Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2009/2010
Master 1 — Introduction à la logique mathématique

Théorie des modèles
Feuille 6.

Exercice 1 Parmi les structures de corps $\mathbb{Q}$, $\bar{\mathbb{Q}}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ (dans le langage $L = \{0, 1, +, \cdot, -, ^{-1}\}$) quelles sont celles qui sont ω-saturées ?

Exercice 2 Soient $\mathcal{M}$ une structure ω-saturée, $\mathcal{N}$ une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ et $(n_i)_{i\in\omega}$ une famille d'éléments de N. Montrer qu'il existe une famille $(m_i)_{i\in\omega}$ d'éléments de M tel que pour tout $k \in \omega$, $(m_0, ..., m_k)$ et $(n_0, ..., n_k)$ ont même type.

Exercice 3 Montrer qu'une théorie complète élimine les quantificateurs si et seulement si tout isomorphisme local[1] entre deux modèles ω-saturés de T est un ∞-isomorphisme.

Exercice 4 Soit κ un cardinal fortement inaccessible. Montrer que toute théorie complète sur un langage de cardinalité strictement inférieur à κ, qui a des modèles infinis, a un modèle κ-saturé de cardinal κ.

Exercice 5 Soit le langage $L = \{<, c_i : i \in \mathbb{N}\}$ où $<$ est une relation binaire et les c_i sont des constantes. Soit T la théorie des ordres totaux denses sans extrémité telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $c_i < c_{i+1}$.

1. Soit $\mathcal{M}$ un modèle ω-saturé de T. Montrer que l'ensemble A des éléments majorants tous les c_i n'a pas de plus petit élément.
2. Montrer que tout isomorphisme local entre deux modèles ω-saturés de T est un ∞-isomorphisme.
3. En déduire que T est complète et élimine les quanteurs.
4. Construire un modèle dénombrable de T qui contient un plus petit majorant de la suite (c_i).
5. Montrer que T a exactement trois modèles dénombrables non isomorphes.
6. Montrer qu'il y a deux des modèles dénombrables non isomorphes qui se plongent l'un dans l'autre et vice versa.

[1] un isomorphisme local est un isomorphisme partiel de domaine finiment engendré.