ .$$
Montrer que $\mathrm{tp}_{(\mathbb{Q},<)}(1/A) = \mathrm{tp}_{(\mathbb{Q},<)}(2/A)$, mais qu'il n'existe pas d'automorphisme de $\mathbb{Q}$ qui fixe A et envoie 1 sur 2.
2. Soit r un nombre réel irrationnel. On considère deux suites adjacentes (a_i) et (b_i) dans $\mathbb{Q}$ tendant vers r. Montrer que $(\mathbb{Q}, <)$ a une extension élémentaire $\mathcal{Q}$ dans laquelle le type déterminé par
$$\{a_i < x | i < \omega\} \cup \{x < b_i | i < \omega\}$$
est réalisé par une infinité d'éléments.
Soit maintenant $c_1, \ldots, c_k, a$ des réalisations de ce type dans $\mathcal{Q}$ et $\phi(x, c_1, \ldots, c_k, d_1, \ldots, d_l)$ une formule satisfaite par a dans $\mathcal{Q}$ avec les d_j dans $\mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe $c'_1, \ldots, c'_k \in \mathbb{Q}$ tels que
$$\mathcal{Q} \models \phi(a, c'_1, \ldots, c'_k, d_1, \ldots, d_l)$$

Exercice 6 On considère la théorie vue dans l'exercice 7 de la feuille 4.

1. Montrer que cette théorie élimine les quantificateurs.
2. Combien y-a-t-il de 1-types sur l'univers du modèle $\mathcal{M}_0$?
3. Soit A une partie finie de $\mathcal{M}_0$. Combien y-a-t-il de 1-types sur A ?

Exercice 7 Soit T une théorie complète, $\mathcal{M}$ un modèle de T et $a, b \in M$. Montrer que $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a, b)$ est uniquement déterminé par $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a)$ et $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(b/a)$.