Introduction à la théorie descriptive des ensembles

Texte rédigé dans le but de fournir une introduction accessible à la théorie descriptive des ensembles, dans la mesure où la situation politique actuelle permettrait d'entretenir un espoir de cette nature

Avant-propos.

Ce document est destiné à accompagner un cours d'école doctorale donné à Lyon au semestre de printemps 2009. Ce cours étant perturbé par une grève d'une durée inédite, j'ai décidé de mettre les notes de cours en ligne dès à présent. Elles ne sont pas encore finalisées ; en particulier la bibliographie est très incomplète, et il est fort probable que le lecteur attentif trouvera bon nombre d'erreurs plus ou moins graves. Si vous ne parvenez pas à résoudre un exercice, prenez en considération l'éventualité que son énoncé soit faux.

Notons enfin que la théorie descriptive des ensembles, tout au moins ce qui en est présenté ici, n'a pas d'application pratiques ; par suite le lecteur respectueux de la Stratégie Nationale de Recherche et d'Innovation, et/ou désireux d'obtenir de bons contrats de financement, ferait sans doute mieux de ne pas s'y intéresser.

Table des matières

Chapitre 1

Ordinaux, Cardinaux, Axiome du Choix

Ce cours traitera de théorie descriptive des ensembles, qui est une forme de "combinatoire infinie" ; avant de pouvoir faire de la combinatoire, il faut déjà apprendre à compter. On va donc discuter quelques notions élémentaires de théorie des ensembles avant de s'attaquer au sujet du cours proprement dit. Je n'essaierai pas de présenter le formalisme général de la théorie des ensembles ; on va se placer dans le cadre général de la théorie dite de Zermelo-Fraenkel (ZF), dont on ne sortira pas dans ce cours. Il est très vraisemblable qu'il s'agisse du cadre axiomatique que vous avez toujours utilisé, même sans le savoir, pour faire des mathématiques.

Il est facile de compter le nombre d'éléments d'un ensemble fini : on énumère les éléments, et on s'arrête quand il n'y en a plus. On associe ainsi à chaque ensemble fini un entier, qui est son nombre d'éléments. Mais comment faire quand on considère un ensemble infini ? Il n'est pas clair qu'on puisse l'énumérer ; plutôt que de considérer tous les ensembles, on va considérer des ensembles munis d'un ordre permettant une énumération.

1.1 Bons ordres et ordinaux

Définition 1.1. Soit X un ensemble. Un *bon ordre* sur X est une relation d'ordre $\leq$ sur X tel que tout sous-ensemble non vide de X a un plus petit élément.
On dit que $S \subseteq X$ est un *segment initial* si

$$\forall x, y \in X \ \ (y \in S \text{ et } x \leq y) \Rightarrow (x \in S) \ .$$

Si $x \in X$ on notera S_x le segment initial $\{y \in S \colon y < x\}$.

L'idée, dans notre optique de comptage, est que pour énumérer un ensemble bien ordonné, on commence au plus petit élément, puis on prend le plus petit des autres, etc. ; mais s'arrête-t-on un jour ?

L'essentiel de la théorie des ensemble bien ordonnés est fondé sur le résultat suivant :

Proposition 1.2. *Soit $(X, \leq)$ un ensemble bien ordonné et $f \colon X \to X$ une application strictement croissante. Alors pour tout $x \in X$ on a $f(x) \geq x$.*

Preuve.
Supposons qu'il existe $x \in X$ tel que $f(x) < x$, et appelons x_0 le plus petit élément ayant cette propriété. Alors on a, pour tout $x < x_0$, $f(x) \geq x$.
Puisque f est strictement croissante, on en déduit que pour tout $x < x_0$ on a $f(x_0) > x$.
Comme l'ordre $\leq$ est total, cela implique en particulier que $f(x_0) \geq x_0$, ce qui contredit la définition de x_0. □

Ceci permet d'obtenir un résultat de rigidité des ensembles bien ordonnés.

Proposition 1.3. *Soit $(X, \leq)$ un ensemble bien ordonné, $W \subseteq X$ un segment initial et $f \colon X \to W$ un isomorphisme. Alors $W = X$ et pour tout $x \in X$ on a $f(x) = x$.*
Par conséquent, si deux segments initiaux de X sont isomorphes alors ils sont égaux.

Preuve.
Montrons tout d'abord que $W = X$. Pour cela, prenons $x \in X$. On a $f(x) \in W$, et $f(x) \geq x$ d'après la proposition précédente. Comme W est un segment initial, on en déduit que $W = X$.
Pour conclure, il suffit de remarquer qu'alors f est une bijection, dont l'inverse f^{-1} est un isomorphisme de $(X, \leq)$ sur $(X, \leq)$. Par conséquent on a $f^{-1}(x) \geq x$ pour tout x, ce qui en composant par f donne $x \geq f(x)$ et donc $f(x) = x$ pour tout $x \in X$. □

Notation. Si X, X' sont deux ensembles bien ordonnés, on note $X \preceq X'$ si X est isomorphe à un segment initial de X', et $X \sim X'$ si X et X' sont isomorphes. On utilisera la notation $X \prec X'$ pour signifier que $X \preceq X'$ et $X \not\sim X'$, autrement dit si X est isomorphe à un segment initial strict de X'.

Remarquons que le théorème 1.3 entraîne que $X \sim X'$ si, et seulement si, $X \preceq X'$ et $X' \preceq X$.

On a dit qu'on souhaitait pouvoir enumérer tous les ensembles bien ordonnés ; mais quelle notion de "longueur" utiliser ?

Théorème 1.4. *Soit X, Y deux ensembles bien ordonnés. Alors une et une seule des assertions suivantes est vraie :*

(a) $X \prec Y$

(b) $Y \prec X$

(c) $X \sim Y$

Ce théorème dit qu' une notion de "longueur" possible d'un ensemble bien ordonné est l'ensemble lui-même, où on compare deux longueurs par la relation "être isomorphe à un segment initial". Restera ensuite à choisir un représentant dans chaque classe d'isomorphisme...

Preuve.
Notons $\tilde{X}$ l'ensemble des segments initiaux de X, ordonné par l'inclusion. On vérifie facilement que c'est un ensemble bien ordonné. Si tout $S \in \tilde{X}$ est isomorphe à un segment initial de Y alors c'est en particulier le cas de X, et la preuve est finie. Sinon, appelons S le plus petit élément qui ne soit pas isomorphe à un segment initial de Y.
Soit $x < x' \in S$. Alors $f_y \circ f_x^{-1}(f_x(S_x)) = f_y(S_x)$, et comme $f_y \circ f_x^{-1}$ est un isomorphisme entre deux segments initiaux de Y on en déduit que $f_y \circ f_x^{-1}(y) = y$ pour tout $y \in f_x(S_x)) = f_y(S_x)$.
Si jamais il existe $x \in S$ tel que $f(\{x' \colon x' \leq x\}) = f(S_x) = Y$ alors il n'y a rien à démontrer ; sinon pour tout $x \in S$ il existe une injection croissante $f_x \colon S_x \to Y$ d'image un segment initial de Y. Mais alors, comme $S = \bigcup_{x \in S} S_x$, on peut utiliser l'observation précédente pour définir une fonction strictement croissante $f \colon S \to Y$ d'image $\cup_{x \in S} f_x(S_x)$ (en posant $f(y) = f_x(y)$ dès que $y \in S_x$). L'image de f est une union de segments initiaux de Y, et est donc un segment initial de Y, ce qui contredit le choix de S. □

Corollaire 1.5. Soit X, Y deux ensembles bien ordonnés. Alors $X \preceq Y$ si, et seulement si, il existe une injection croissante de X dans Y.

Théorème 1.6. *Soit $\mathcal{W} = \{W_i \colon i \in I\}$ une famille d'ensembles bien ordonnés. Alors il existe $W \in \mathcal{W}$ tel que $W \preceq W'$ pour tout $W' \in \mathcal{W}$.*

Preuve.
Soit $W_0 \in \mathcal{W}$. Si $W_0 \preceq W'$ pour tout $W' \in \mathcal{W}$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, l'ensemble $\{x \in W_0 \colon S_x \text{ est isomorphe à un élément de } \mathcal{W}\}$ est non vide. Appelons w le plus petit élément de cet ensemble, et prenons

$W \in \mathcal{W}$ qui soit isomorphe à S_w (vu dans W_0). Pour tout $W' \in \mathcal{W}$, il est impossible par définition que W' soit isomorphe à un segment initial strict de S_w, par conséquent on a $W \preceq W'$ pour tout $W' \in \mathcal{W}$. $\square$

Maintenant, il faudrait définir rigoureusement les *ordinaux* ; l'idée est qu'on veut compter à partir de 0 jusqu'à l'infini, et au-delà. Mais une définition formelle pose quelques difficultés métamathématiques, qui ne correspondent pas à nos préoccupations dans ce cours. On va donc se contenter d'une présentation intuitive.
L'idée est que les ordinaux doivent permettre de "représenter" les ensembles bien ordonnés, au sens où tout ordinal soit un ensemble bien ordonné et pour tout ensemble bien ordonné il y ait un ordinal unique qui lui soit isomorphe ; c'est cet ordinal-là qui doit représenter la "longueur" d'un ensemble bien ordonné. Admettons que cela soit posssible (et pensons donc intuitivement à un ordinal comme à une classe d'isomorphisme d'ensembles bien ordonnés).
Allons plus loin et notons que si α est un ordinal, alors tout ordinal plus petit que α est isomorphe à un (unique) segment initial de α ; et les segments initiaux stricts de α s'identifient naturellement aux éléments de α.
On a donc envie d'identifier les ordinaux strictement inférieurs à α aux éléments de α, et donc d'effectuer notre choix de représentants de classes d'isomorphisme de bons ordres de telle façon que chaque ordinal α soit égal à l'ensemble des ordinaux strictement inférieurs à α.
Ceci impose une contrainte : si $\beta < \alpha$ on doit en même temps identifier les ordinaux strictement inférieurs à β aux éléments de β, ce qui amène à vouloir que l'ensemble des éléments strictement inférieurs à β (c'est-à-dire β) soit contenu dans α. Finalement, on a donc envie que tout élément d'un ordinal soit en fait *inclus* dans cet ordinal.
On n'est toujours pas tout à fait satisfait : si on a une famille d'ordinaux, alors on voudrait pouvoir "compter strictement plus loin" que tous les ordinaux de cette famille, ce qui imposerait que la réunion de notre famille d'ordinaux soit un ordinal. On rajoute cela dans les conditions qu'on demande aux ordinaux.

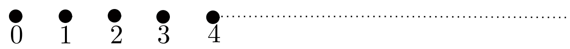
Voilà, on sait maintenant quelles propriétés attendre d'un ordinal, et on sait même comment effectuer leur construction : en effet, il n'y a pas d'élement plus petit que 0, donc 0 doit être l'ensemble vide. De même, $1 = \{0\} = \{\emptyset\}$, pour tout ordinal fini (i.e tout entier naturel !) on doit avoir $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, etc. On va se contenter d'admettre qu'une telle construction des ordinaux est possible dans le cadre de la théorie axiomatique de Zermelo-Fraenkel, et reprendre le fil de ce cours.

Les relations $\prec$, $\preceq$ correspondent à des opérations sur les ordinaux notées cette fois $<, \leq$. On notera maintenant ON la classe [1] des ordinaux ; on utilisera dans la suite (entre autres) les propriétés suivantes des ordinaux :

– Tout ensemble bien ordonné est isomorphe à un ordinal unique.
– Pour tout ordinal α, on a $\alpha = \{\beta \in ON : \beta < \alpha\}$.
– La réunion (resp. l'intersection) d'un ensemble d'ordinaux est un ordinal.

Avant de continuer, introduisons un peu de terminologie.

Définition 1.7. Un ordinal α est *successeur* s'il existe un ordinal β tel que $\beta < \alpha$ et pour tout ordinal γ on ait soit $\gamma \leq \beta$ soit $\alpha \leq \gamma$; sinon on dit que α est un *ordinal limite* .
On notera ω le plus petit ordinal infini, qui est aussi le plus petit ordinal limite.



L'ordinal ω

Vous êtes habitués à utiliser des démonstrations par récurrence pour montrer, par exemple, que tous les entiers satisfont une certaine propriété ; le principe de la démonstration par récurrence est de dire : si une propriété (P) est telle que pour tout entier naturel n

$$(\forall k < n \ P(k)) \Rightarrow P(n)$$

alors P est vraie pour tout n (notons que l'hypothèse ci-dessus implique en particulier que $P(0)$ est vraie !). Ce principe s'applique dans tout ensemble bien ordonné (à vous d'en faire une démonstration, ce qui ne devrait pas être trop difficile) et on obtient le résultat suivant :

Théorème 1.8. *(Démonstration par récurrence transfinie)*
Soit P une propriété [2] des ordinaux telle que pour tout ordinal α on ait

$$(\forall \beta < \alpha \ P(\beta)) \Rightarrow P(\alpha) \ .$$

Alors $P(\alpha)$ est vraie pour tout α.

[1] On dit classe parce que ce n'est pas un ensemble, sinon sa réunion serait un ordinal plus grand que tous les ordinaux, or tout ordinal a un successeur, ce qui fait un point commun entre les ordinaux et les hommes politiques (j'espère)

[2] Là encore la notion de propriété est floue ; disons simplement qu'une propriété est quelque chose qu'on peut exprimer par un énoncé écrit en utilisant le langage de la théorie des ensembles.

On sait maintenant, au moins en théorie, comment démontrer des énoncés par récurrence transfinie ; il est aussi courant en analyse et en combinatoire infinie qu'on soit amené à *construire* un objet par récurrence transfinie ; c'est une construction facile à comprendre mais à l'énoncé assez aride.

Théorème 1.9. *Soit $(X, \leq)$ un ensemble bien ordonné, Y un ensemble, et $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fonctions dont le domaine est un segment initial de X et dont l'image est contenue dans Y. Pour toute fonction $G \colon \mathcal{F} \to Y$, il existe une unique fonction $f \colon X \to Y$ telle que l'on ait, pour tout $x \in X$,*

$$f(x) = G(f_{|S_x}) \ .$$

On n'utilise jamais cet énoncé sous cette forme très abstraite ; mais on utlise fréquemment ce principe pour construire des objets. L'idée est que construire un objet par récurrence transfinie (en ξ étapes, pour ξ un certain ordinal), c'est dire ce qu'on fait au rang 0, puis donner une procédure pour passer de l'étape α à l'étape $\alpha + 1$, et enfin donner une procédure pour passer aux ordinaux limites, jusqu'à ce qu'on atteigne ξ. C'est le "cas limite" qui est nouveau par rapport au schéma de récurrence classique.
Plutôt que de donner une preuve du théorème de construction par récurrence transfinie, donnons un exemple.

Exemple : la dérivation de Hausdorff.
Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné, et $\sim$ une relation d'équivalence compatible avec $\leq$ (c'est-à-dire, telle que $\leq$ passe au quotient par $\sim$). Alors on peut définir une nouvelle relation, notée $D(\sim)$, en posant

$$xD(\sim)y \Leftrightarrow (\text{ il existe un nombre fini de } \sim \text{-classes entre } x \text{ et } y) \ .$$

Cette relation est à nouveau une relation d'équivalence, qui étend $\sim$ et est compatible avec $\leq$.
Soit maintenant ξ un ordinal quelconque. Pour $\alpha < \xi$, on définit une relation d'équivalence $\sim_\alpha$ compatible avec $\leq$ par récurrence transfinie, en respectant les trois points suivants :
(a) $(x \sim_0 y) \Leftrightarrow (x = y)$
(b) Si α est le successeur de β, alors $\sim_\alpha = D(\sim_\beta)$.
(c) Si $\alpha = \sup(\{\beta \colon \beta < \alpha\})$ alors $\sim_\alpha = \displaystyle\bigcup_{\beta<\alpha} \sim_\beta$.
Intuitivement, on a "épluché X ξ fois" : on a commencé par identifier tous les points tels que $[x, y]$ est fini et formé ainsi un nouvel ensemble ordonné, auquel on a appliqué la même construction, et on a répété le procédé pendant ξ étapes.

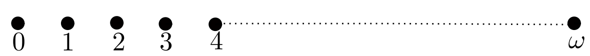
Par exemple, si on applique cette construction à $\mathbb{N}$ muni de son ordre usuel, on a $\sim_1 = X \times X$; par contre, si on l'applique à $\mathbb{Q}$ muni de son ordre usuel, on a $\sim_1 = \sim_0$ et donc $\sim_\alpha = \sim_0$ pour tout ordinal α.
On est amené à se poser un certain nombre de questions : est-ce qu'on peut continuer à éplucher X indéfiniment sans jamais s'arrêter ? Au contraire, est-ce que X est "épluchable", autrement dit ne reste-il plus rien au bout d'un nombre assez grand d'étapes ? Ou tombe-t-on sur un noyau, c'est-à-dire est-ce que $\sim_n$ arrête de grossir au bout d'un moment ? Nous reviendrons sur ces questions après l'introduction des cardinaux.

Exercice 1.10. $\star$ Montrer que si X n'est pas épluchable du tout, c'est-à-dire si $\sim_1 = \sim_0$, alors l'ordre de X est dense.
En déduire avec la méthode de va-et-vient que le seul ordre dénombrable totalement non épluchable est $\mathbb{Q}$, avec peut-être un plus grand et un plus petit élément. En déduire que si un ordre dénombrable contient un noyau alors il contient un sous-ensemble isomorphe à $\mathbb{Q}$ (en utilisant un peu de théorie des cardinaux, on verra qu'un ordre dénombrable doit soit être épluchable soit contenir un noyau).

On pourrait définir les opérations ordinales en décrivant des opérations sur les bons ordres ; pour gagner du temps dans ces notes, on va simplement énoncer une définition par récurrence transfinie. On note $s(\beta)$ le successeur d'un ordinal β, c'est-à-dire le plus petit ordinal strictement plus grand que β.

Définition 1.11. (addition ordinale) Soit α un ordinal. On pose $\alpha + 0 = \alpha$, puis on définit par récurrence transfinie sur $\beta \in ON$ l'addition ordinale $\alpha + \beta$ en posant :

$$\alpha + \beta = \begin{cases} s(\alpha + \gamma) & \text{si } \beta = \gamma + 1 \\ \sup\left(\{\alpha + \xi \colon \xi < \beta\}\right) & \text{si } \beta \text{ est limite} \end{cases}$$



L'ordinal $\omega + 1$

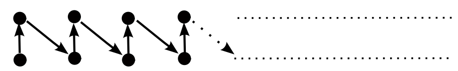
Par exemple, on a $1 + \omega = \sup\{1 + n \colon n < \omega\} = \omega$. Par contre, $\omega + 1 \neq \omega$ puisque $\omega + 1$ a un plus grand élément. Intuitivement, l'addition de deux ordinaux correspond à mettre “bout à bout” α et β.

Exercice 1.12. Utiliser une démonstration par récurrence transfinie pour montrer que l'addition est associative, et que si $\alpha \neq \beta$ alors pour tout δ on a $\delta + \alpha \neq \delta + \beta$.

Définition 1.13. (multiplication ordinale) Soit α un ordinal. On pose $\alpha.0 = 0$, puis on définit par récurrence transfinie sur $\beta \in ON$ la multiplication ordinale $\alpha.\beta$ en posant :

$$\alpha.\beta = \begin{cases} (\alpha.\gamma) + \alpha & \text{si } \beta = \gamma + 1 \\ \sup\left(\{\alpha.\xi \colon \xi < \beta\}\right) & \text{si } \beta \text{ est limite} \end{cases}$$

Cette fois on a $2.\omega = \omega$; l'idée de la multiplication ordinale est que "faire le produit de α par β, c'est mettre bout à bout β copies de α". Le dessin suivant essaie de justifier graphiquement l'égalité $2.\omega = \omega$.

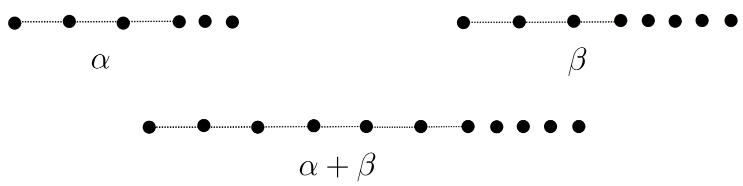


$2.\omega = \omega$

Exercice 1.14. Utiliser une démonstration par récurrence transfinie pour montrer que la multiplication est associative, et que si $\alpha > 0$ alors pour tout $\gamma > 1$ on a $\alpha. < \alpha.\gamma$.

Les deux opérations définies ci-dessus sont associatives, on a bien comme attendu $\alpha+\alpha = \alpha.2$, par contre attention à la non-commutativité : $1+\omega = \omega$ tandis que $\omega + 1 \neq \omega$ puisque $\omega + 1$ est successeur ; de même $2.\omega = \omega$ tandis que $\omega.2 = \omega + \omega > \omega$.

Exercice 1.15.
Décrire des opérations sur les bons ordres qui donnent naissance à l'addition et à la multiplication des ordinaux (pour la somme ordinale, on pourra s'inspirer du dessin ci-dessous).



La somme de deux ordinaux

Exercice 1.16. Comment définiriez-vous α^β pour deux ordinaux α, β ? Donner d'abord une description par récurrence transfinie, puis essayer de décrire une opération sur les ordres qui donne naissance à cette opération (ce n'est pas si facile !)

Exercice 1.17. On reprend les notations introduites lors de la définition de la dérivation de Hausdorff. Montrer que, si on prend un ordinal dénombrable α et qu'on considère $X = \omega^\alpha$, alors $\sim_\alpha$ est la relation grossière.

On n'utilisera pratiquement pas dans la suite d'arithmétique des ordinaux ; un exercice pour s'entraîner à la récurrence transfinie :

Exercice 1.18. Montrer que tout ordinal α peut s'écrire de façon unique sous la forme $\alpha = \beta + n$, où β est un ordinal limite et n est fini.

1.2 Cardinaux et axiome du choix.

On a vu comment énumérer des ensembles bien ordonnés ; par contre, contrairement aux ensembles finis, un ensemble peut admettre des bons ordres non isomorphes : c'est par exemple le cas de $\mathbb{N}$.
Cela n'empêche pas d'associer à un ensemble bien ordonnable un certain nombre ordinal uniquement déterminé : le plus petit ordinal α tel qu'il existe un bon ordre $<$ sur X avec $(X,<)$ isomorphe à α. Cela permettrait de développer une théorie satisfaisante des cardinaux des ensembles bien ordonnables ; mais comment faire si on a sous la main un ensemble X qui ne nous est pas fourni avec une structure de bon ordre ? La solution fournie par l'axiome de Zermelo est de dire : autorisons-nous à munir tout ensemble d'un bon ordre. Dans ce cas, on saura définir le cardinal d'un ensemble en utilisant des ordinaux, comme expliqué ci-dessus.
A première vue, l'axiome de Zermelo peut paraître excessif ; essayons de nous en passer. On peut définir le fait que X et Y ont "le même nombre d'éléments" sans utiliser de bon ordre, comme le montre la définition suivante.

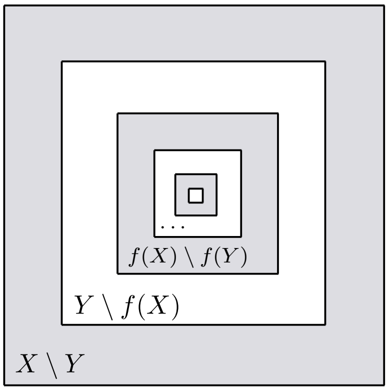
Définition 1.19. On dit que X a un cardinal inférieur à Y, et on note $|X| \leq |Y|$, s'il existe une injection de X dans Y, et on dit que X et Y ont même cardinal, ou sont équipotents (noté $|X| = |Y|$), s'il existe une bijection de X sur Y.

Ainsi, on cherche à étendre les notions intuitives de comptage, qui marchent pour les ensembles finis, à tous les ensembles. Déjà, il faut s'assurer que ces notions sont bien compatibles entre elles ; au début, tout se passe bien.

Théorème 1.20. (Schröder-Bernstein)
Si $|X| \leq |Y|$ et $|Y| \leq |X|$ alors $|Y| = |X|$.

Preuve.
Soit X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ deux injections. Bien

sûr, on a $X \supseteq g(Y) \supseteq g(f(X))$, et $g \circ f$ est une injection de X dans X.
On voit donc qu'il suffit de prouver que, si X est un ensemble, $f\colon X \to X$ une injection et $Y \subseteq X$ est tel que $f(X) \subseteq Y \subseteq X$ alors il existe une bijection de X sur Y.
En réfléchissant à ce cas, on est amené à considérer le dessin suivant :



On voit apparaître des "couronnes" : $X \setminus Y$, $Y \setminus f(X)$, $f(X) \setminus f(Y)$, etc.
Les couronnes "d'ordre impair" (en blanc sur le dessin) sont toutes contenues dans Y ; tandis que seule la première couronne d'ordre pair n'est pas contenue dans Y, et f envoie chaque couronne d'ordre pair sur la couronne suivante.
Pour construire la bijection recherchée, on n'a donc qu'à laisser tous les points blancs fixes, et décaler les points gris d'une couronne en utilisant f.
Formellement, on définit une suite d'ensembles disjoints $X_i \subseteq X$ en posant $X_i = f^i(X \setminus Y)$ $(= f^i(X) \setminus f^i(Y))$; puis on définit une fonction $g\colon X \to Y$ en posant

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \bigcup X_i \\ x & \text{sinon} \end{cases}$$

Par définition il est clair que g est une injection dont l'image est contenue dans Y, d'autre part il est facile de vérifier, en utilisant le fait que $g(X_i) = f(X_i) = X_{i+1}$ pour tout i, que $g(X) = Y$. □

Autrement dit, s'il existe une injection de X dans Y et une injection de Y dans X alors il existe une bijection de X sur Y. De plus, s'il existe une injection de X dans Y alors il existe une surjection de Y sur X, donc toutes nos définitions possibles pour comparer les cardinaux d'ensembles s'entendent bien, et on obtient ainsi un quasi-ordre sur les ensembles. Notre préoccupation maintenant est de savoir si deux ensembles sont nécessairement comparables pour ce quasi-ordre.

On peut déjà subodorer un problème : si X, Y sont deux ensembles, Y est bien ordonnable et $|X| \leq |Y|$, alors il existe une injection de X dans Y, qu'on peut utiliser pour munir X d'un bon ordre. Autrement dit, si les cardinalités de deux ensembles sont toujours comparables, et s'il existe un ensemble X qui ne peut pas être muni d'un bon ordre, alors on doit avoir $|X| > |Y|$ pour tout ensemble bien ordonnable, et en particulier pour tout ordinal. Donc tout ordinal s'injecte dans X ; mais alors on pourrait utiliser les axiomes de la théorie des ensembles pour prouver que les ordinaux forment un ensemble, et on sait que cela n'est pas possible. Par conséquent, avec nos méthodes, on aura besoin de l'axiome de Zermelo pour avoir une notion satisfaisante de cardinal d'un ensemble.

Exercice 1.21. Montrer (sans utiliser l'axiome de Zermelo) que pour tout ensemble X il existe un plus petit ordinal non équipotent à une partie de X. Montrer que cet ordinal est en fait un cardinal, appelé *cardinal de Hartogs* de X

Exercice 1.22. Donner une autre preuve du théorème de Schröder-Bernstein dans le cas où X et Y sont des ensembles bien ordonnables.

Les discussions ci-dessus servaient de prologue à la définition suivante.

Définition 1.23. Soit α un ordinal. On dit que α est un *cardinal* si aucun ordinal strictement inférieur à α n'est équipotent à α.

Il est alors immédiat que tout ensemble bien ordonnable X est équipotent à un unique cardinal $\kappa(X)$ et que de plus si α est un ordinal alors $\kappa(\alpha) \leq \alpha$. Par exemple, tous les ordinaux finis sont des cardinaux, ainsi que ω ; par contre, $\omega + 1$ n'est pas un cardinal. Notons également que par définition deux cardinaux distincts ne peuvent pas être équipotents. Enfin, dans la suite, si X est un ensemble bien ordonnable, la notation $|X|$ désignera l'unique cardinal équipotent à X.
Il existe pour tout κ des ordinaux qui ne sont pas équipotents à une partie de κ, et donc des cardinaux λ tels que $\kappa < \lambda$. On note κ^+ le plus petit tel cardinal.

Définition 1.24. *(Alephs)*
On définit par récurrence transfinie $\aleph_\alpha$, pour tout ordinal α, en posant $\aleph_0 = \omega$ puis

$$\aleph_\alpha = \begin{cases} \aleph_\beta^+ & \text{si } \alpha = \beta + 1 \\ \bigcup_{\beta<\alpha} \aleph_\beta & \text{si } \alpha \text{ est limite} \end{cases}$$

Il est alors possible de vérifier assez facilement que tous les $\aleph_\alpha$ sont des cardinaux, et réciproquement (avec l'axiome du choix !) que tout cardinal est égal à $\aleph_\alpha$ pour un certain α. De plus $\alpha \leq \aleph_\alpha$ pour tout ordinal α.

Exercice 1.25.
Montrer qu'il existe des ordinaux (donc des cardinaux !) tels que $\alpha = \aleph_\alpha$[3].

Les cardinaux nous permettent de prouver que soit un ensemble ordonné dénombrable est épluchable, soit il contient un noyau (et donc un sous-ensemble isomorphe à $(\mathbb{Q}, \leq)$).

Exercice 1.26. Soit $(X, <)$ un ensemble dénombrable. On note $\sim_\alpha$ la α-ième relation d'équivalence apparaissant dans la dérivation de Hausdorff de X ; montrer qu'il existe $\alpha < \omega_1$ tel que $\sim_\alpha = \sim_{\alpha+1}$.

Pour définir une notion satisfaisante du cardinal d'un ensemble, on a eu besoin d'utiliser l'axiome de Zermelo. Celui-ci réapparaît quand on essaie de traiter l'arithmétique des cardinaux, mais sous une forme différente. Il paraît donc raisonnable de faire une pause dans notre exposition et de nous arrêter sur cet axiome, connu généralement sous le nom d'*axiome du choix*. Son énoncé intuitif, dans sa version la plus connue, est : "si on me donne une famille d'ensembles non vides, alors je peux choisir simultanément un élement dans chaque ensemble de cette famille".
Avant de citer trois énoncés équivalents de l'axiome du choix , rappelons qu'un ensemble ordonné $((X, \leq)$ est *inductif* si tout sous-ensemble totalement ordonné admet un majorant. Nous dirons aussi qu'un ensemble X admet une *fonction de choix* s'il existe une fonction $f : \mathcal{P}(X) \to X$ telle que pour toute partie $A \subseteq X$ non vide on ait $f(A) \in A$.

Définition 1.27. On introduit les énoncés suivants :

1. (Axiome du choix) Tout ensemble X admet une fonction de choix.
2. (Axiome de Zorn) Tout ensemble ordonné inductif non vide a au moins un élément maximal.
3. (Axiome de Zermelo) Tout ensemble peut être bien ordonné.

Ces trois énoncés sont équivalents. Le premier d'entre eux est l'enoncé "historique" de l'axiome du choix ; sous cette forme il a été introduit par Zermelo en 1904. Cet axiome était implicitement utilisé par de nombreux mathématiciens du dix-neuvième siècle et paraît plutôt "naturel". il est plus difficile de se faire une idée intuitive du second énoncé, dont on voit qu'il permet

[3]Indication : considérer l'application $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$; en particulier, montrer que pour tout ordinal α l'ordinal $\beta = \sup(\{f^n(\alpha) : n < \omega\})$ est un point fixe de f

d'une certaine façon de faire de l'analyse en évitant la théorie des ordinaux et la récurrence transfinie. Le dernier énoncé paraît, lui, assez arbitraire, et dit qu'en fait on peut ramener les raisonnements de théorie des ensembles à des raisonnements sur les ordinaux. Un résumé fameux, mais apocryphe [4] : "il est clair que l'axiome du choix est vrai et que l'axiome de Zermelo est faux ; quant au théorème de Zorn, qui sait ?"

Preuve que les trois énoncés ci-dessus sont équivalents.
Toutes les implications entre les axiomes ci-dessus sont instructives à démontrer, et c'est un exercice vivement recommandé ; ici on va se contenter d'expliquer rapidement pourquoi (Zermelo) implique (Choix), (Choix) implique (Zorn) et (Zorn) implique (Zermelo).
(Zermelo) ⇒ (Choix) :
C'est l'implication la plus facile des trois : en effet, si $(X, \leq)$ est bien ordonné alors on peut obtenir une fonction de choix sur $\mathcal{P}(X)$ en posant simplement $f(A) = \min(A)$.
(Choix) ⇒ (Zorn) :
Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné inductif, dont on suppose qu'il n'a pas d'élément maximal. Alors tout sous-ensemble totalement ordonné $M \subseteq X$ admet un majorant strict noté $\psi(M)$. Soit alors φ une fonction de choix sur X et κ un ordinal non équipotent à une partie de X. Soit $x \in X$; par récurrence transfinie, on peut construire une suite indexée par κ d'éléments de X en posant, pour tout $\alpha < \kappa$:

(a) $x_0 = x$;

(b) $x_{\alpha+1} = \varphi(\{y \in X : y > x_\alpha\})$;

(c) $x_\alpha = \psi(\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ si $\alpha = \sup\{\beta : \beta < \alpha\})$

La suite qu'on vient de construire nous donne une injection de κ dans X, ce qui est impossible par définition de κ.
(Zorn) ⇒ (Zermelo) :
Introduisons l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{(A, \leq) : A \subseteq X \text{ et } (A, \leq) \text{ est bien ordonné}\}$$

On peut munir $\mathcal{A}$ d'une structure d'ordre en posant $(A, \leq_A) \preceq (B, \leq_B)$ si, et seulement si, $A \subseteq B$ et $\leq_B$ étend $\leq_A$. Alors on peut vérifier que $(\mathcal{P}(X), \preceq)$ est un ensemble ordonné inductif, qui a par conséquent un élément maximal $(A, \leq)$. Reste à remarquer que la maximalité de $(A, \leq)$ a pour conséquence que $A = X$. □

[4] Wikipedia l'attribue à un certain Jerry Bona.

L'axiome du choix a de nombreuses conséquences en mathématiques, dont certaines paraissent pathologiques. L'exemple le plus connu est sans doute l'existence de parties non Lebesgue-mesurables dans $\mathbb{R}$. Certains mathématiciens refusent de ce fait l'axiome du choix ; notons tout de même que, contrairement à une idée reçue, celui-ci n'est *pas* équivalent à l'existence de parties non Lebesgue-mesurables ; autrement dit, supposer que toute partie de $\mathbb{R}$ est Lebesgue-mesurable est plus fort que supposer que l'axiome du choix est faux. Il en va de même du paradoxe de Banach-Tarski : c'est une conséquence de l'axiome du choix qui ne lui est pas équivalente.
Par ailleurs, l'axiome du choix a de nombreuses conséquences qui, elles, paraissent très utiles : théorème de la base incomplète ou lemme de Krull pour les algébristes, théorème de Tychonov pour les analystes... Et bien sûr on a vu que la théorie des ensembles devient très vite très compliquée si on n'a pas l'axiome du choix, puisqu'il est déjà difficile de compter le nombre d'éléments d'un ensemble quelconque. Un autre exemple de difficulté liée à l'absence de l'axiome du choix se trouve dans l'exercice suivant.

Exercice 1.28. Montrer que l'axiome du choix est équivalent à l'énoncé suivant : si X, Y sont deux ensembles et $f\colon X \to Y$ est une surjection, alors il existe $g\colon Y \to X$ telle que $f(g(y)) = y$ pour tout $y \in Y$.

Dans la suite de ces notes, on utlisera sans vergogne l'axiome du choix sous ses différentes formes. En fait, comme on ne considérera jamais d'ensembles de très grand cardinal, on pourrait être tenté de se contenter de l'*axiome du choix dénombrable*. Cet axiome, qui dit qu'un produit dénombrable d'ensembles non vides est non vide (ou, de manière équivalente, qu'on peut choisir de manière simultanée un point dans chaque élement d'une famille *dénombrable* d'ensembles non vides), est fondamental pour le développement de l'analyse. Par exemple, montrer que les deux définitions classiques de la continuité pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (par les suites/image inverse d'un fermé est fermé) sont équivalentes rcquiert l'axiome du choix dénombrable... De même on a besoin d'une forme d'axiome du choix pour justifier qu'une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable, comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 1.29. Montrer que l'axiome du choix dénombrable entraîne que toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable (rappelons qu'un ensemble est dénombrable s'il est fini ou équipotent à ω).
Montrer que si toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable alors tout produit dénombrable de parties dénombrables non vides est non vide.

En réalité, l'axiome du choix dénombrable n'est pas suffisant pour les raisonnements que nous devrons effectuer dans ce cours.
En effet, on aura besoin de construire des suites en utilisant le principe suivant : supposons qu'étant donné $x_1, \ldots, x_n$ tel que $P(\{x_1, \ldots, x_n\})$ est satisfaite (où P est une certaine propriété des ensembles finis) j'arrive à trouver un x tel que $\{x_1, \ldots, x_n, x\}$ a la propriété P ; alors je suis capable de construire une *suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que pour tout n on ait $P(\{x_1, \ldots, x_n\})$.
Ce procédé est à la base de toutes les constructions par "approximation successives" et devient légal quand on s'autorise à appliquer l'*axiome des choix dépendants*.

Définition 1.30. L'*axiome des choix dépendants* est l'énoncé suivant :
Soit X un ensemble et R une relation binaire sur X telle que pour tout $a \in X$ il existe $b \in X$ satisfaisant aRb. Alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X tels que $x_n R x_{n+1}$ pour tout n.

Avant de présenter une autre forme de l'axiome des choix dépendants, disons qu'un ensemble T muni d'une relation binaire R antisymétrique, sans cycles et connexe (i.e deux points sont reliés par une suite d'éléments en relation R) est un *arbre* . Une *branche infinie* de T est une suite injective (x_n) d'éléments de T telle que $x_n R x_{n+1}$ pour tout n.

Exercice 1.31. Montrer que l'axiome des choix dépendants est équivalent à l'énoncé suivant :
Soit T un arbre infini tel que chaque élément a un nombre fini de voisins. Alors T a une branche infinie.

Pour nous, l'axiome des choix dépendants sera particulièrement important, puisqu'il se trouve en fait être équivalent (au dessus de ZF) à l'énoncé "le théorème de Baire est vrai dans tout espace complet", et le théorème de Baire (dont l'énoncé sera rappelé au prochain chapitre) est d'une certaine façon la pierre angulaire de la théorie descriptive des ensembles.
Notons que l'axiome du choix implique l'axiome des choix dépendants, qui implique à son tour l'axiome du choix dénombrable ; on peut montrer qu'aucune des implications réciproques n'est vraie. Enfin, remarquons que l'axiome des choix dépendants, s'il est suffisant pour développer l'analyse classique, ne permet pas de démontrer l'existence d'ensembles non Lebesgue-mesurables ; on peut considérer que cet axiome est accepté par une grande majorité des mathématiciens contemporains.

Revenons à nos cardinaux ; à l'aide de l'axiome du choix, on peut vérifier que si $(X_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ et $(Y_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ sont tels que $|X_\alpha| = |Y_\alpha|$ pour tout $\alpha < \lambda$ alors on a

$$\left|\bigsqcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha\right| = \left|\bigsqcup_{\alpha<\lambda} Y_\alpha\right| \text{ et } \left|\prod_{\alpha<\lambda} X_\alpha\right| = \left|\prod_{\alpha<\lambda} Y_\alpha\right| .$$

De même si $|X| = |X_1|$ et $|Y| = |Y_1|$ alors $\left|X^Y\right| = \left|X_1^{Y_1}\right|$. On peut alors définir les opérations arithmétiques cardinales :

Définition 1.32. (arithmétique cardinale) Soit α un ordinal et $(\kappa_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ une suite de cardinaux indexée par un ordinal λ. On définit $\sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\lambda$ comme l'unique cardinal équipotent à $\bigsqcup \kappa_\alpha$.
De même, $\prod_{\alpha<\lambda} \kappa_\lambda$ est l'unique cardinal équipotent au produit cartésien des κ_λ.
Enfin, si κ et λ sont deux cardinaux on définit κ^λ comme l'unique cardinal équipotent à l'ensemble des fonctions de λ dans κ ; en particulier $\left|2^X\right| = |\mathcal{P}(X)|$ pour tout ensemble X.

La somme et le produit de cardinaux sont des opérations commutatives et associatives ; attention au fait que la sommme/produit de deux cardinaux diffère selon qu'on les considère comme des cardinaux ou comme des ordinaux...

Exercice 1.33. Montrer que $|\mathbb{Q}^2| = \aleph_0$, puis montrer que $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$. Pour la dernière question, on pourra considérer l'application $f \colon \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q}^2)$ définie par

$$f(x) = \left\{(q, q') \in \mathbb{Q}^2 \colon q < x < q'\right\} .$$

L'addition et la multiplication d'un nombre fini de cardinaux sont simples à comprendre, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 1.34.
Soit κ,λ deux cardinaux infinis. Alors on a $\kappa + \lambda = \kappa.\lambda = \max(\kappa, \lambda)$

Preuve.
Il suffit de montrer que pour tout cardinal infini κ on a $\kappa.\kappa = \kappa$, autrement dit il nous faut montrer que tout ensemble infini X est équipotent à $X \times X$ [5] On raisonne par récurrence transfinie : soit donc κ un cardinal infini, dont on suppose que pour tout cardinal infini $\lambda < \kappa$ on a $\lambda.\lambda = \lambda$.
On va munir $\kappa \times \kappa$ d'un bon ordre dont tous les segments initiaux stricts se plongent dans κ. Ce bon ordre sera isomorphe à un certain ordinal, qui est alors plus petit que κ (un ordinal est la réunion de ses segments initiaux), et

[5] voilà encore un énoncé équivalent à l'axiome du choix !

permettra de définir une injection de $\kappa \times \kappa$ dans κ.
Pour définir notre bon ordre, on pense à l'énumération classique de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, et on pose, pour $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta') \in \kappa^2$:

$$\big((\alpha,\beta) \preceq (\alpha',\beta')\big) \Leftrightarrow \big((\alpha+\beta < \alpha'+\beta') \text{ ou } (\alpha+\beta = \alpha'+\beta' \text{ et } \alpha \leq \alpha')\big)$$

On vérifie que ceci définit bien un bon ordre sur κ^2 ; de plus, si $(\alpha, \beta) \in \kappa^2$ alors le $\preceq$-segment initial associé à (α, β) se plonge dans $(\alpha + \beta) \times (\alpha + \beta)$. Par notre hypothèse de récurrence, et puisque α, β sont de cardinal $< \kappa$, on obtient que $|\alpha + \beta|$ est soit fini soit infini strictement inférieur à κ ; par conséquent, $|(\alpha \times \beta) \times (\alpha \times \beta)| < \kappa$.
On voit donc que tous les segments initiaux du bon ordre $\preceq$ sur $\kappa \times \kappa$ sont de cardinal strictement inférieur à κ, ce qui termine la preuve. $\square$

D'une certaine façon, l'opération arithmétique la plus mystérieuse sur les cardinaux est l'exponentiation ; le premier résultat à son sujet a été obtenu par Cantor.

Théorème 1.35. (Cantor) *Pour tout ensemble X il n'existe pas de surjection $f \colon X \to \mathcal{P}(X)$.*
Avec nos notations cela signifie que pour tout cardinal κ on a $\kappa < 2^\kappa$.

Preuve.
Par l'absurde, soit $f \colon X \to \mathcal{P}(X)$ une surjection, et soit

$$Y = \{x \in X \colon x \notin f(x)\} \ .$$

On doit avoit $Y = f(x_0)$ pour un certain $x_0 \in X$, mais alors on vérifie que $(x_0 \in Y) \Leftrightarrow (x_0 \notin Y)$, et on arrive donc à une contradiction. $\square$.

On sait donc produire une classe strictement croissante et non bornée de cardinaux, en répétant l'opération $\kappa \mapsto 2^\kappa$. Y a-t-il des cardinaux qui ne sont pas de cette forme ?

Définition 1.36. *L'hypothèse du continu* est l'énoncé $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.
L'hypothèse du continu *généralisée* est l'énoncé affirmant que pour tout ordinal α on a $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

L'idée sous-jacente de l'hypothèse du continu est qu'on peut "voir" $\mathbb{N}$, de cardinal $\aleph_0$, et $\mathbb{R}$, de cardinal $2^{\aleph_0}$, mais on ne voit pas d'ensemble de réels qui soit de cardinal intermédiaire. La question est donc : en existe-t-il ?
Pendant longtemps cette hypothèse a paru naturelle ; Gödel a prouvé qu'elle était consistante avec les axiomes de ZFC. Mais dans les années 60, Paul

Cohen a montré, en utilisant la méthode du *forcing*, que la négation de l'hypothèse du continu était *aussi* consistante avec ZFC, autrement dit (HC) est indépendante de ZFC.
Aujourd'hui, la plupart des théoriciens des ensembles considèrent qu'il n'y a aucune raison de limiter la richesse de la théorie en imposant arbitrairement que l'hypothèse du continu soit vérifiée ; il existe des axiomes ("grands cardinaux") menant à une théorie très riche dans laquelle l'hypothèse du continu est fausse.
On n'en dira pas plus sur l'hypothèse du continu dans ce cours ; on n'aura pas non plus besoin de notions supplémentaires d'arithmétique cardinale. Notons cependant que dans le cadre de ZFC peu de théorèmes "simples" peuvent être établis, car beaucoup d'énoncés sur les cardinaux se trouvent être indépendants de ZFC. Mais nous n'allons pas manipuler des ensembles quelconques, mais des ensembles munis d'une topologie "sympathique", dont nous ne manipulerons que des sous-ensembles "définissables".

Notes bibliographiques.
Ce chapitre ne saurait constituer une introduction complète à la théorie des ensembles élémentaire ; à ce sujet, le lecteur intéressé est invité à consulter [Hal74] s'il cherche une présentation intuitive de la théorie, et [Mos06] ou [KM] pour une présentation plus formelle et orientée vers les sujets qui apparaîtront dans les chapitres suivants de ces notes.
Le lecteur anglophobe souhaitant se documenter sur le sujet pourra consulter avec profit la traduction française du livre de Kuratowski sus-cité.
En ce qui concerne l'axiome du choix, il existe une véritable encyclopédie [HR98] présentant ses multiples formes ; on pourra y trouver des références sur certains résultats énoncés sans référence dans le corps du chapitre cidessus. Le livre de S. Wagon [Wag85] est également très instructif.
Enfin, comme source bibliographique concernant les résultats plus récents de théorie des ensembles (forcing, etc) le lecteur est invité à consulter [Jec03].

Chapitre 2

Espaces polonais et lemme de Baire

2.1 Rappels ; espaces compacts, complets, séparables

Dans ce chapitre, on va commencer par rappeler quelques définitions et propriétés de base en topologie métrique ; beaucoup de ces rappels se feront sous forme d'exercices. Ensuite nous nous concentrerons sur les espaces *polonais*, c'est-à-dire les espaces séparables complètement métrisables.

Une *pseudo-distance* sur un ensemble X est une application $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ symétrique, satisfaisant l'*inégalité triangulaire*

$$\forall x, y, z \in X \;\; d(x, y) + d(y, z) \leq d(x, z) \; .$$

Une *distance* est une pseudo-distance d sur X telle que de plus

$$\forall x, y \in X \;\; d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \; .$$

Un *espace métrique* est un ensemble muni d'une distance.
La *topologie* engendrée par une distance d est la famille des ensembles ouverts pour d, c'est-à-dire qui sont réunion d'une famille de boules ouvertes ; un espace topologique est dit *métrisable* si sa topologie est engendrée par une distance d.
Dans la suite on utilisera $B(x, r]$ (resp. $B(x, r[$) pour désigner la boule fermée (resp. ouverte) de centre x et de rayon r ; une *isométrie* de (X, d) sur (Y, d') est une bijection entre X et Y telle que $d(x, x') = d'(f(x); f(x'))$ pour tout $(x, x') \in X^2$; une application non surjective mais préservant les distances

sera appelée *plongement isométrique* (ou simplement isométrie non surjective). On suppose connues les notions d'adhérence et intérieur dans un espace métrique, ainsi que la notion de suite de Cauchy et de complété d'un espace métrique.

Fixons notre terminologie :

Définition 2.1. Soit (X, d) un espace métrique. On rappelle que
- (X, d) est *séparable* ssi il a un sous-ensemble dénombrable dense.
- (X, d) est *complet* si toute suite de Cauchy d'éléments de X est convergente.
- (X, d) est *compact* si toute suite d'éléments de X a une sous-suite convergente ; de manière équivalente[1] (X, d) est compact si de tout recouvrement de X par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.
- (X, d) est *précompact* si pour tout $\varepsilon > 0$ on peut recouvrir X par un nombre fini de boules de rayon ε.

On utilisera sans démonstration dans la suite des propriétés élémentaires des espaces métriques ; certaines d'entre elles sont regroupées dans les exercices ci-dessous.

Exercice 2.2. Soit (X, d) un espace métrique.
- Rappelons qu'une famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ est une *base d'ouverts* si pour tout ouvert $U \subseteq X$ il existe $J \subseteq I$ tel que $U = \bigcup_{j\in J} U_j$. Montrer alors que (X, d) est séparable si, et seulement si, il admet une base dénombrable d'ouverts.
- Si $(U_i)_{i\in I}$ est une base de la topologie de X, montrer que l'application qui à x associe l'ensemble des i pour lesquels $x \in U_i$ est injective. En déduire que tout espace métrique séparable X est de cardinal inférieur à $2^{\aleph_0}$.
- Prouver que si (X, d) est séparable alors tout sous-ensemble de X, muni de la distance induite, est séparable.

Exercice 2.3. Soit (X, d) un espace métrique.
Montrer que X est complet si, et seulement si, toute suite décroissante de fermés $F_n \subseteq X$ telle que $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$ est d'intersection non vide. L'hypothèse sur le diamètre des F_n est-elle nécessaire ?

Exercice 2.4. Soit (X, d) un espace métrique.
- Montrer que (X, d) est compact si, et seulement si, (X, d) est à la fois précompact et complet.

[1]on admet cette équivalence classique mais non triviale !

– Montrer que tout compact métrique est séparable. Que pensez-vous de la réciproque ?
– Montrer que si (X,d) est compact et $f\colon (X,d) \to (Y,d')$ est surjective alors (Y,d') est compact ; en déduire qu'une bijection continue entre espaces compacts métriques est un *homéomorphisme*, c'est-à-dire que sa fonction réciproque est aussi continue.

Exercice 2.5. Soit (X,d) un espace métrique compact.
Montrer que tout plongement isométrique $f\colon X \to X$ est surjectif.

Les démonstrations en théorie descriptive des ensembles utilisent souvent des techniques de "codage" ; pour effectuer ces codages il est parfois plus simple de manipuler des espaces bornés, ce qu'on peut faire grâce à la construction décrite dans l'exercice suivant.

Exercice 2.6. Soit (X,d) un espace métrique.
– Montrer que $\tilde{d}$ définie par $\tilde{d}(x,y) = \min(d(x,y),1)$ est une distance qui définit la même topologie que d.
– Même question avec cette fois $\tilde{d} = \frac{d}{1+d}$; prouver que dans ce cas d et $\tilde{d}$ ont les mêmes isométries et les mêmes applications uniformément continues.

Les espaces les mieux adaptés pour appliquer les techniques de codage évoquées plus haut sont introduits dans la définition ci-dessous.

Définition 2.7. Un espace topologique (X,d) est *zéro-dimensionnel* si X admet une base d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ tels que pour tout i U_i est à la fois ouvert et fermé dans X.

Exemple. Par exemple, $(\mathbb{N},|\cdot|)$ est 0-dimensionnel ; peut-être plus intéressant est le fait que $(\mathbb{Q},|\cdot|)$ l'est aussi : si on fixe une énumération (q_i) de $\mathbb{Q}$, alors la famille de boules $B(q_i,\alpha[$ pour α irrationnel est une base de la topologie de $\mathbb{Q}$ constituée d'ouvert-fermés.

La base ci-dessus n'est pas dénombrable ; on voit facilement comment la rendre dénombrable, mais est-ce le cas pour tout espace séparable ? L'exercice suivant répond à cette interrogation.

Exercice 2.8. Soit (X,d) un espace séparable.
– Montrer que pour tout ouvert U et toute famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ telle que $\bigcup_{i\in i} U_j = U$, il existe un sous-ensemble *dénombrable* $J \subseteq I$ tel que $\bigcup_{j\in J} U_j = U$. En déduire que si (X,d) est 0-dimensionnel alors (X,d) admet une base dénombrable d'ouverts fermés.
– Montrer que tout espace métrique dénombrable est 0-dimensionnel.

Il nous reste à introduire une dernière notion élémentaire, mais essentielle pour nous, avant de discuter deux exemples très importants ; pour rester dans le contexte de ce cours, nous en donnons une définition *ad hoc*, sans utiliser de topologie générale.

Définition 2.9. Soit $(X_i, d_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable d'espaces métriques. On définit la *topologie produit* sur $\prod_{i\in I} X_i$ comme la topologie engendrée par la distance d suivante :

$$d((x_i),(y_i)) = \sum_{i\in I} 2^{-i}\min(d_i(x_i,y_i),1)\ .$$

Exercice 2.10. Soit $(X_i, d_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable d'espaces métriques. On munit $\prod X_i$ de la topologie produit.
- Prouver qu'une suite (x_n) converge vers x dans $\prod X_i$ si, et seulement si, on a pour tout i que $x_n(i)$ tend vers $x(i)$.
- En déduire que si les X_i sont complets alors $\prod X_i$ est complet.
- En utilisant le procédé diagonal, prouver qu'un produit dénombrable d'espaces métriques compacts est compact [2].
- Pour tout $J \subseteq I$ fini et tout ensemble $\{U_j : j \in J\}$ tel que chaque $U_j \subseteq X_j$ est ouvert, on considère l'ensemble

  $$\{x \in \prod X_i : \forall j \in J\ x(j) \in U_j\}\ .$$

  Montrer que ces ensembles sont tous ouverts, puis qu'ils forment une base d'ouverts pour $\prod X_i$ et en déduire qu'un produit dénombrable d'espaces séparables est séparable.
- Si (X, d) est un espace métrique séparable, et (x_n) est une suite dense dans X, donner explicitement une base d'ouverts de la topologie de $X^{\mathbb{N}}$.
- Montrer que si tous les (X_i) sont 0-dimensionnels alors $\prod X_i$ est aussi 0-dimensionnel.

Exercice 2.11. Montrer que tout espace métrique séparable est homéomorphe à un sous-ensemble de $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

Avant d'en finir avec ces rappels de topologie métrique, on va introduire deux espaces qui seront omniprésents dans la suite de ce cours.

Définition 2.12. Munissons $2 = \{0,1\}$ et $\mathbb{N}$ de la distance discrète. Alors on définit *l'espace de Cantor* $\mathcal{C} = 2^{\mathbb{N}}$ et l'*espace de Baire* $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, tous deux munis de la topologie produit .

[2] Pour pouvoir utiliser un procédé diagonal, on a besoin de l'axiome des choix dépendants...

Ces espaces sont tous deux 0-dimensionnels, complets, et $\mathcal{C}$ est même compact. Par contraste, on voit facilement que tout compact K de $\mathcal{N}$ est d'intérieur vide : pour tout n l'application $x \mapsto x(n)$ est continue sur $\mathcal{N}$ et donc bornée sur K. Ceci étant vrai pour tout n, on voit d'après la définition de la topologie produit que K est d'intérieur vide.

Notation.
Dans la suite, si A est un ensemble, et $s \in A^n$ est une suite finie d'éléments de A, on notera

$$N_s = \{x \in A^{\mathbb{N}} \colon x_{|n} = s\} \ .$$

Les N_s forment une base de la topologie de $A^{\mathbb{N}}$.
On notera $A^{<\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites finies d'éléments de A ; si $s \in A^{\mathbb{N}}$ on notera $|s|$ la longueur de s.

Exercice 2.13. Soit A un ensemble au plus dénombrable, muni de la distance discrète.
Montrer que la famille (N_s) définie ci-dessus est une base dénombrable d'ouverts-fermés pour la topologie produit sur $A^{\mathbb{N}}$.

On a introduit les espaces de Baire et de Cantor sous forme d'espaces de suites, propice au codage ; mais vous les avez déjà rencontrés en étudiant la topologie de $\mathbb{R}$.

Exercice 2.14. On peut construire un sous-ensemble de $[0, 1]$ de la façon suivante : on pose $K_0 = [0, 1]$, puis on enlève le segment ouvert du milieu, c'est-à-dire qu'on définit $K_1 = [0, 1/3] \cup [1/3, 2/3]$, puis on applique la même construction à l'intérieur de chacun des segments, et on continue jusqu'à ω ; autrement dit, on construit $K = \cap K_{n\in\omega}$. Cet ensemble s'appelle l'*ensemble triadique de Cantor*.

Construction de l'ensemble triadique de Cantor.

Montrer que l'ensemble triadique de Cantor est homéomorphe à $\mathcal{C}$ (indication : si $x \in K$, alors à chaque étape de la construction de K x est soit à gauche soit à droite du segment qui est enlevé, ce qui doit pouvoir se coder avec une suite de 0 et de 1...

Exercice 2.15. A l'aide d'un raisonnement de type va-et-vient, montrer que si deux sous-ensembles K_1, K_2 de $\mathbb{R}$ sont homéomorphes à $\mathcal{C}$ alors il existe un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ qui envoie K_1 sur K_2 [3].

Exercice 2.16. En utilisant le développement en fractions continues, montrer que $\mathcal{N}$ est homéomorphe à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Remarquons enfin que chacun de ces espaces contient un sous-ensemble homéomorphe à l'autre ; puisqu'il est clair que $\mathcal{N}$ contient un sous-ensemble homéomorphe à $\mathcal{C}$, il nous suffit de produire un sous-ensemble de $\mathcal{C}$ homéomorphe à $\mathcal{N}$. Pour cela, considérons l'ensemble

$$N = \{x \in 2^{\mathbb{N}} \colon x \text{ prend une infinité de fois la valeur } 1\} .$$

A tout $x = n_0 \frown n_1 \frown \ldots$, de $\mathcal{N}$, associons $f(x) = 0^{n_0} \frown 1 \frown 0^{n_1} \frown 1 \frown \ldots$; cette fonction est bien définie sur $\mathcal{N}$, clairement continue, et à valeurs dans N. On laisse en exercice le fait de vérifier que $f^{-1} \colon N \to \mathcal{N}$ est continue.

Enfin, notons la proposition technique suivante, qui nous sera très utile par la suite.

Proposition 2.17. *Soit A un ensemble muni de la distance discrète, et $X = A^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit. Alors tout fermé $F \subseteq X$ est un* rétract *de X, c'est-à-dire qu'il existe une fonction continue $r \colon X \to F$ telle que $r_{|F} = id_F$.*

Dans la pratique, on appliquera le théorème précédent avec $A = 2$ ou $A = \mathbb{N}$.
Preuve.
Pour tout s tel que $N_s \cap F \neq \emptyset$, fixons $y_s \in N_s \cap F$. Pour tout $x \in A^{\mathbb{N}}$, soit $x \in F$ soit il existe un plus grand $n = n_x$ tel que $N_{x_{|n}} \cap F \neq \emptyset$. Dans le premier cas, on pose $f(x) = x$, dans le second cas on introduit $s = x_{|n_x+1}$ et on pose $f(x) = y_s$.
La fonction f est bien définie, à valeurs dans F, et on a bien $f(x) = x$ pour tout $x \in F$. Reste à vérifier que f est continue en x pour tout $x \in A^{\mathbb{N}}$:
<u>si $x \in F$</u> : Alors pour tout n et tout $y \in A^N$ on voit que si x et y ont les mêmes n premières coordonnées il en va de même de $f(x)$ et $f(y)$, et donc f est continue en x.
<u>$x \notin F$</u> : Alors pour tout y tel que $y_{|n_x+1} = x_{|n_x+1}$ on a $f(x) = f(y)$, par conséquent f est localement constante au voisinage de x et donc continue en x. □

[3]indication : si K est homéomorphs à $\mathcal{C}$, alors le complémentaire de K est ouvert, donc réunion dénombrable d'intervalles ouverts ; on peut définir un ordre sur ces intervalles par $I \prec J \Leftrightarrow \sup(I) \leq \inf(J)$. Montrer que cet ordre est dense et n'a pas de plus grand ni de plus petit élément.

L'idée de la démonstration précédente est que, si l'on a un ouvert $U \subseteq A^{\mathbb{N}}$ et qu'on construit un élément x de $A^{\mathbb{N}}$, alors on va être obligé de décider en temps fini si $x \in U$ (autrement dit : si on construit x en essayant de toujours se donner le choix entre finir dans U et finir dans son complémentaire, alors l'élément construit appartiendra forcément au complémentaire de U).

2.2 Caractérisation des polonais ; lemme de Baire

Définition 2.18. Un espace métrisable X est *polonais* si X est séparable et il existe une distance complète induisant la topologie de X.

Par exemple, $\mathbb{R}$ avec sa topologie usuelle est un espace polonais ; tout compact métrisable est polonais. L'espace de Cantor et l'espace de Baire sont tous deux polonais. Plus généralement, notre travail de la section précédente nous permet d'affirmer que tout produit dénombrable d'espaces polonais est polonais.

Définition 2.19.
On dira dans la suite qu'un ensemble est G_δ s'il s'écrit comme une intersection dénombrable d'ouverts. Un F_σ est un ensemble dont le complémentaire est G_δ, c'est-à-dire une réunion dénombrable de fermés.

Exercice 2.20. Montrer que dans un espace métrique tout ouvert (ou tout fermé !) est à la fois F_σ et G_δ.

Théorème 2.21. (Alexandrov)
Si (X, d) est polonais alors tout G_δ de X, muni de la topologie induite, est un espace polonais.

Preuve.
Commençons par traiter le cas d'un ouvert $O \subseteq X$; si d est une distance compatible sur X, alors on peut définir une nouvelle distance d_O sur O en posant

$$d_O(x,y) = d(x,y) + \left| \frac{1}{d(x, X \setminus O)} - \frac{1}{d(y, X \setminus O)} \right| .$$

Cette distance définit bien sur O la même topologie que d, puisqu'on a, pour tout $x \in O$ et toute suite (x_n) d'éléments de O, que

$$d(x_n, x) \to 0 \Leftrightarrow d_O(x_n, x) \to 0 .$$

Il nous reste à montrer que (d_O) est complète ; si (x_n) est une suite d_O-Cauchy, alors x_n tend vers $x \in X$, et il est facile de vérifier par l'absurde qu'on doit

avoir $x \in O$ (sinon $d(x_n, X \setminus O)$ tend vers 0 et $(1/d(x_n, X \setminus O))$ ne peut pas être de Cauchy dans $\mathbb{R}$ [4]).
Si maintenant $O = \cap_{n \geq 0} O_n$, alors on peut utiliser la même idée et définir cette fois

$$d_O(x,y) = d(x,y) + \sum_{n \geq 0} \min\left(2^{-n}, \left|\frac{1}{d(x, X \setminus O_n)} - \frac{1}{d(y, X \setminus O_n)}\right|\right)$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que ceci définit bien une distance complète compatible avec la topologie de O. □

On va voir qu'en fait le théorème d'Alexandrov admet une réciproque. Avant cela, il nous faut analyser les prolongements par continuité de fonctions continues.

Définition 2.22. Soit X, Y deux espaces métriques, $A \subseteq X$ et $f\colon A \to Y$ une fonction. Pour tout $x \in \overline{A}$ on définit l'*oscillation* de f en x par la formule

$$\omega(f,x) = \inf_{\varepsilon > 0} \left(\sup\left(\{d_Y(f(x_1), f(x_2))\colon x_i \in A \text{ et } d_X(x, x_i) < \varepsilon\}\right)\right)$$

On vérifie immédiatement que f est continue en $x \in A$ si, et seulement si, $\omega(f,x) = 0$; de même, si $x \in \overline{A} \setminus A$ alors si Y est complet f se prolonge par contiuité en x si, et seulement si, $\omega(f,x) = 0$.

Théorème 2.23. (Kuratowski)
Soit X, Y deux espaces métriques, $A \subseteq X$, et $f\colon A \to Y$ une fonction continue. On suppose que Y est complet ; alors il existe une partie B de X telle que $A \subseteq B$, B soit G_δ dans X et f s'étende en une fonction continue $\tilde{f}\colon B \to Y$.

Preuve.
Il nous suffit de prouver que $B = \{x \in \overline{A}\colon \omega(f,x) = 0\}$ est G_δ dans $\overline{A}$, car alors B sera aussi G_δ dans X et f se prolonge par continuité à B.
Fixons $r > 0$; par définition, on voit que si $\omega(f,x) < r$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'on ait $d(f(x_1), f(x_2)) < r$ pour tout $x_1, x_2 \in B(x, \varepsilon[$.
En utilisant l'inégalité triangulaire, on voit donc que pour tout $x' \in B(x, \varepsilon[$ on a $\omega(f,x) < r$.
Autrement dit, pour tout r l'ensemble $A_r = \{x \in \overline{A}\colon \omega(f,x) < r\}$ est ouvert dans $\overline{A}$; par conséquent, $B = \bigcap_n A_{1/n}$ est G_δ dans $\overline{A}$, donc aussi dans X. □

[4] Ici on utilise la complétude de $\mathbb{R}$.

Théorème 2.24. (Laverentiev) *Soit* X, Y *deux espaces métriques complets,* $A \subseteq X$ *et* $f : A \to X$ *un homéomorphisme sur son image. Alors il existe deux* G_δ $\tilde{A} \subseteq X$, $\tilde{B} \subseteq Y$ *tels que* $A \subseteq \tilde{A}$, $B \subseteq \tilde{B}$, *et* f *s'étende en un homéomorphisme de* $\tilde{A}$ *sur* $\tilde{B}$.

Preuve
Soit $f' : A' \to Y$ une fonction prolongeant par continuité f à un G_δ de X, et $g : B \to X$ une fonction prolongeant par continuité f^{-1} à un G_δ de Y.
Définissons maintenant $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ en posant :

$$\tilde{A} = \{x \in A' : f'(x) \in B \text{ et } g(f'(x) = x\} \; ; \; \tilde{B} = \{y \in B : g(y) \in A' \text{ et } f'(g(y)) = y\}$$

On a bien sûr $A \subseteq \tilde{A}$, $B \subseteq \tilde{B}$, et d'autre part $f'(\tilde{A}) = \tilde{B}$, $g(\tilde{B}) = \tilde{A}$. Par conséquent f' est un homéomorphisme de $\tilde{A}$ sur $\tilde{B}$, qui prolonge f.
Ne reste à démonter que le fait que $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont G_δ ; par symétrie, il suffit de montrer que $\tilde{A}$ est G_δ dans X.
Cela vient du fait que $\Gamma = \{(g(y), y) : y \in B\}$ est fermé dans $X \times B$, donc G_δ dans $X \times Y$; si l'on note φ l'application de A' dans $X \times Y$ définie par $\varphi(x) = (x, f'(x))$ alors on a

$$\tilde{A} = \varphi^{-1}(\Gamma) \; .$$

Comme l'image réciproque d'un G_δ par une fonction continue est un G_δ, ceci termine la démonstration. □

Corollaire 2.25. Soit X un espace métrique complet. Alors $A \subseteq X$, muni de la topologie induite, est complètement métrisable si, et seulement si A est G_δ dans X.

Preuve.
On a déjà vu une des implications ; pour l'autre, supposons que A est complètement métrisable eet appliquons le théorème de Laverentiev avec $Y = A$ et $f : A \to A$ égale à l'identité. Alors f doit s'étendre en un homéomorphisme d'un G_δ de X sur un G_δ de A contenant A, c'est-à-dire... A. Donc il n'y a pas de place pour étendre f et, par conséquent, A est G_δ dans X. □

Exercice 2.26. Soit X un espace métrisable. Montrer que X est complètement métrisable ssi X est G_δ dans tout sur-espace métrique ssi X est G_δ dans son complété.

Théorème 2.27. (Théorème de Baire) . *Soit* (X, d) *un espace métrique complet et* $(O_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ *des ouverts denses. Alors* $\cap O_n$ *est dense dans* X.

Preuve.
Soit U un ouvert de X. Par récurrence, on peut, en utilisant la densité des O_i et le fait qu'une intersection finie d'ouverts est ouverte, construire une suite d'ouverts V_n tels que :

(a) $V_n \subseteq O_n \cap U$;

(b) $\overline{V_{n+1}} \subseteq V_n$;

(c) $\text{diam}(V_n) \to 0$.

Alors par complétude de X on sait que $\cap V_n = \cap \overline{V_n} \neq \emptyset$, ce qui produit donc un élément de $\cap V_n \cap U \subseteq \cap O_n \cap U$; par conséquent $\cap V_n$ est dense. □

Remarquons que le théorème de Baire st souvent énoncé sous la forme "soit X un espace métrique complet *ou localement compact* ; alors toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense". Si l'on se place dans le contexte métrique [5], l'hypothèse "localement compact" n'apporte rien : en effet, tout espace métrisable et localement compact admet une distance compatible complète, ce qui est une conséquence de l'exercice suivant.

Exercice 2.28. (cf Srivastava p62).
Soit X un espace métrisable et $Y \subseteq X$ un sous-ensemble localement compact et dense. Alors Y est ouvert dans X.

En particulier, si d est une distance quelconque induisant la topologie d'un espace localement compact X, alors X est ouvert dans son d-complété et par conséquent il existe une distance compatible complète sur X.

Le théorème de Baire est fréquemment utilisé sous la forme suivante : si (X, d) est complet et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable de fermés telle que $\cup F_n = X$, alors l'un des F_n est d'intérieur non vide. Pour voir que les deux versions du théorème sont équivalentes, il suffit de remarquer qu'un fermé est d'intérieur vide si et seulement si son complémentaire est un ouvert dense.

Exercice 2.29. Soit X un espace dans lequel le théorème de Baire s'applique. Montrer qu'alors le théorème de Baire s'applique à tout ouvert de X.

Exercice 2.30. Soit (X, d) un espace métrique complet.
- Utiliser la remarque ci-dessus pour prouver la version suivante du théorème de Baire : si (O_n) est une famille dénombrable d'ouverts denses dans (X, d), alors pour tout ouvert O de X $O \cap (\cap_n O_n)$ est dense dans O.

[5] Savez-vous construire un espace localement compact mais non métrisable ?

– Soit (F_n) une famille dénombrable de fermés telle que $\cup F_n = X$. Prouver que la réunion des intérieurs des F_n est dense dans X.

Ce théorème est particulièrement utile pour prouver l'existence d'objets satisfaisant certaines propriétés ; c'est la "méthode de la catégorie",qui permet en particulier d'obtenir une "inversion des quantificateurs" : transformer un énoncé de la forme "Quel que soit (...) il existe (...)" en un énoncé "Il existe (...) quel que soit (...)".

Exemple. On va prouver que tout compact dénombrable et métrisable [6] est homéomorphe à un compact de $\mathbb{R}$.
Soit $K = \{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un tel compact ; considérons l'ensemble X des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$, muni de la distance du sup. Cet espace est complet (exercice classique).
Pour toute paire $(i \neq j)$ peut définir $X_{i,j} = \{f \in X : f(k_i) = f(k_j)\}$. C'est un sous-espace vectoriel fermé de X, et on vérifie facilement, puisque K est métrique, que $X_{i,j} \neq X$. Donc $X_{i,j}$ est pour tout $i \neq j$ un fermé d'intérieur vide, ce dont on déduit en appliquant le théorème de Baire à X qu'il existe $f \in X \setminus \cup X_{i,j}$.
Une telle fonction f vérifie $f(k_i) \neq f(k_j)$ pour tout $i \neq j$, autrement dit f est une injection continue de K dans $\mathbb{R}$. Par conséquent f est un homéomorphisme sur son image. □

Exercice 2.31. – Montrer qu'un espace vectoriel séparable, normé, complet sur $\mathbb{R}$ est de dimension (algébrique) finie ou non dénombrable.
– Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que pour tout x il existe n tel que $f^{(n)}(x) = 0$. Montrer qu'alors f est un polynôme [7].

2.3 Schémas et théorèmes de transfert

Définition 2.32. Soit X un espace topologique. On dit que $x \in X$ est un *point isolé* si $\{x\}$ est ouvert dans X, et X est dit *parfait* si X n'a pas de points isolés.
On dit que $x \in X$ est un *point de condensation* si tout ouvert contenant x est non dénombrable.

[6] l'hypothèse "métrisable" est redondante, mais on n'a pas les outils de topologie pour le montrer simplement.

[7] Le résultat est encore valide si l'on suppose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, mais c'est nettement plus dur à établir !

Théorème 2.33. (Cantor-Bendixson) *Soit X un espace polonais. Alors X s'écrit de manière unique $X = P \cup D$, où P est parfait et D est ouvert dénombrable.*

Preuve.
Définissons $P = X^* = \{x \in X : x \text{ est un point de condensation}\}$, $D = X \setminus P$. Fixons une base dénombrable (U_n) d'ouverts de X ; on voit que D est la réunion des U_n qui sont dénombrables. Donc D est ouvert et dénombrable. De plus, si $x \in P$, alors tout ouvert contenant x est non dénombrable, donc contient un élement qui n'appartient pas à D. Ceci prouve qu'aucun élément de P n'est isolé, et donc P est parfait.
Pour voir que la décomposition est unique, notons que si un polonais Y a un ouvert U dénombrable, alors U s'écrit comme une réunion dénombrable de singletons, qui sont fermés. D'après le théorème de Baire, U contient un singleton ouvert, autrement dit un point isolé. Par conséquent si P est un polonais parfait alors tous les ouverts de P sont non dénombrables, ce qui permet de voir que $P = P^*$. Soit alors $X = P_1 \cup D_1$ une décomposition comme dans l'énoncé du théorème ; on a $X^* = P = P_1$, ce qui permet de conclure. □

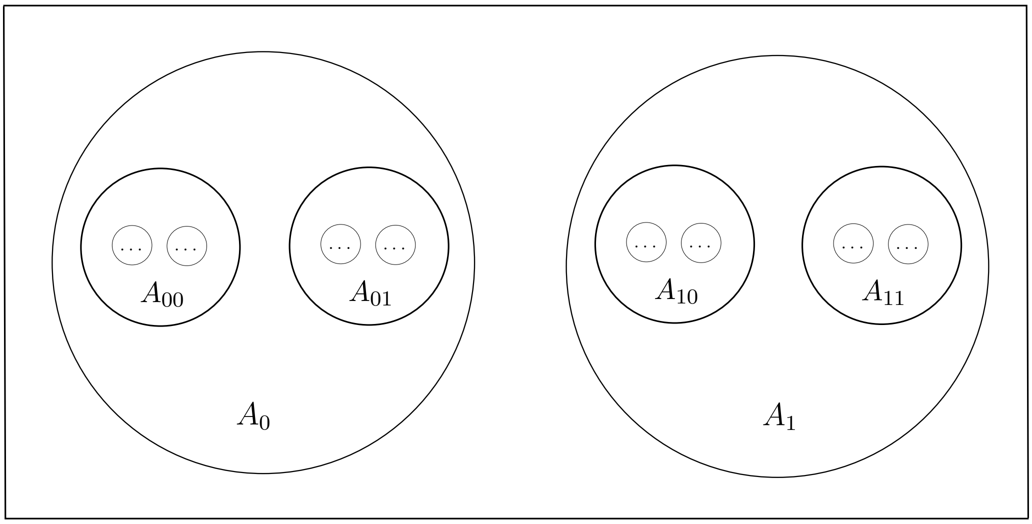
On a déjà dit que les espaces de Baire et de Cantor étaient fréquemment utilisés pour établir les théorèmes de théorie descriptive ; dans cette section, on va maintenant expliquer l'outil qui permet de passer de résultats établis pour l'espace de Baire ou de Cantor à des résultats valides pour tous les espace polonais : ce sont les *schémas*.

Définition 2.34. Un *schéma de Cantor* sur un ensemble X est une famille $(F_s)_{s \in 2^{<\mathbb{N}}}$ de sous-ensembles non vides de X tels que :
(a) $F_{s^\frown 0} \cap F_{s^\frown 1} = \emptyset$ pour tout $s \in 2^{<\mathbb{N}}$.
(b) $\overline{F_{s^\frown i}} \subseteq F_s$ pour tout $s \in 2^{<\mathbb{N}}$ et tout $i \in \{0, 1\}$.
(c) $\mathrm{diam}(F_{x_{|n}}) \to 0$ pour tout $x \in 2^{\mathbb{N}}$.

Comme leur nom l'indique, ces schémas sont très utiles pour travailler avec l'ensemble de Cantor. Par exemple :

Théorème 2.35. *Soit X un espace polonais parfait et non vide. Alors il existe une injection continue de $\mathcal{C}$ dans X.*

Remarquons, avant de prouver ce théorème, qu'on en déduit que tout polonais parfait est de cardinal supérieur à $2^{\aleph_0}$, et donc de cardinal égal à $2^{\aleph_0}$. En utilisant le théorème de Cantor-Bendixson, on obtient qu'un espace polonais est soit au plus dénombrable soit de cardinal $2^{\aleph_0}$, autrement dit l'hypothèse



Début d'un schéma de Cantor

du continu est "vraie pour les polonais".

Preuve.
Soit d une distance complète sur X ; on peut construire un schéma de Cantor (U_s) sur X tel que U_s soit ouvert-fermé, non vide, et de diamètre $\leq 2^{-|s|}$ pour tout s (remarquons que dans un espace parfait tout ouvert est parfait !). Alors on peut utiliser le schéma pour définir une injection de $\mathcal{C}$ dans X en définissant

$$\{f(x)\} = \bigcap U_{x_{|n}} .$$

Cette fonction est bien définie puisque l'intersection d'une suite décroissante de fermés dont le diamètre tend vers 0 est un singleton. Pour voir que f est continue, il suffit de remarquer que si $x, y \in \mathcal{C}$ ont leurs n premières coordonnées égales alors $d(f(x), f(y)) \leq 2^{-n}$. $\square$

Théorème 2.36. (Brouwer) *Soit K un espace compact métrisable, parfait, non vide et zéro-dimensionnel. Alors K est homéomorphe à l'espace de Cantor (et réciproquement, $\mathcal{C}$ a bien ces propriétés !)*

Preuve.
Soit K un espace comme dans l'énoncé du théorème. Alors on peut construire par récurrence un schéma de Cantor $(K_S)_{s\in 2^{\mathbb{N}}}$ tel que
– $K_\emptyset = K$.
– K_s est ouvert-fermé pour tout s.
– $K_s = K_{s\frown 0} \cup K_{s\frown 1}$.

C'est un bon exercice de se convaincre que tout ce dont on a besoin pour pouvoir effectuer cette construction, c'est la propriété suivante : étant donné un ouvert-fermé non vide $U \subseteq K$ et $\varepsilon > 0$, il existe $n > 1$ et des ouverts-fermés non vides $U_1, \ldots, U_n$ de diamètre $\leq \varepsilon$ et dont la réunion est égale à U.
La propriété ci-dessus est une conséquence du fait que, comme U est parfait et 0-dimensionnel, tout ouvert-fermé non vide est la réunion de ses ouverts-fermés de diamètre $\leq \varepsilon$, et en est donc une réunion finie par compacité.
On laisse en exercice le fait de justifier précisément la construction du schéma ; une fois celui-ci construit, on peut, pour tout $x \in \mathcal{C}$, définir $f(x)$ par $\{f(x)\} = \cap_{n\in\mathbb{N}} K_{x_{|n}}$. Les conditions sur le schéma assurent que f est bijective et continue. Donc K est homéomorphe à $\mathcal{C}$. □

Pour étudier l'espace de Baire, on utilise une notion de schéma adaptée :

Définition 2.37. Un *schéma de Lusin* sur un ensemble X est une famille $(F_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ de sous-ensembles (éventuellement vides) de X tels que :
(a) $F_{s\frown i} \cap F_{s\frown j} = \emptyset$ pour tout $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ et tout $i \neq j \in \mathbb{N}$.
(b) $\overline{F_{s\frown i}} \subseteq F_s$ pour tout $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ et tout $i \in \mathbb{N}$.
On dit que le schéma est *convergent* s'il satisfait de plus :
(c) $\mathrm{diam}(F_{x_{|n}}) \to 0$ pour tout $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Etant donné un schéma de Lusin convergent (F_s), notons

$$D = \{x \in \mathcal{N} \colon \forall n \ F_{x_{|n}} \neq \emptyset\} \ .$$

Cet ensemble est fermé, et on peut définir une fonction $f \colon D \to X$ en posant

$$\{f(x)\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{x_{|n}} \ .$$

Cette fonction est continue, et la définition d'un schéma impose de plus que f est injective.

A l'aide d'un schéma de Lusin, on peut établir le résultat suivant :

Théorème 2.38. *Soit X un espace polonais. Alors il existe un fermé de $\mathcal{N}$ et une bijection continue $f \colon F \to X$. Par conséquent, il existe une surjection continue de $\mathcal{N}$ sur X.*

Preuve.
Etant donné ce qu'on a dit plus haut sur les schémas de Lusin, il suffit de

prouver qu'on peut construire un schéma de Lusin convergent (F_s) satisfaisant de plus $F_\emptyset = X$ et, pour tout $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$:

$$F_s = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{s\frown n} \ .$$

Pour assurer la condition (b) de la définition d'un schéma de Lusin, il serait agréable de travailler avec des fermés ; malheureusement, il n'est en général pas possible de construire un fermé d'un polonais comme réunion dénombrable de "petits" fermés, comme le montre par exemple le cas de $\mathbb{R}$.
On va donc construire notre schéma avec des ensembles F_σ, et pour cela il suffit de prouver qu'étant donné un F_σ $F \subseteq X$ et $\varepsilon > 0$ on peut écrire $F = \bigsqcup F_i$, où chaque F_i est un F_σ (éventuellement vide) de diamètre $\leq \varepsilon$ et tel que $\overline{F_i} \subseteq F$.
Commençons par expliquer comment gérer la condition (c) : fixons une suite (x_i) dense dans F, et posons $B_i = B(x_i, \varepsilon] \cap F$. Chaque B_i est F_σ, de diamètre $\leq \varepsilon$, et si on pose

$$C_i = B_i \setminus \bigcup_{j<i} B_j$$

alors on a écrit F comme une réunion disjointe de F_σ de diamètre $\leq \varepsilon$.
Pour assurer en même temps la condition (b) et la condition (c), commençons par écrire $F = \bigcup A_n$, où chaque A_n est fermé. Puis posons

$$B_n = A_n \setminus \bigcup_{i<n} A_i \ .$$

Alors chaque B_n est F_σ, les B_n sont disjoints et recouvrent F, et de plus

$$\overline{B_n} \subseteq \overline{A_n} = A_n \subseteq F \ .$$

On sait que chaque B_n peut s'écrire comme une réunion dénombrable de F_σ disjoints $C_{n,i}$, où chaque $C_{n,i}$ est de plus de diamètre $\leq \varepsilon$. On a alors

$$F = \bigcup_{n,i\in\mathbb{N}} C_{n,i} \ .$$

Les $C_{n,i}$ remplissent toutes les conditions recherchées, ce qui termine la preuve du théorème. $\square$

De même que pour l'espace de Cantor, on peut obtenir à l'aide de schémas une caractérisation topologique de l'espace de Baire.

Exercice 2.39. *(Alexandrov-Urysohn)*
L'espace de Baire est, à homéomorphisme près, l'unique espace polonais zéro-dimensionnel dont tous les compacts sont d'intérieur vide. [8]

2.4 Ensembles Baire-mesurables

Définition 2.40. Soit X un ensemble. Un *σ-idéal* est une famille $\mathcal{I}$ de parties de X ne contenant pas $\{X\}$ telle que
– $\forall A, B \subseteq X$ $(A \in \mathcal{I}$ et $B \subseteq A) \Rightarrow (B \in \mathcal{I})$
– $\forall (A_n) \in \mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}}$: $(\forall n\ A_n \in \mathcal{I}) \Rightarrow (\cup A_n \in \mathcal{I})$.

Un exemple instructif de σ-idéal est donné par la famille des ensembles de mesure nulle pour une mesure donnée sur X (par ex, la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$). On pense en général à un σ-idéal comme à une notion de "petitesse" : un ensemble est petit (selon $\mathcal{I}$) s'il appartient à $\mathcal{I}$. Bien sûr, la notion de petitesse considérée dépend de l'idéal !
Si $\mathcal{I}$ est un σ-idéal, on dira que A et B sont *égaux modulo* $\mathcal{I}$ si $A \Delta B \in \mathcal{I}$. Ainsi, un ensemble est égalà $\emptyset$ modulo $\mathcal{I}$ si, et seulement si, il appartient à $\mathcal{I}$. On voit aussi que l'égalité modulo $\mathcal{I}$ est une relation transitive.
On n'étudiera pas dans l'immédiat les σ-idéaux en général, mais on va constamment utiliser un σ-idéal particulier : celui qui est formé par les *ensembles maigres*.

Définition 2.41. Soit X un espace topologique. On dit que $Y \subseteq X$ est *maigre* si Y est contenu dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide ; on dit que Y est *comaigre* si le complémentaire de Y est maigre.

Par exemple, un ensemble dénombrable est maigre dans X dès que X est séparé ; l'ensemble triadique de Cantor est maigre dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des irrationnels est comaigre dans $\mathbb{R}$.
Il est clair que les ensembles maigres forment un σ-idéal ; remarquons que dans un espace polonais un ensemble ne peut pas être à la fois maigre et comaigre : si $X = Y_1 \cup Y_2$ où Y_1 et Y_2 sont maigres tous les deux, alors X est recouvert par une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide, ce qui contredit le théorème de Baire.
Dans la suite on notera $A =^* B$ pour signifier que $A \Delta B$ est maigre. Tout comme dans la théorie de Lebesgue, on a besoin de se restreindre à certains ensembles "sympathiques" (l'analogue des ensembles mesurables) pour utiliser le σ-idéal formé par les ensembles maigres.

[8] il s'agit de construire un schéma de Lusin, en utilisant (et démontrant) le fait que tout ouvert-fermé d'un espace vérifiant les conditions du théorème peut s'écrire comme une réunion dénombrable d'ouvert-fermés de petit diamètre.

Définition 2.42. Soit X un polonais. Un sous-ensemble A est *Baire-mesurable* s'il existe un ouvert $O \subseteq X$ tel que $A =^* O$ (de manière équivalente, $A \setminus O$ et $O \setminus A$ sont tous les deux maigres).

Proposition 2.43. *Soit X un espace topologique. Alors la famille des sous-ensembles Baire-mesurables de X est une σ-algèbre ; plus précisément, c'est la σ-algèbre engendrée par les ouverts et les ensembles maigres.*
Rappelons que la tribu borélienne *sur X est la σ-algèbre engendrée par les ouverts ; cette proposition entraîne donc en particulier que tout borélien est Baire-mesurable.*

Preuve.
Supposons que $A =^* O$ pour un certain ouvert O. Notons déjà que $\overline{O} \setminus O$ est maigre, donc $X \setminus O =^* X \setminus \overline{O}$. De plus $(X \setminus A)\Delta(X \setminus O) = A\Delta O$ est maigre donc on a $X \setminus A =^* X \setminus O = *X \setminus \overline{O}$. Comme $X \setminus \overline{O}$ est ouvert, on vient de montrer que $X \setminus A$ est Baire-mesurable.
Soit maintenant une suite (A_n) de sous-ensembles Baire-mesurables de X, et (O_n) une suite d'ouverts tels que $A_n =^* O_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\cup O_n$ est ouvert, et

$$\left(\bigcup A_n\right) \Delta \left(\bigcup O_n\right) \subseteq \left(\bigcup (A_n \Delta O_n)\right) .$$

Comme une réunion dénombrable d'ensembles maigres est maigre, on vient de prouver que $\cup A_n =^* \cup O_n$, et donc en particulier que $\cup A_n$ est Baire-mesurable. □

Exercice 2.44. Soit X un polonais, et $B \subseteq X$ une partie non maigre et Baire-mesurable. Montrer qu'il existe un ouvert non vide O tel que B soit comaigre dans O.

Exercice 2.45. (Première loi du $0-1$ topologique)
Soit X un polonais, et G un groupe d'homéomorphismes agissant *topologiquement transitivement*, c'est-à-dire que pour tous ouverts $U, V \subset X$ il existe $g \in G$ tel que $g(U) \cap V \neq \emptyset$. Montrer qu'alors tout ensemble G-invariant et Baire-mesurable est soit maigre soit comaigre.

Avant de pousser plus loin notre étude des ensembles Baire-mesurables, notons tout de suite que, comme dans le contexte mesuré, l'axiome du choix permet de construire des ensembles n'yant pas cette propriété (il est d'ailleurs consistant avec ZF que tout ensemble de réels soit Baire-mesurable).

Proposition 2.46. *Il existe un sous-ensemble $B \subseteq \mathbb{R}$ qui n'est pas Baire-mesurable.*

Preuve.
On peut prouver de différentes façons l'existence d'un tel ensemble ; nous allons établir l'existence d'un *ensemble de Bernstein*, c'est-à-dire un sous ensemble B de $\mathbb{R}$ tel que ni B ni son complémentaire ne contiennent d'ensemble parfait et fermé dans $\mathbb{R}$.
Un tel ensemble ne peut être Baire-mesurable : en effet, B ou $\mathbb{R} \setminus B$ est non maigre ; supposons sans perte de généralité que B est non maigre. Alors il existe un intervalle ouvert non vide $I \subseteq \mathbb{R}$ tel que $B \cap I$ soit comaigre dans I, et par conséquent $B \cap I$ contient un G_δ dense de I, qui est un sous-ensemble polonais non maigre (donc non dénombrable) de I contenu dans B.
Donc B contient un sous-ensemble polonais non dénombrable, et on a vu que cela implique que B contient une copie de $\mathcal{C}$, donc B contient un sous-ensemble fermé parfait, ce qui contredit sa définition.
Reste à voir comment construire B ; remarquons tout d'abord que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une union dénombrable d'intervalles ouverts à extrémités rationnelles, donc il y a au plus $2^{\aleph_0}$ ouverts dans $\mathbb{R}$. L'inégalité réciproque étant évidente, on en déduit qu'il y a exactement $2^{\aleph_0}$ ouverts dans $\mathbb{R}$, donc aussi $2^{\aleph_0}$ fermés, et donc au plus $2^{\aleph_0}$ fermés parfaits. Comme pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$ $[x, x+1]$ est fermé parfait, il y a donc exactement $2^{\aleph_0}$ fermés parfaits dans $\mathbb{R}$.
A l'aide de l'axiome du choix, énumérons les fermés parfaits de $\mathbb{R}$ sous la forme $(P_\xi)_{\xi<2^{\aleph_0}}$ puis construisons deux suites transfinies de réels deux à deux distincts a_ξ, b_ξ vérifiant $a_\xi, b_\xi \in P_\xi$ pour tout $\xi < 2^{\aleph_0}$ (on peut continuer à chaque étape puisque chaque P_ξ est de cardinal $2^{\aleph_0}$ et on a choisi strictement moins de $2^{\aleph_0}$ éléments). Alors $B = \{a_\xi \colon \xi < 2^{\aleph_0}\}$ est un ensemble de Bernstein. □

Exercice 2.47. Montrer que tout polonais non dénombrable contient un sous-ensemble qui n'est pas Baire-mesurable.

Exercice 2.48. Soit X et Y deux polonais et $A \subseteq X$ un sous-ensemble Baire-mesurable. Montrer que $A \times Y$ est Baire-mesurable dans $X \times Y$.

L'analogie mesure/catégorie se prolonge, puisqu'on peut démontrer un analogue du théorème de Fubini ; si X, Y sont deux ensembles et $A \subseteq X \times Y$, alors pour tout $x \in X$ on pose $A_x = \{y \in Y \colon (x, y) \in A\}$ et de même on définit pour tout $y \in Y$ $A^y = \{x \in X \colon (x, y) \in A\}$. On appelle $\pi_x \colon X \times Y \to X$ la projection sur X, et π_Y la projection sur Y.

Théorème 2.49. (Kuratowski-Ulam)
Soit X, Y deux espaces polonais, et $A \subseteq X \times Y$ un ensemble Baire-mesurable. Alors :

(1) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) A est comaigre.

(b) L'ensemble $\{x \in X \colon A_x$ est comaigre$\}$ est comaigre dans X.

(c) L'ensemble $\{y \in Y \colon A^y$ est comaigre$\}$ est comaigre dans Y.

(2) L'ensemble $\{x \in X \colon A_x$ est Baire-mesurable$\}$ est comaigre dans X.

(3) L'ensemble $\{y \in Y \colon A^y$ est Baire-mesurable$\}$ est comaigre dans Y.

Une conséquence immédiate de ce théorème est que, si $A \subseteq X \times Y$ est maigre, alors A_x (resp. A^y) est maigre pour un ensemble comaigre de $x \in X$ (resp. $y \in Y$).

Preuve.

Il suffit de montrer que (2) et $(a) \Leftrightarrow (b)$ sont vraies. On va commencer par prouver que $(a) \Leftrightarrow (b)$.

$\underline{(a) \Rightarrow (b)}$:

Commençons par traiter le cas où A est ouvert. Fixons une base d'ouverts (U_n) de la topologie de Y et définissons pour tout entier n un ouvert V_n par

$$V_n = \pi_X(A \cap (X \times U_n)) = \{x \in X \colon A_x \cap U_n \neq \emptyset\} \ .$$

On va montrer que V_n est dense pour tout n ; comme par définition on a $U_n \cap A_x \neq \emptyset$ pour tout $x \in \cap_n V_n$, ceci implique que pour tout $x \in \cap V_n$ A_x est un ouvert dense. Par conséquent prouver que chaque V_n est dense suffira à établir $(a) \Rightarrow (b)$ dans le cas particulier où A est ouvert.

Soit donc n un entier, et U un ouvert de X tel que $V_n \cap U = \emptyset$; la définition de V_n assure alors que

$$\forall x \in U \, \forall y \in U_n \ (x, y) \notin A \ .$$

Ainsi, l'ouvert $U \times U_n$ est disjoint de l'ouvert dense A, ce qui n'est possible que si $U \times U_n = \emptyset$, c'est-à-dire si $U = \emptyset$. Donc V_n est dense dans X.

Traitons maintenant le cas général. Soit donc $A \subseteq X \times Y$ une partie comaigre, et fixons une suite d'ouverts denses (U_n) de $X \times Y$ tels que $\cap U_n \subseteq A$. Alors pour tout n l'ensemble $\{x \in X \colon (U_n)_x$ est comaigre$\}$ est comaigre, et donc l'ensemble $\{x \in X \colon (\cap U_n)_x$ est comaigre$\}$ est comaigre. Puisque $(\cap U_n)_x \subseteq A_x$, on en déduit que $\{x \in X \colon A_x$ est comaigre$\}$ est comaigre, ce qui prouve que $(a) \Rightarrow (b)$.

On déduit de $(a) \Rightarrow (b)$ que si $A \subseteq X \times Y$ est Baire-mesurable et maigre, alors $\{x \in X \colon A_x$ est maigre$\}$ est comaigre.

$\underline{(b) \Rightarrow (a)}$:

Il existe un ouvert U tel que $A \Delta U$ soit maigre ; supposons par l'absurde que U n'est pas dense. Alors il existe des ouverts non vides $V \subseteq X$, $W \subseteq Y$ tels que $U \cap (V \times W) = \emptyset$.

On sait, d'après $(a) \Rightarrow (b)$, que l'ensemble $\{x \in X \colon U_x \Delta A_x \text{ est maigre}\}$ est comaigre, donc est en particulier comaigre dans V ; puisque pour tout $x \in V$ $U_x \cap W = \emptyset$, on en déduit que $\{x \in V \colon A_x \text{ est maigre dans } W\}$ est comaigre dans V. Mais alors par hypothèse sur A il doit exister $x \in V$ tel que A_x soit à la fois comaigre et maigre dans W, ce qui contredit le théorème de Baire.
Preuve de (2) :
Soit $U \subseteq X \times Y$ un ouvert tel que $A \Delta U$ soit maigre. Alors on a que $\{x \in X \colon (A\Delta U)_x \text{ est maigre}\}$ est comaigre. Puisque U_x est ouvert pour tout x et $(A\Delta U)_x = A_x \Delta U_x$, ceci prouve que (1) est vraie. □

Soit maintenant X un espace polonais, et $P \subseteq X$ un sous-ensemble de X. On notera dans la suite

$$\forall^* x \in X \ P(x)$$

pour signifier que l'ensemble des x satisfaisant P est comaigre, et

$$\exists^* x \in X \ P(x)$$

pour signifier que l'ensemble des x satisfaisant P est non-maigre.

Alors le théorème de Kuratowski-Ulam peut se résumer ainsi : si $P \subseteq X \times Y$ est Baire-mesurable, alors

– $\forall^* x \ P_x$ est Baire-mesurable
– $(\forall^*(x,y) \ P(x,y)) \Leftrightarrow (\forall^* x \forall^* y P(x,y)) \Leftrightarrow (\forall^* y \forall^* x P(x,y))$
– $(\exists^*(x,y) \ P(x,y)) \Leftrightarrow (\exists^* x \exists^* y P(x,y)) \Leftrightarrow (\exists^* y \exists^* x P(x,y))$

On utilisera ces propriétés sans plus de justification dans la suite.

On a vu dans le chapitre 1 que, modulo l'axiome du choix, $\mathbb{R}$ peut être bien ordonné ; on se doute qu'un bon ordre sur $\mathbb{R}$ est assez étrange. Le théorème suivant justifie cette intuition.

Théorème 2.50. *Soit $<$ un bon ordre sur $\mathbb{R}$. Alors $<$, vu comme sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, n'est pas Baire-mesurable.*

Preuve.
Commençons par traiter le cas où $<$ est maigre ; alors d'après le théorème de Kuratowski-Ulam appliqué à $\{(x,y) \colon x < y\}$ on a que

$$\forall^* x \forall^* y \ \neg(x < y) \text{ et } \forall^* y \forall^* x \ \neg(x < y).$$

Par conséquent,

$$\forall^* x \forall^* y \ y = x$$

Ceci entraînerait qu'il existe x tel que $\{x\}$ est comaigre, ce qui paraît somme toute relativement peu raisonnable.
Supposons maintenant que $<$ est non-maigre ; alors il existe un ensemble non maigre de x tels que $\{y\colon y < x\}$ est non maigre et Baire-mesurable.
Appelons x_0 le plus petit tel x et notons $Y = \{y\colon y < x_0\}$, puis posons $<'=<_{|Y}= \{(y, y') \in Y^2\colon y < y'\}$.
Notons que $Y^2 = (X \times Y) \cap (Y \times X)$, ce dont on déduit que Y^2, et donc $<'$, est Baire-mesurable.
Par définition de $<'$, on a

$$\forall^* x \forall^* y \ \neg(y <' x)$$

Donc aussi

$$\forall^* y \ \forall^* x \ \neg(y <' x) \ .$$

Comme Y est non maigre, on obtient qu'il existe $x \in Y$ tel que $\{y \in Y : y < x\}$ et $\{y \in Y : x < y\}$ sont tous deux maigres, mais alors Y lui-même est maigre, ce qui est une contradiction. □

Exercice 2.51. Soit (X_n) une suite de polonais. On dit que $A \subseteq \prod X_n$ est un ? si

$$\forall x, y \in \prod X_n \ (x \in A \text{ et } y(n) = x(n) \text{ sauf pour un nombre fini de } n) \Rightarrow y \in A$$

Prouver qu'un ensemble ? Baire-mesurable est soit maigre soit comaigre.

Exercice 2.52. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$, qu'on peut voir comme une partie de $2^{\mathbb{N}}$. Montrer que $\mathcal{U}$ n'a pas la propriété de Baire.

Exercice 2.53. Montrer qu'un bon ordre sur $\mathbb{R}$ n'est pas Lebesgue-mesurable.

Notes bibliographiques.
Ce chapitre s'inspire essentiellement du livre de A.S Kechris [Kec95], et un peu du livre de S.M Srivastava [Sri98] . En ce qui concerne les notions et résultats de topologie métrique qui sont utilisés sans démonstration dans le cours, le Cours de topologie de G. Choquet [Cho69] est une bonne référence, ainsi que le cours de Kuratowski [KM] ou celui de Moschovakis [Mos06] déjà mentionnés en fin de premier chapitre.
Enfin, le lecteur curieux d'explorer les liens entre mesure et catégorie est appelé à consulter le très beau livre de J. Oxtoby [Oxt80] sur le sujet.

Chapitre 3

Groupes polonais

3.1 Définition, exemples

Définition 3.1. Un *groupe topologique* $(G, .)$ est un groupe muni d'une topologie pour laquelle les opérations $(g, h) \mapsto g.h$ et $g \mapsto g^{-1}$ sont continues. Un *groupe polonais* est un groupe topologique dont la topologie est polonaise.

On s'intéressera dans la suite essentiellement aux groupes polonais.

Exemple. $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, les espaces vectoriels normés complets sont des groupes polonais abéliens.

Exemple. Soit $\mathcal{S}_\infty \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ le groupe des permutations de $\mathbb{N}$. Munissons $\mathcal{S}_\infty$ de la topologie induite par la topologie produit, c'est-à-dire voyons $\mathcal{S}_\infty$ comme un sous-ensemble de $\mathcal{N}$. Alors :

$$\forall x \in \mathcal{N}\ (x \in \mathcal{S}_\infty) \Leftrightarrow ((\forall n \neq m\ x(n) \neq x(m)) \text{ et } (\forall n \exists m\ x(m) = n))$$

A m, n fixés les ensembles $\{x \in \mathcal{N} \colon x(n) \neq x(m)\}$ et $\{x \in \mathcal{N} \colon x(m) = n\}$ sont ouverts-fermés, ce dont on déduit que $\mathcal{S}_\infty$ est G_δ dans $\mathcal{N}$ et donc $\mathcal{S}_\infty$ est polonais ; on vérifie facilement que les opérations de groupe sont continues, donc $\mathcal{S}_\infty$ est un groupe polonais.

On vérifie facilement qu'un produit de groupes polonais est un groupe polonais ; on verra plus tard comment traiter les quotients.

Exercice 3.2. Montrer qu'un produit dénombrable de groupes polonais est un groupe polonais.

Exercice 3.3. Si $x \neq y \in \mathcal{S}_\infty$, on définit $n_{x,y}$ comme le plus petit n tel que $x(n) \neq y(n)$ et on pose $d(x, y) = 2^{-n_{x,y}}$. Montrer que d est une distance invariante à gauche qui induit la topologie de $\mathcal{S}_\infty$ mais que d n'est pas complète

(on pourra même montrer que le complété de $(\mathcal{S}_\infty, d)$ s'identifie naturellement à l'ensemble des injections de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$).
Avec les mêmes notations que ci-dessus, on pose $\tilde{d}(x,y) = d(x,y) + d(x^{-1}, y^{-1})$. Montrer que $\tilde{d}$ est une distance complète sur $\mathcal{S}_\infty$ et que $\tilde{d}$ n'est pas invariante à gauche.

Exercice 3.4. Si $\mathcal{M}$ est une structure du premier ordre d'univers $\mathbb{N}$, on peut considérer $Aut(\mathcal{M})$ comme un sous-groupe de $\mathcal{S}_\infty$. Montrer que $Aut(\mathcal{M})$ est fermé dans $\mathcal{S}_\infty$, et que tout sous-groupe fermé de $\mathcal{S}_\infty$ est de cette forme. [1]

Exercice 3.5. Soit K un métrique compact. Montrer que $Homeo(K)$, muni de la topologie de la convergence uniforme, est un groupe polonais.
Soit X un polonais localement compact. En utilisant la compactification d'Alexandrov, montrer que $Homeo(K)$, muni de la topologie compacte-ouverte, est un groupe polonais.

Comme d'habitude, le théorème de Baire nous permet d'obtenir des résultats intéressants sur les groupes polonais.

Théorème 3.6. *Soit G un groupe polonais et $H \subseteq G$ un sous-groupe qui est polonais pour la topologie induite. Alors H est fermé dans G.*
Les sous-groupes polonais de G sont donc exactement ses sous-groupes fermés.

Preuve.
La fermeture $\overline{H}$ de H est un sous-groupe fermé (donc polonais) de G, et H est un G_δ dense de $\overline{H}$. Pour tout $g \in \overline{H}$, gH est aussi un G_δ dense de $\overline{H}$ (puisque $x \mapsto g.x$ est un homéomorphisme qui laisse $\overline{H}$ stable). D'après le théorème de Baire, on a donc $H \cap gH \neq \emptyset$, c'est-à-dire $g \in H$. □

3.2 Distances invariantes à gauche et groupe complété

Commençons par établir un résultat fondamental sur la métrisabilité des groupes topologiques.

Théorème 3.7. (Birkhoff-Kakutani)
Soit G un groupe topologique. Alors G est métrisable si et seulement si G est

[1] indication : on peut rajouter à notre structure des relations correspondant aux orbites dans $\mathbb{N}^n$ sous l'action diagonale de G.

séparé et à base dénombrable de voisinages de 1*. De plus tout groupe métrisable admet une distance invariante à gauche (c'est-à-dire que ls translations à gauche sont des isométries).*

On va présenter rapidement la preuve, dont une version plus détaillée se trouve dans [Gao09].

Preuve.
Soit G un groupe séparé et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base dénombrable de voisinages de 1 ; sans perte de généralité on suppose que chaque U_n est ouvert, symétrique (en considérant $U_n \cap U_n^{-1}$) et $U_\emptyset = G$. L'idée maintenant pour définir une distance est la suivante : $g = h$ si et seulement si $g^{-1}h \in V_n$ pour tout n, par conséquent il est tentant de poser $n(g,h) = \min(\{n\colon g^{-1}h \in U_n\})$, puis $d(g,h) = 2^{-n(g,h)}$ pour tout $g \neq h$. Cette fonction est symétrique, invariante à gauche et sépare les points mais ne satisfait pas a priori l'inégalité triangulaire. On va donc devoir faire un peu de combinatoire pour remédier à cela.
A partir de (U_n), on peut définir en utilisant la continuité des opérations de groupe un nouvelle famille d'ouverts (V_n) satisfaisant les propriétés suivantes :

1. $V_\emptyset = G$; $V_{n+1} \subseteq V_n$;
2. $\forall n\, V_n \subseteq U_n$:
3. $\forall n\, V_{n+1}^3 \subseteq V_n$ et $V_n = V_n^{-1}$.

La famille $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est encore une base de voisinages de 1 ; on pose maintenant

$$\rho(g,h) = \inf\left(\{2^{-n}\colon g^{-1}h \in V_n\}\right)$$

Notons que ρ est invariante par translation à gauche, symétrique, positive, sépare les points et que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $g_0, g_1, g_2, g_3 \in G$ on a

$$(\rho(g_0,g_1) \leq \varepsilon \text{ et } \rho(g_1,g_2) \leq \varepsilon \text{ et } \rho(g_2,g_3) \leq \varepsilon) \Rightarrow \rho(g_0,g_3) \leq 2\varepsilon \qquad (*)$$

Maintenant, on peut définir notre distance d : disons qu'une suite finie $(g_0,\dots,g_n)$ d'éléments de g est un *chemin* de g_0 à g_n ; pour tout chemin $\gamma = (g_0,\dots,g_n)$ définissons sa *longueur* $l(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho(g_i,g_{i+1})$ et enfin posons, pour $g,h \in G$:

$$d(g,h) = \inf\left(\{l(\gamma)\colon \gamma \text{ est un chemin de } g \text{ à } h\}\right) .$$

Il est immédiat que d est une pseudo-distance. Pour voir que d est une distance qui induit notre topologie, on va prouver que

$$\forall g,h \in G\ d(g,h) \geq \frac{1}{2}\rho(g,h) .$$

Ceci montrera que d est une distance ; de plus, comme g_n tend vers G si et seulement si $g_n^{-1}g$ tend vers 1 si et seulement si $\rho(g_n, g)$ tend vers 1 si et seulement si $d(g_n, g)$ tend vers 0, on aura aussi montré que d induit bien la topologie de G.
Finalement, il nous suffit de démontrer que si $\gamma = (g_0, \dots, g_n)$ est un chemin de $g = g_0$ jusqu'à $h = g_n$, on a $2l(\gamma) \geq \rho(g, h)$. Raisonnons par récurrence sur n : pour $n = 1$ il n'y a rien à montrer, et pour $n = 2, 3$ c'est la propriété $(*)$ ci-dessus qui nous donne le résultat souhaité. Supposons maintenant $n \geq 4$ et le résultat démontré pour tout chemin de cardinal $k < n$.
Si $2\rho(g_0, g_1) \geq l(\gamma)$ alors en appliquant l'hypothèse de récurrence au chemin $\delta = (g_1, \dots, g_n)$, on obtient $\rho(g_1, g_n) \leq 2l(\delta) \leq l(\gamma)$. Comme il est bien clair que $\rho(g_0, g_1) \leq l(\gamma)$, la propriété (*) nous donne bien $\rho(g_0, g_n) \leq 2l(\gamma)$. On conclut de même si $2\rho(g_{n-1}, g_n) \geq l(\gamma)$.
Maintenant, si $0 \leq m \leq n-1$, appelons γ_n le chemin $(g_0, \dots, g_m)$ et γ'_n le chemin $(g_{m+1}, \dots, g_n)$. Choisissons le plus grand entier m tel que $l(\gamma_m) \leq \frac{l(\gamma)}{2}$. Etant donné ce qu'on a vu plus haut, on a $1 \leq m \leq n-2$. De plus on doit avoir

$$l(\gamma_m) \leq \frac{1}{2}l(\gamma) \text{ et } l(\gamma'_m) \leq \frac{1}{2}l(\gamma) \ .$$

En appliquant notre hypothèse de récurrence, on en déduit que

$$\frac{\rho(g_0, g_m)}{2} \leq \frac{l(\gamma)}{2} \text{ et } \rho(g_{m+1}, g_n) \leq \frac{l(\gamma)}{2}$$

Comme il est clair que $l(g_m, g_{m+1}) \leq l(\gamma)$; la propriété (*) donne finalement bien $l(g_0, g_n) \leq 2l(\gamma)$. □

Il est maintenant tentant de penser que, si G est un groupe polonais, alors G admet une distance compatible d qui soit *en même temps* invariante à gauche et complète ; comme on va le voir, ce n'est pas le cas.

Lemme 3.1. *Soit G un groupe métrisable, (g_n) une suite d'éléments de G et d, δ deux distances invariantes à gauche induisant la topologie de G. Alors (g_n) est d-Cauchy si, et seulement si, (g_n) est δ-Cauchy.*

Preuve.
Il suffit évidemment de montrer que si (g_n) est d-Cauchy alors (g_n) est δ-Cauchy. Fixons donc $\varepsilon > 0$; puisque d et δ induisent la même topologie, il existe r tel que $B_d(id, r[\subseteq B_\delta(id, \varepsilon[$. Puisque (g_n) est d-Cauchy, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(g_n, gm) \leq r$ pour tout $n, m \geq N$. Mais alors pour tout $n, m \geq M$ on a $d(id, g_n^{-1}g_m) < r$ donc $\delta(id, g_n^{-1}g_m) < \varepsilon$, ou encore

$\delta(g_n, gm) < \varepsilon$. □

En particulier, si G est un groupe topologique métrisable, G admet une distance à la fois complète et invariante à gauche si, et seulement si, *toutes* les distances compatibles et invariantes à gauche sur G sont complètes.
On a vu plus haut une distance invariante à gauche et non complète sur $\mathcal{S}_\infty$; par conséquent $\mathcal{S}_\infty$ n'admet pas de distance complète et invariante à gauche.

On va maintenant évoquer une construction qui aboutit à un analogue pour un groupe métrisable du complété d'un espace métrique. Si G est un groupe métrisable, on a d'après ce qui précède une notion de "suite de Cauchy à gauche dans G" ; on peut l'utiliser pour construire le complété de G, mais il faut faire attention à ce que ce complété soit bien un groupe ! Il est bon ici de méditer l'exemple de la distance invariante à gauche sur $\mathcal{S}_\infty$, et prendre les inverses en compte.

Soit G un groupe topologique, et d une distance compatible invariante à gauche. On note $\overline{G}$, le complété de G pour la distance D définie par $D(x,y) = d(x,y) + d(x^{-1}, y^{-1})$. Remarquons tout de suite que l'espace $\overline{G}$ ainsi obtenu ne dépend pas du choix de d, comme le montre le lemme 3.1.

Théorème 3.8.
Soit G un groupe topologique métrisable, et $\overline{G}$ son complété. Alors $(\overline{G}, d)$ est un groupe toplogique (et donc un groupe polonais si G est séparable). On l'appelle le groupe complété *de G.*

Preuve.
Il s'agit essentiellement de montrer que que si (g_n) et (h_n) sont deux suites D-Cauchy dans G alors $(g_n h_n)$ est D-Cauchy.
Soit donc (g_n), (h_n) deux suites D-Cauchy d'éléments de G. Etant donnée la définition de D (et en particulier le fait que $g \mapsto g^{-1}$ est une D-isométrie) il suffit de vérifier que $(g_n h_n)$ est d-Cauchy. Notons que pour tout n, m, p on a

$$d(g_n h_n, g_m h_m) \leq d(g_n h_n, g_n h_p) + d(g_n h_p, g_m h_p) + d(g_m h_p, g_m h_m) \ .$$

Autrement dit, $d(g_n h_n, g_m h_m) \leq d(h_n, h_p) + d(h_m, h_p) + d(g_n h_p, g_m h_p)$.
Fixons $\varepsilon > 0$, et choisissons N tel que $d(h_n, h_m) \leq \varepsilon$ pour tout $n, m \geq N$. Par continuité de la multiplication à droite par h_N, il existe $\delta > 0$ tel que $d(gh_N, g'h_N) \leq \varepsilon$ pour tout g, g' tels que $d(g, g') \leq \delta$. Si l'on prend N' tel que $d(g_n, g_m)$ soit inférieur à δ pour tout $n, m \geq N'$, et qu'on pose $M = \max(N, N')$, alors on obtient $d(g_n h_n, g_m h_m) \leq 3\varepsilon$ pour tout $n, m \geq M$.

On sait donc que si (g_n) tend vers $g \in \overline{G}$ et (h_n) tend vers $h \in \overline{G}$ alors $(g_n h_n)$ converge dans $\overline{G}$. Reste à vérifier que cette limite est la même pour d'autres suites (g'_n) et (h'_n) tendant respectivement vers g et h. Le même raisonnement que dans le début de la preuve du théorème s'applique pour montrer qu'on a dans ce cas $d(g_n h_n, g'_n h'_n) \to 0$ (c'est un bon exercice !).
Il est maintenant facile de vérifier que les opérations de groupe s'étendent continûment à $\overline{G}$; de plus D s'étend par définition du complété en une distance compatible complète sur $\overline{G}$, donc $\overline{G}$ est un groupe polonais si G est séparable. □

Corollaire 3.9.
Soit G un groupe polonais et d une distance invariante à gauche sur G. Alors la distance D définie par $D(g, h) = d(g, h) + d(g^{-1}, h^{-1})$ est une distance complète engendrant la topologie de G.

Preuve.
Par continuité des opérations de groupe, il est clair que D engendre la topologie de G ; de plus, on a vu que le complété (métrique) de (G, D) est en fait un groupe polonais, dans lequel G est un sous-groupe polonais, dense par définition du complété. Par conséquent (G, D) coïncide avec son complété, autrement dit (G, D) est complet. □

Exercice 3.10. Soit G un groupe polonais et d une distance bi-invariante (c.à.d invariante par translations à droite et à gauche) et compatible avec la topologie de G. Montrer que d est complète. Une telle distance existe-t-elle toujours ?

Exercice 3.11. Soit G un groupe polonais. Montrer que G admet une distance bi-invariante si, et seulement si, il existe une base dénombrable (U_n) de voisinages de 1 telle que $gU_n g^{-1} = U_n$ pour tout g dans G[2].
En déduire qu'il existe une distance invariante par conjugaison compatible avec la topologie de G si, et seulement si, il existe une distance bi-invariante compatible avec la topologie de G.

3.3 Quotients et continuité automatique

Dans cette section, on va s'intéresser aux morphismes entre groupes polonais ; avant de comprendre les morphismes, il faut comprendre leurs noyaux, et

[2] Indication : reprendre la preuve du théorème de Birkhoff-Kakutani...

savoir si on peut former un quotient. Pour cela, on a besoin du résultat suivant.

Théorème 3.12. *Soit G un groupe polonais, et $H \subseteq G$ un sous-groupe fermé. Soit d_l une distance compatible et invariante sur G, et G/H le quotient de G par l'action de H par translation à gauche. On définit une distance d^* sur G/H par*

$$d^*(Hg_1, Hg_2) = \inf\left(\{d(h_1g_1, h_2g_2 \colon h_1, h_2 \in H\}\right)$$

Alors d^* est une distance compatible avec la topologie quotient sur G/H.

Preuve.
Commençons par vérifier que d^* est une distance ; il est clair que d^* est symétrique, et facile de vérifier l'inégalité triangulaire. Supposons maintenant qu'on ait $d^*(Hg_1, Hg_2) = 0$. Alors il existe deux suites a_n, b_n d'éléments de H telles que $d(a_ng_1, b_ng_2)$ tend vers 0. Comme d est invariante à gauche, on en déduit que $d(g_2^{-1}b_n^{-1}a_ng_1, 1)$ tend vers 0, autrement dit $g_2^{-1}b_n^{-1}a_ng_1$ tend vers 1. Comme G est un groupe topologique, ceci entraîne que $b_n^{-1}a_n$ (qui est une suite d'éléments de H) converge vers $g_2g_1^{-1}$. On en déduit que $g_2g_1^{-1} \in H$, c'est-à-dire $g_2H = g_1H$.
Montrons maintenant que d induit la topologie quotient sur G/H. Pour cela, notons qu'il suffit de démontrer qu'une suite (Hg_n) converge vers Hg pour la topologie quotient si et seulement si $d^*(Hg_n, Hg) \to 0$; en effet, les deux topologies sont à base dénombrable de voisinages (la topologie quotient a manifestement une base dénombrable d'ouverts).
Supposons que $d^*(Hg_n, Hg) \to 0$, et fixons un ouvert V invariant sous l'action de H par translation à gauche et contenant g ; fixons ε tel que $B(g, \varepsilon[\subseteq V$. Il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$ on ait $h_n \in H$ tel que $d(h_ng_n, g) < \varepsilon$, ce dont on déduit successivement $h_ng_n \in V$ puis $g_n \in V$. Par conséquent g_nH tend vers gH pour la topologie quotient.
Réciproquement, si (Hg_n) tend vers Hg pour la topologie quotient, fixons $\varepsilon > 0$ et posons

$$V_\varepsilon = \{Hk \colon Hk \cap B(g, \varepsilon[\neq \emptyset\}$$

C'est un ouvert pour la topologie quotient, par conséquent il existe N tel que pour tout $n \geq N$ on ait $Hg_n \in V_\varepsilon$, ce qui entraîne $d^*(Hg_n, Hg) < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ □

Si H est de plus distingué, on sait maintenant que G/H est un groupe topologique séparable, métrisable, et que G/H est l'image d'un espace polonais par une application ouverte.

Théorème 3.13. *Soit G un groupe polonais et $H \leq G$ un sous-groupe fermé. Le groupe G/H, muni de la topologie quotient, est un groupe polonais.*
Plus généralement, l'espace des classes à droite modulo un sous-groupe fermé, muni de la topologie quotient, est un espace polonais.

Pour obtenir ce résultat, il nous reste à prouver que la topologie quotient sur G/H est polonaise ; on va se contenter pour le moment d'admettre le théorème suivant..

Théorème 3.14. (Sierpinski) *Soit X un espace polonais, Y un espace métrisable et $f\colon X \to Y$ une surjection continue et ouverte. Alors Y est polonais.*

On n'en a pas fini avec les quotients : si on a un morphisme continu surjectif entre groupes polonais $\varphi\colon G \to H$, le morphisme obtenu en passant au quotient est-il un isomorphisme de groupes topologiques entre $G/\mathrm{Ker}(\varphi)$ et H ? Il est clair que le morphisme en question est un isomorphisme algébrique continu, mais pourquoi son inverse serait-il continu ?

On voudrait donc omprendre comment assurer qu'un morphisme est continu ; faisons un détour par le problème suivant, posé par Cauchy : que peut-on dire des applications $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$? Cauchy savait déjà que si une telle fonction φ est continue en 0 alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La question était de savoir s'il existe des morphismes de groupe de $\mathbb{R}$ non continus.
Aujourd'hui, avec l'axiome du choix, on sait facilement construire des morphismes de $(\mathbb{R}, +)$ qui ne sont pas continus : par exemple, considèrons $\mathbb{R}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, et choisissons un hyperplan $H \subseteq \mathbb{R}$ et une forme $\mathbb{Q}$-linéaire φ dont le noyau est H. Si φ était continue, alors H serait fermé, et d'intérieur vide sans quoi φ serait nulle partout par linéarité. Mais $\mathbb{R}$ est la réunion disjointe d'un nombre dénombrable de copies de H, donc $\mathbb{R}$ serait maigre, ce qui n'est pas sans poser quelques problèmes.
Par contre, un résultat classique de théorie de la mesure entraîne que si un morphisme $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est Lebesgue-mesurable, alors φ est continu en 0 ; dans la suite, on va prouver un analogue de ce théorème dans le contexte des morphismes Baire-mesurables entre groupes polonais.

Lemme 3.2. (Pettis)
Soit G un groupe polonais. Si $A \subseteq X$ on appelle $U(A)$ le plus grand ouvert dans lequel A est comaigre (i.e la réunion des ouverts dans lesquels A est comaigre).
Alors, si $A, B \subseteq G$ on a $U(A).U(B) \subseteq A.B$.

Preuve.
Notons que, par continuité des opérations de groupe, on a $gU(A) = U(g.A)$ et $U(A)^{-1} = U(A^{-1})$ pour tout $g \in G$ et tout $A \subseteq G$. Plaçons nous maintenant dans le cadre du théorème, fixons $g \in U(A).U(B)$ et posons $V = gU(B)^{-1} \cap U(A) = U(gB^{-1}) \cap U(A)$. C'est un ouvert non vide, et par définition gB^{-1} et A sont tous les deux comaigres dans V ; par conséquent il existe $h \in gB^{-1} \cap A$, ce qui prouve que $g \in A.B$. $\square$

Ce lemme a en particulier pour conséquence que, si $A \subseteq G$ est Baire-mesurable et non-maigre, alors $A.A^{-1}$ contient un voisinage du neutre de G : en effet, alors $U(A)$ et $U(A^{-1})$ sont tous deux ouverts non vides, donc leur produit est un ouvert contenant 1 et, d'après le lemme de Pettis, cet ouvert est contenu dans $A.A^{-1}$. On va répéter cet argument dans la preuve ci-dessous.

Théorème 3.15. *Soit G, H deux groupes polonais. Alors tout morphisme Baire-mesurable $\varphi\colon G \to H$ est continu.*

Preuve.
Il suffit bien sûr de montrer que φ est continu en 1_G ; c'est-à-dire que pout tout V contenant 1_H $\varphi^{-1}(V)$ contient un voisinage de 1_G. Fixons donc un ouvert V contenant 1_H ; par continuité des opérations de groupe on peut trouver W tel que $W.W^{-1} \subseteq V$. Alors $\varphi^{-1}(W)$ est Baire-mesurable et non maigre, par conséquent $U(\varphi^{-1}(W))$ est un ouvert non vide et, d'après le lemme de Pettis :

$$1_H \in U(\varphi^{-1}(W)).U(\varphi^{-1}(W))^{-1} \subseteq \varphi^{-1}(W).(\varphi^{-1}(W))^{-1} \subseteq \varphi^{-1}(W.W^{-1}) \subseteq \varphi^{-1}(V) .$$

Donc $\varphi^{-1}(V)$ contient bien 1_H dans son intérieur. $\square$
Comme toute fonction borélienne est Baire-mesurable, on voit en particulier que tout morphisme borélien entre groupes polonais est continu ; en particulier, si τ_1 te τ_2 sont deux topologies de groupe polonais sur le même groupe G et si τ_1 et τ_2 ont les mêmes boréliens, alors $\tau_1 = \tau_2$.

Exercice 3.16. Soit G un groupe polonais et $H \leq G$ un sous-groupe non maigre et Baire-mesurable. Montrer que H est ouvert-fermé.

Exercice 3.17. On admet (ce sera justifié plus tard) que si $f\colon X \to Y$ est une fonction borélienne *injective* entre les polonais X et Y, alors l'image de tout borélien de X est borélien dans Y. Montrer alors le théorème suivant : Soit G, H deux groupes polonais et φ un morphisme continu et surjectif de G sur H. Alors φ passe au quotient en un isomorphisme (de groupes topologiques) de $G/\mathrm{Ker}(\varphi)$ sur H.

3.4 Continuité des opérations de groupe.

Théorème 3.18. *Soit X, Y, Z trois espaces métriques, et $f\colon X \times Y \to Z$ une fonction séparablement continue. Alors il existe un ensemble comaigre $\Omega \subseteq X \times Y$ tel que f soit continue en tout point de Ω et, pour tout y, Ω^y soit comaigre dans X.*

Preuve.
Pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, on introduit

$$F_{n,k} = \left\{(x,y)\colon \forall u, v \in B(y, 2^{-k}[\ d(f(x,u), f(x,v)) \leq 2^{-n}\right\} \ .$$

Puisque f est séparablement continue, on a

$$X \times Y = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_{n,k}$$

Montrons que chaque $F_{n,k}$ est fermé : si $(x_m, y_m) \in F_{n,k}$ et $(x_m, y_m) \to (x, y)$, alors pour tout $u, v \in B(y, 2^{-k}[$ il existe un rang M à partir duquel $u, v \in B(y_m, 2^{-k}[$, et par conséquent $d(f(x_m, u), f(x_m, v)) \leq 2^{-n}$. En utilisant la continuité de $x \mapsto f(x, y)$, on obtient en faisant tendre m vers $+\infty$ que $d(f(x, u), f(x, v)) \leq 2^{-n}$.
Alors, introduisons

$$A = \bigcup_{n,k} \left\{(x,y)\colon x \in F^y_{n,k} \setminus \mathrm{Int}(F^y_{n,k})\right\} \ .$$

Comme chaque $F_{n,k} \setminus \mathrm{Int}(F_{n,k})$ est maigre, et que A est contenu dans la réunion de ces ensembles, A est maigre. Si l'on pose $\Omega = X \times Y \setminus A$, Ω est comaigre et on voit que Ω^y est comaigre dans X pour tout $y \in Y$; il reste à prouver que f est continue en tout point de Ω.
Fixons donc $(x, y) \in \omega$ et $\varepsilon > 0$, puis choisissons n tel que $2^{-n} \leq \varepsilon$. Puisque $X = \bigcup F^y_{n,k}$, il existe un $k \in \mathbb{N}$ et un ouvert $U \subseteq X$ tel que $U \times \{y\} \subseteq F_{n,k}$. Par continuité de $x \mapsto f(x, y)$, on peut, quitte à réduire U, supposer que pour tout $x' \in U$ on a $d(f(x, y), f(x', y)) \leq \varepsilon$.
Soit alors $(x', y') \in U \times B(y, 2^{-n}[$; on sait que $(x', y) \in F_{n,k}$ et on a donc à la fois $d(f(x, y), f(x', y)) \leq \varepsilon$ et $d(f(x', y), f(x', y')) \leq \varepsilon$.
L'inégalité triangulaire donne donc $d(f(x, y), (x', y')) \leq 2\varepsilon$ pour tout $(x', y') \in U \times B(y, 2^{-k}[$. $\square$

Ce théorème est particulièrement intéressant dans la contexte des actions de groupes polonais ; on va établir un résultat sur des groupes plus généraux, dont l'intérêt sera justifié par ses applications.

Théorème 3.19. *Soit G un groupe muni d'une topologie polonaise telle que $h \mapsto gh$ soit continue pour tout $g \in G$. Supposons que X soit un espace métrique et $(g, x) \mapsto g.x$ une action séparablement continue de G sur X. Alors l'action est continue.*

Preuve.
Soit $g_0 \in G$, $x_0 \in X$. D'après le théorème précédent, on sait que $(g, x) \mapsto g.x$ est continue en (g, x_0) pour un ensemble comaigre de g et donc, puisque G est polonais, il existe h_0 tel que $(g, x) \mapsto g.x$ est continue en (h_0, x_0).
Fixons $g_0 \in G$ et $x_0 \in X$; on a, pour tout (g, x) :

$$g.x = (g_0 h_0^{-1}).(h_0 g_0^{-1} g.x) \ .$$

Quand g tend vers g_0 on a, par continuité de $g \mapsto g_0^{-1} g$, que $h_0 g_0^{-1} g$ tend vers h_0 ; la continuité de $(g, x) \mapsto g.x$ en (h_0, x_0) assure que si (g, x) tend vers (g_0, x_0) alors $h_0 g_0^{-1} g.x$ tend vers $h_0.x_0$. L'action étant séparablement continue, $g.x$ tend vers $g_0 x_0$. □

Théorème 3.20. *Si G est un groupe muni d'une topologie polonaise pour laquelle $(g, h) \mapsto g.h$ est séparablement continue alors G est un groupe polonais.*

Ce théorème est une conséquence immédiate des deux lemmes suivants.

Lemme 3.3.
Soit G est un groupe muni d'une topologie polonaise pour laquelle $g \mapsto g^{-1}$ est continue et $(g, h) \mapsto g.h$ est séparablement continue. Alors G est un groupe polonais.

Ce lemme est un corollaire du théorème 3.19, en considérant l'action de G sur lui-même par translation à gauche.

Lemme 3.4.
Soit G un groupe topologique métrisable. Si $g \mapsto gh$ est continue pour tout $h \in G$, alors $g \mapsto g^{-1}$ est continue.

Preuve du Lemme 3.4.
Soit d une distance invariante à gauche sur G. Fixons une suite (g_n) d'éléments de G tendant vers $g \in G$. Alors on a pour tout n $d(g_n^{-1}, g^{-1}) = d(id, g_n g^{-1})$. Par continuité de la multiplication à droite par g^{-1}, $(g_n g^{-1})$ tend vers id, par conséquent l'égalité précédente entraîne que (g_n^{-1}) tend vers g^{-1}. □

Chapitre 4

Ensembles boréliens, analytiques, coanalytiques

4.1 La tribu borélienne

Définition 4.1. Rappelons qu'un sous-ensemble A d'un espace topologique X est un *borélien* si A appartient à la σ-algèbre engendrée par les ouverts de X.

Ces ensembles sont fondamentaux en théorie descriptive ; ce sont ceux qu'on peut "définir" à partir des ouverts en utilisant un nombre (au plus) dénombrable de fois les opérations d'union/intersection dénombrable et de passage au complémentaire. Remarquons qu'avec les ordinaux, on peut décrire le nombre de telles opérations qui est nécessaire pour définir A ; ceci amène à définir la *hiérarchie borélienne* .

Définition 4.2.
Soit X un espace topologique. On définit par récurrence transfinie des familles $\Sigma^0_\xi(X)$ et $\Pi^0_\xi(X)$ (indexées par les ordinaux compris entre 1 et ω_1) de sous-ensembles de X en posant :

1. $\Sigma^0_1(X) = \{O \subseteq X \colon O \text{ est ouvert}\}$;
2. $\Pi^0_\xi(X) = \{B \subseteq X \colon X \setminus B \in \Sigma^0_\xi(X)\}$;
3. $\Sigma^0_{\xi+1} = \{B \subseteq X \colon B = \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i, \text{ avec } A_i \in \Pi^0_\xi(X) \text{ pour tout i}\}$;
4. Si $\xi = \sup\{\lambda < \xi\}$ alors $\Sigma^0_\xi(X) = \bigcup_{\lambda<\xi} \Sigma^0_\lambda(X)$.

Par exemple, $\Sigma^0_2(X)$ est l'ensemble des F_σ de X, tandis que Π^0_2 est l'ensemble des G_δ de X. En regardant la définition, on voit que la famille

$\bigcup_{\xi<\omega_1} \Sigma^0_\xi(X) = \bigcup_{\xi<\omega_1} \Pi^0_\xi(X)$ contient les ouverts, est contenue dans toute σ-algèbre contenant ceux-ci et est-elle même une σ-algèbre. On obtient donc le résultat suivant.

Théorème 4.3. *Soit X un espace topologique. Alors une partie $A \subseteq X$ est borélienne si, et seulement si, il existe $\xi < \omega_1$ tel que $A \in \Sigma^0_\xi(X)$.*

Rappelons que, par définition, tout borélien a la propriété de Baire et toute fonction borélienne entre espaces topologiques est Baire-mesurable.
A propos de fonction borélienne, notons tout de suite la propriété suivante :

Proposition 4.4. *Soit X un espace topologique, et Y un espace topologique à base dénombrable d'ouverts. Si $f\colon X \to Y$ est borélienne, alors son graphe est borélien.*

Preuve.
Fixons une base $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts de Y. Alors, notons qu'on a, pour tout $x \in X$ et tout $y \in Y$:

$$(f(x) = y) \Leftrightarrow (\forall n\ y \in V_n \Rightarrow f(x) \in V_n)$$

Autrement dit, le graphe de f, noté Γ_f, satisfait

$$\Gamma_f = \bigcap_n \big(X \times (Y \setminus V_n) \cup f^{-1}(V_n) \times V_n\big)$$

Comme f est par hypothèse borélienne, l'égalité ci-dessus montre que Γ_f est borélien dans $X \times Y$ □

On a déjà dit qu'on ne s'intéressait pas vraiment dans ces notes aux espaces topologiques généraux, mais plutôt aux espaces polonais ; on verra plus tard que dans ce cadre une fonction est borélienne si, et seulement si, son graphe est borélien.
Avant de pouvoir dégager les propriétés fondamentales des fonctions boréliennes entre espaces polonais, il nous faut étudier les *ensembles* boréliens ; les résultats fondamentaux à leur sujet sont basés sur des méthodes de *raffinement de topologies.*

4.2 Raffinement de topologies polonaises

Le but de cette section sera d'établir le théorème suivant, et d'exposer quelques-uns de ses corollaires.

Théorème 4.5. *Soit (X, τ) un espace polonais. Alors pour tout borélien $B \subseteq X$ il existe une topologie polonaise plus fine τ_B sur X telle que B est ouvert-fermé par rapport à τ_B et, de plus, τ et τ_B ont les mêmes boréliens.*

Pour prouver ce théorème, on appelle $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de X satisfaisant la conclusion du théorème. Il est clair que $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémenaire. On va montrer que $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre qui contient les ouverts.
Commençons par expliquer pourquoi $\mathcal{A}$ contient les fermés ; soit donc F un fermé de X. Il existe une distance complète d_0 engendrant la topologie de F, et une distance complète d_1 engendrant la topologie de $O = X \setminus F$. On peut sans perte de généralité supposer que d_0, d_1 sont bornées par 1. Alors, on peut définir une distance d sur X en posant

$$d(x,y) = \begin{cases} d_0(x,y) & \text{si } (x,y) \in F^2 \\ d_1(x,y) & \text{si } (x,y) \in O^2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On vérifie facilement que la topologie engendrée par d est polonaise, et F est ouvert-fermé pour cette topologie. De plus, si τ désigne la topologie de X, la topologie définie par d est engendrée par $\tau \cup \{F\}$ et a en donc les mêmes boréliens que τ.
Expliquons maintenant pourquoi $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable. Commençons par démontrer le lemme suivant.

Lemme 4.1.
Soit X un ensemble, τ une topologie polonaise sur X et $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de topologies polonaises sur X telles que $\tau \subseteq \tau_n$ pour tout n, et $\mathcal{B}(\tau_n) = \mathcal{B}(\tau)$. Alors $\tau_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tau_n$ est une topologie polonaise, et $\mathcal{B}(\tau_\infty) = \mathcal{B}(\tau)$.

Preuve.
Notons que $\mathcal{B}(\tau_\infty)$ est engendré par $\bigcup \tau_n$; pour chaque n, τ_n a une base dénombrable d'ouverts $V_{n,m}$, qui sont tous τ-boréliens. La σ-algèbre engendrée par les $V_{n,m}$ est égale à $\mathcal{B}(\tau_\infty)$, ce qui prouve que $\mathcal{B}(\tau_\infty) = \mathcal{B}(\tau)$.
Notons X_n l'espace X muni de la topologie τ_n, et considérons $Y = \prod X_n$. Alors Y est polonais.
Maintenant, définissons une fonction $\Phi\colon (X, \tau_\infty) \to Y$ en posant $\Phi(x) = (x, x, \ldots, x, \ldots,)$. Par définition de τ_∞, cette fonction est un homéomorphisme sur son image. On va prouver que $\Phi(X)$ est fermé dans Y, ce qui suffira à établir le lemme.
Soit donc $(x_n) \in Y \setminus \Phi(X)$; il existe n tel que $x_n \neq x_1$. Mais alors, il existe

deux τ-ouverts U, V tels que $x_1 \in U$, $x_n \in V$ et $U \cap V = \emptyset$. Ces deux ensembles sont ouverts à la fois pour τ_1 et τ_n, par conséquent $\{(y_n) \in Y : y_1 \in U \text{ et } y_n \in V\}$ est ouvert dans Y ; cet ouvert contient (x_n) et est disjoint de $\Phi(X)$. $\square_{\text{lemme}}$

Soit maintenant (A_n) une suite d'ensembles de $\mathcal{A}$. On peut produire une suite de topologies polonaises τ_n, contenant τ et ayant les mêmes boréliens, telles que A_n est ouvert-fermé pour τ_n ; le lemme ci-dessus nous donne une topologie polonaise τ_∞, contenant τ et avec les mêmes boréliens, pour laquelle $A = \bigcup A_n$ est ouvert. Il existe donc une topologie polonaise aayant les mêmes boréliens que τ et pour laquelle A est ouvert-fermé. $\square$

On voit donc que tout borélien peut être rendu ouvert-fermé, quitte à affiner la topologie, mais en ne touchant pas à la tribu borélienne ; on verra plus tard qu'il s'agit-là d'une caractérisation des boréliens.

Corollaire 4.6. Soit X un polonais. L'hypothèse du continu est vraie pour les boréliens de X.

Remarquons qu'on peut utiliser les lemmes précédents pour montrer que, pour tout polonais X et toute famille dénombrable de boréliens de X, il existe une topologie polonaise sur X, ayant les mêmes boréliens que la topologie de départ, pour laquelle tous les membres de la famille sont ouverts-fermés. Ceci permet d'obtenir le corollaire suivant.

Corollaire 4.7.
Soit (X, τ_X) un polonais, (Y, τ_Y) un espace à base dénombrable d'ouverts et $f : X \to Y$ une fonction borélienne. Alors il existe une topologie polonaise τ' sur X qui raffine τ_X, a les mêmes boréliens, et pour laquelle f est continue.

Preuve.
Soit (V_n) une base d'ouverts de Y ; on peut simultanément rendre ouverts-fermés tous les $f^{-1}(V_n)$. $\square$

Concluons cette section par un dernier théorème, qui nous ramène aux origines de la théorie descriptive des ensembles.

Corollaire 4.8. Soit X un polonais. Tout borélien de X est image continue injective d'un fermé de $\mathcal{N}$.

Preuve.
Soit (X, τ) un polonais et $B \subseteq X$ un borélien. Il existe une topologie τ' raffinant la topologie de X pour laquelle B est ouvert-fermé, et donc (B, τ') est

polonais ; alors on sait qu'il existe un fermé $F \subseteq \mathcal{N}$ et une bijection continue $f: F \to B$. Alors f, vue comme une fonction de F dans (X, τ), est continue, injective, et $f(F) = B$. □

4.3 Ensembles analytiques ; le théorème de séparation

On a vu dans la section précédente que tout borélien d'un polonais X peut s'écrire comme l'image d'une certaine fonction continue $f: \mathcal{N} \to X$. Mais l'image de $\mathcal{N}$ par une fonction continue est-elle un borélien ? Plus généralement, si $B \subseteq X$ est borélien, $f: X \to Y$ est une fonction continue entre espaces polonais, alors $f(B)$ est-il borélien dans Y ?

Définition 4.9.
Soit X un espace polonais. Une partie $A \subseteq X$ est dite *analytique* s'il existe un polonais Y et une application continue $f: Y \to X$ telle que $A = f(Y)$. Une partie est dite *coanalytique* si son complémentaire est analytique.
Notons que dans la définition ci-dessus on pourrait se contenter de considérer $Y = \mathcal{N}$.

Notons tout de suite que tout borélien est analytique ; si X, Y sont polonais, $A \subseteq X$ est analytique et $f: X \to Y$ est continue alors $f(A)$ est analytique ; en fait c'est encore vrai si l'on suppose simplement f définie (et continue) sur A, grâce au théorème de Kuratowski.

Exercice 4.10. Soit X un polonais, et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles analytiques de X. Montrer que $\bigcup A_n$ et $\bigcap A_n$ sont analytiques.

Notons que si $f: Y \to X$ est continue alors son graphe Γ_f est fermé dans $Y \times X$; la projection de Γ_f sur la deuxième coordonnée est $f(Y)$. Par conséquent, si $A \subseteq X$ est analytique alors il existe un polonais Y et un fermé $F \subseteq Y \times X$ tels que $A = \pi_X(F)$, où π_X désigne la projection sur X.
On sait que $Y = g(\mathcal{N})$, où g est une fonction continue ; on peut alors considérer

$$B = \{(\alpha, x) \in \mathcal{N} \times X : (g(\alpha), x) \in F\}$$

Cet ensemble est fermé dans $\mathcal{N} \times X$, et sa projection sur X est égale à $f(X)$. Par conséquent, tout analytique de X est la projection d'un fermé de $\mathcal{N} \times X$.

Théorème 4.11.
Soit X un espace polonais non dénombrable. Alors il existe une partie $A \subseteq X$ qui est analytique mais pas borélienne.

Ce théorème est en fait une conséquence, dans notre contexte, du paradoxe du barbier. Notons déjà qu'il suffit de le prouver pour $X = \mathcal{N}$ (tout polonais non dénombrable contient un G_δ homéomorphe à $\mathcal{N}$). On va utiliser la notion d'ensemble *universel* pour une classe donnée.

Définition 4.12. Soit Γ une des classes d'ensembles qu'on a introduite jusqu'à présent (ouverts, boréliens, analytiques, Π^0_ξ...) et X un polonais.
Une partie $A \subseteq \mathcal{N} \times X$ est *universelle* pour la classe $\Gamma(X)$ si $A \in \Gamma(\mathcal{N} \times X)$ et, pour tout $B \in \Gamma(X)$, il existe $x \in \mathcal{N}$ tel que $B = A_x$.

Théorème 4.13. *Il existe un ensemble universel pour* $\Sigma^1_1(\mathcal{N})$.

On peut voir qu'un tel ensemble est nécessairement non borélien : si A était borélien, l'ensemble $B = \{x \colon (x,x) \notin A\}$ serait aussi borélien, donc il devrait exister x_0 tel que $A_{x_0} = B$. Alors $x_0 \in B \Leftrightarrow (x_0, x_0) \in A \Leftrightarrow x_0 \notin B$.
Par conséquent le théorème 4.13 entraîne qu'il existe un sous-ensemble analytique non borélien dans $\mathcal{N}^2$, qui est homéomorphe à $\mathcal{N}$.

Preuve du théorème 4.13
Commençons par montrer qu'il existe un ensemble universel pour $\Sigma^0_1(\mathcal{N})$: étant donnée une base d'ouverts (V_n) de $\mathcal{N}$, on peut considérer

$$A = \{(x,y) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \colon y \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_{x(n)}\}$$

On voit facilement que A est ouvert dans $\mathcal{N}^2$, et comme tout ouvert est réunion dénombrable d'un sous-ensemble de $\{U_n\}$, A est universel.
Par conséquent, il existe aussi (en considérant le complémentaire de A) un ensemble Π^0_1-universel.
Pour finir la preuve du théorème, il nous suffit de coder la caractérisation d'un analytique de $\mathcal{N}$ comme projection d'un fermé de $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$.
Commençons par prendre un fermé $P \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}^2$ tel que pour tout fermé $F \subseteq \mathcal{N}^2$ il existe $y \in \mathcal{N}$ tel que $F = P_y$; ensuite définissons

$$A = \{(x,y) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \colon \exists z \ (x,y,z) \in P\}$$

Cet ensemble est analytique ; de plus, si $B \subseteq \mathcal{N}$ est analytique, alors B est la projection d'un fermé F_B, pour lequel on sait par universalité de P qu'il existe $x \in \mathcal{N}$ tel que

$$\forall y, z \ (y,z) \in F_B \Leftrightarrow (x,y,z) \in P \ .$$

Mais alors on voit que

$$b \in B \Leftrightarrow \exists y \ (b,y) \in F_B \Leftrightarrow \exists y (x,b,y) \in P \Leftrightarrow b \in A_x \ .$$

Ceci conclut la preuve du théorème. □

Théorème 4.14. *Soit A et B deux sous-ensembles analytiques disjoints d'un espace polonais X. Il existe un borélien C de X tel que $A \subseteq C$ et $B \cap C = \emptyset$.*

Preuve.
Dans cette preuve on dira que deux parties $A, B \subseteq X$ sont *séparables* s'il existe un borélien C tel que $A \subseteq C$ et $B \cap C = \emptyset$.

Lemme 4.2. *Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de parties telles que A_n et B_m sont séparables pour tout n, m. Alors $\bigcup A_n$ et $\bigcup B_n$ sont séparables.*

Preuve du lemme : Choisissons pour toute paire (n, m) un borélien $C_{n,m}$ tel que $A_n \subseteq C_{n,m}$ et $B_m \cap C_{n,m} = \emptyset$. Posons

$$C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} C_{n,m} \ .$$

Alors C est borélien, $\bigcup A_n \subseteq C$ et $\bigcup B_n \cap C = \emptyset$. $\square_{\text{lemme}}$

Maintenant, fixons deux surjections continues $f : \mathcal{N} \to A$ et $g : \mathcal{N} \to B$. En reprenant les notations habituelles, on a, pour toute suite finie $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, que

$$f(N_s) = \bigcup_n f(N_{s\frown n}) \text{ et } g(N_s) = \bigcup_n g(N_{s\frown n}) \ .$$

Supposons que A et B ne peuvent pas être séparés.
Alors, en utilisant l'égalité ci-dessus ainsi que le lemme précédent, on peut construire par récurrence $x, y \in \mathcal{N}$ tel que pour tout n $f(N_{x_{|n}})$ et $g(N_{y_{|n}})$ ne peuvent pas être séparés. Mais ceci est impossible : en effet, $f(x) \neq g(y)$, donc il existe deux ouverts U, V d'intersection vide et tels que $f(x) \in U$, $g(y) \in V$. Par continuité de f et g en x et y, ces deux ouverts montrent que pour n assez grand $f(N_{x_{|n}})$ et $g(N_{y_{|n}})$ peuvent être séparés. □

En considérant la paire $(A, X \setminus A)$ on obtient une caractérisation fondamentale des boréliens.

Corollaire 4.15. Un sous-ensemble A de X est borélien si, et seulement si, A est à la fois analytique et coanalytique.

Exercice 4.16. Soit X un polonais et (A_n) une suite de sous-ensembles analytiques de X deux à deux disjoints. Montrer qu'il existe une famille de sous-ensembles boréliens (B_n) de X deux à deux disjoints et tels que $A_n \subseteq B_n$ pour tout n.

On peut maintenant caractériser les fonctions boréliennes entre polonais par leur graphe.

Théorème 4.17. *Soit X, Y deux espaces polonais et $f\colon X \to Y$ une fonction. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) f est borélienne.

(ii) Le graphe de f est un sous-ensemble borélien de $X \times Y$.

(iii) Le graphe de f est un sous-ensemble analytique de $X \times Y$.

Preuve.
Il est clair que $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$. Supposons maintenant que f satisfasse (iii), et soit U un ouvert de Y. Alors on a

$$x \in f^{-1}(U) \Leftrightarrow \exists y \in Y \ \left((x,y) \in \Gamma_f \text{ et } y \in U\right) .$$

Ceci permet de voir que $f^{-1}(U)$ est analytique, puisque c'est la projection d'un ensemble analytique de $X \times Y$.
Par ailleurs, on a

$$x \in f^{-1}(U) \Leftrightarrow \forall y \in Y \ \left((x,y) \in \Gamma_f \Rightarrow y \in U\right)$$

Autrement dit,

$$x \notin f^{-1}(U) \Leftrightarrow \exists y \in Y \ \left((x,y) \in \Gamma_f \text{ et } y \notin U\right)$$

Ainsi, le complémentaire de $f^{-1}(U)$ est lui aussi analytique dans X, et ceci n'est possible que si $f^{-1}(U)$ est borélien. □

Corollaire 4.18. Si τ, τ' sont deux topologies polonaises sur un même ensemble X telles que $\tau \subseteq \tau'$, alors τ et τ' ont les mêmes boréliens.

Exercice 4.19. Soit G un groupe polonais pour deux topologies τ, τ'. Montrer que si $\tau \subseteq \tau'$ alors $\tau = \tau'$.

Une application aux groupes polonais.
On a déjà vu que la topologie de la convergence simple (notons-la τ dans la suite) définissait une structure de groupe polonais sur $\mathcal{S}_\infty$. Soit maintenant τ' une autre topologie de groupe polonais sur $\mathcal{S}_\infty$. On va montrer qu'alors $\tau' = \tau$, ce qui prouvera qu'il existe une *unique* topologie de groupe polonais sur $\mathcal{S}_\infty$; par conséquent, cette structure polonaise est en fait "codée" par la structure algébrique. Ce phénomène est lié à des propriétés de continuité automatique étendant ce qu'on a vu au chapitre 3.

Pour montrer que $\tau' = \tau$, il suffit de montrer que $id\colon (\mathcal{S}_\infty, \tau') \to (\mathcal{S}_\infty, \tau)$ est borélienne, et pour cela il suffit (grâce à la structure de groupe) de prouver que tout τ-voisinage ouvert de 1 est τ'-borélien. En fait, il suffit même de montrer cela pour une base d'ouverts contenant 1 ; une telle base est donnée par les ensembles de la forme $V_n = \{\sigma\colon \forall i \leq n\ \sigma(i) = i\}$.
Fixons maintenant $n \in \mathbb{N}$, et notons $A_n = \{\sigma\colon \forall i > n\ \sigma(i) = i\}$. On vérifie facilement que

$$\sigma \in V_n \Leftrightarrow \forall \sigma' \in A_n\ \sigma \circ \sigma' = \sigma' \circ \sigma\ .$$

Notons que la condition de droite est une condition τ'-fermée puisque $(\mathcal{S}_\infty, \tau')$ est un groupe topologique. Par conséquent, pour tout n V_n est τ'-fermé, ce qui prouve que $id\colon \tau' \to \tau$ est un isomorphisme borélien, et donc est un isomorphisme de groupes polonais (par continuité automatique).

4.4 Boréliens standard ; fonctions boréliennes

On a vu que l'image continue d'un borélien n'est pas nécessairement un borélien ; qu'en est-il si l'on suppose de plus l'application injective ?

Théorème 4.20. *Soit X, Y deux polonais, $f\colon X \to Y$ une fonction borélienne injective et $A \subseteq X$ un borélien. Alors $f(A)$ est borélien dans Y. De plus $f^{-1}\colon A \to Y$ est borélienne.*

Avant de démontrer ce résultat, notons qu'il fournit la pièce qui nous manquait pour finir de justifier les propriétés des quotients de groupes polonais.
Preuve.
Notons que, si l'on sait prouver que la première phrase est vraie, alors on obtient facilement que f^{-1} est borélienne.
Passons maintenant à la preuve du premier énoncé ; quitte à raffiner la topologie de X on peut supposer que A est fermé dans X, et que f est continue. Tout fermé de X étant l'image continue bijective d'un fermé de $\mathcal{N}$, on peut finalement supposer que $X = \mathcal{N}$.
Reprenons les notations usuelles relatives à la topologie de $\mathcal{N}$, et posons, pour tout $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$:

$$B_s = f(A \cap N_s)\ .$$

Comme f est injective, les B_s forment un schéma de Lusin, et chaque B_s est analytique. En utilisant le théorème de séparation des ensembles analytiques, on peut construire un schéma de Lusin (B_s^*) tel que chaque B_s^* soit borélien et $B_s \subseteq B_s^* \subseteq \overline{B_s}$ pour tout s.
On va maintenant montrer, par double inclusion, que

$$f(A) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{s \in \mathbb{N}^k} B_s^*\ .$$

Ceci permettra de conclure que $f(A)$ est borélien dans Y.
$\underline{f(A) \subseteq \cap_k \cup_{s\in\mathbb{N}^k} B_s^* :}$
Si $x = f(a)$ pour un certain $a \in A$, alors on a, pour tout k, $x \in f(A \cap N_{a_{|k}})$, et donc $x \in B_{a_{|k}}$, par conséquent $x \in \cup_{s\in\mathbb{N}^k} B_s^*$.
$\underline{\cap_k \cup_{s\in\mathbb{N}^k} B_s^* \subseteq f(A) :}$
Si $x \in \cap_k \cup_{s\in\mathbb{N}^k} B_s^*$, alors il existe un unique $a \in \mathcal{N}$ tel que, si l'on note $s_k = a_{|k}$, on ait pour tout k que $x \in B_{s_k}^*$. Par conséquent, on a pour tout k que $x \in \overline{B_{s_k}}$. Si jamais $f(a) \neq x$, alors il existe des ouverts U, V disjoints tels que $f(a) \in U$, $x \in V$. Par continuité de f en a on a, pour k suffisamment grand :

$$f(N_{s_k} \cap A) \subseteq U \ .$$

Par conséquent pour k suffisamment grand $B_{s_k} \cap V = \emptyset$, et donc $x \notin \overline{B}_{s_k}$, ce qui est absurde. $\square$

Maintenant, intéressons-nous à la tribu borélienne d'un espace polonais ; c'est, comme on va le voir, un objet canonique, dans un sens très fort ; c'est sans doute l'objet qu'on rencontre le plus souvent en analyse.

Théorème 4.21. *Soit X, Y deux espaces polonais tels qu'il existe une injection borélienne $f \colon X \to Y$ et une injection borélienne $g \colon Y \to X$. Alors il existe une bijection borélienne de X sur Y.*

Preuve.
La preuve qu'on a donnée du théorème de Schröder-Bernstein dans le premier chapitre s'adapte parfaitement ici.
Tout d'abord, notons que si X, Y sont deux polonais et $f \colon X \to Y$, $g \colon Y \to X$ sont des injections boréliennes, alors on a $X \supseteq g(Y) \supseteq g \circ f(X)$, et $X, g(Y), g \circ f(X)$ sont tous trois boréliens (puisqu'une image borélienne injective de borélien est borélien).
Il suffit donc, comme dans le cas "'classique"', de montrer que si X est polonais, $Y \subseteq X$ est borélien et il existe une injection borélienne $f \colon X \to X$ telle que $f(X) \subseteq Y$ alors il existe une bijection borélienne $f \colon X \to Y$.
Pour conclure, il suffit de regarder la suite de la preuve du théorème de Schröder-Bernstein et de s'assurer que la fonction ainsi construite est bien borélienne (ce qu'on laisse comme un exercice simple mais instructif). $\square$

Corollaire 4.22. Si X et Y sont deux polonais de même cardinal, alors il existe une bijection borélienne de X sur Y.

Preuve.
Si X, Y sont au plus dénombrables il n'y a rien de nouveau à montrer (toutes les fonctions sont boréliennes, puisque les singletons sont fermés !).

Supposons maintenant que X est un polonais non dénombrable. On a vu qu'il existe une injection continue de $\mathcal{C}$ dans X. Le problème est maintenant de trouver une injection dans l'autre sens. Mais on sait qu'il existe une bijection continue d'un fermé de $\mathcal{N}$ dans X, et par conséquent une injection borélienne de X dans $\mathcal{N}$, dont on a vu qu'il était homéomorphe à un sous-ensemble de $\mathcal{C}$. Par conséquent il existe une bijection borélienne de $\mathcal{C}$ sur X. $\square$

Définition 4.23.
Soit $(X, \mathcal{B})$ un espace mesuré. On dit que X est un *borélien standard* si X est isomorphe à un espace polonais (muni de sa tribu borélienne).

Exercice 4.24. En généralisant les théorèmes de Kuratowski et Laverentiev au cadre des espaces boréliens, prouver qu'un espace mesuré $(X, \mathcal{B})$ est borélien standard ssi il est borélien dans son complété ssi il est homéomorphe à un borélien d'un polonais.

Chapitre 5

Uniformisations

5.1 Le théorème de Lusin-Novikov

Un des problèmes originels de la théorie descriptive des ensembles est le suivant : soit X, Y deux polonais et $B \subseteq X \times Y$ un borélien. Est-il possible de trouver une section *borélienne* de la projection $\pi_X \colon B \to X$? On appelle une telle section une *uniformisation* borélienne de B .
S'il existe une uniformisation, alors la projection de B (qui est le domaine de notre section) est borélienne et on sait que ce n'est pas toujours possible, puisqu'il existe des ensembles analytiques non boréliens. Mais alors, peut-on trouver des conditions qui permettent d'assurer qu'une uniformisation borélienne existe ? Il y a de nombreux théorèmes de ce type (et des variantes, par exemple en cherchant une section mesurable pour une autre σ-algèbre que les boréliens) ; nous allons en voir un qui est historiquement très important, le théorème de Lusin-Novikov.
Avant cela, faisons un petit détour technique.

Définition 5.1. Soit X, Y deux polonais. Une application $\mathcal{I} \colon X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$ est *Borel-Borel* si pour tout borélien $B \subseteq X \times Y$ l'ensemble

$$\{x \in X \colon B_x \in \mathcal{I}(x)\}$$

est borélien.

On va voir l'utilité de cette notion avec le théorème d'uniformisation ci-dessous, qu'on peut voir comme s'appliquant à des parties de $X \times Y$ avec de "grandes" sections.

Théorème 5.2. *Soit X, Y deux polonais. Supposons que $\mathcal{I}$ est Borel-Borel et pour tout x $\mathcal{I}_x$ est un σ-idéal de Y. Soit B un sous-ensemble de $X \times Y$*

tel que pour tout $x \in \pi_X(B)$, $B_x \notin \mathcal{I}_x$. Alors B admet une uniformisation borélienne (et donc $\pi_X(B)$ est borélien).

Avant de commencer cette preuve, introduisons un peu de notation : une partie $\mathcal{T}$ de $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ est un *arbre* si pour tout $t \in \mathcal{T}$ tous les segments initiaux de t sont dans $\mathcal{T}$. Une *branche infinie* est une suite $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_{|n}$ appartient à $\mathcal{T}$ pour tout n. Cette notion combinatoire est fondamentale en théorie descriptive des ensembles.
Dans la suite on va utiliser l'*ordre lexicographique*, noté $\leq_{lex}$, défini de la façon usuelle sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$; c'est un ordre borélien. L'intérêt de cet ordre ici est que si un arbre $\mathcal{T}$ a une branche infinie, alors il en a une qui est minimale pour l'ordre lexicographique ; on appelle cette branche la *branche la plus à gauche* de T. Si l'on a une application $x \mapsto \mathcal{T}_x$ qui à x associe un arbre $\mathcal{T}_x$ tel que $\mathcal{T}_x$ a une branche infinie, alors on obtient grâce à la branche la plus à gauche une application "définissable" qui à x aassocie une branche infinie de $\mathcal{T}_x$.

Preuve du théorème 5.2.
Soit B un borélien de $X \times Y$, et d une distance complète sur $X \times Y$. En utilisant les techniques habituelles, on peut trouver un schéma de Lusin $(B^s)_{s\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$ avec les propriétés suivantes :

1. $B^{\emptyset} = B$;
2. $\forall s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\ B^s = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} B^{s\frown k}$;
3. Si pour tout n $B^{\alpha_{|n}}$ est non vide, alors $B^{\alpha} := \cap_n B^{\alpha_{|n}}$ est non vide ;
4. $\mathrm{diam}(B^s) \leq 2^{-|s|}$.

Pour tout $x \in \pi_X(B)$, notons $\mathcal{T}_x = \{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \colon B^s \notin \mathcal{I}_x\}$. ALors $\mathcal{T}_x$ est un arbre non vide dont tout noeud a un successeur (parce que $\mathcal{I}_x$ est un σ-idéal). Par conséquent $\mathcal{T}_x$ a des branches infinies ; appelons a_x sa branche la plus à gauche. Par construction de notre schéma, $B_x^{a_x}$ est réduit à un élément, qu'on appelle $f(x)$. Il est clair que la fonction f est une uniformisation de B ; reste à voir que f est borélienne.
Soit U un ouvert de Y. Si $f(x) \in U$, alors puisque le diamètre de $B_x^{a_{x|n}}$ tend vers 0, il existe un rang m à partir duquel $B_x^{a_{x|n}}$ est contenu dans U. Par conséquent, si $f(x) \in U$, alors la propriété suivante est vraie :

$$\exists m\, \forall n \geq m\, \forall t \in \mathbb{N}^n \ \left(B_x^t \notin \mathcal{I}_x \Rightarrow \exists s \in \mathbb{N}^n \ (s \leq_{lex} t \text{ et } B_x^s \notin \mathcal{I}_x \text{ et } B_x^s \subseteq U)\right)$$

On voit facilement (en utilisant le fait que chaque élément de $\mathcal{T}_x$ a un successeur strict dans $\mathcal{T})_x$ que la propriété ci-dessus est en fait équivalente au fait que $f(x) \in U$. Comme $x \mapsto \mathcal{I}_x$ est Borel-Borel, on en déduit que la condition

“$f(x) \in U$” est coanalytique.
Il nous reste à voir que cette condition est analytique ; pour cela, on fixe une base d'ouverts (U_n) de Y et, en utilisant un raisonnement similaire à celui qu'on vient d'employer, on obtient que $f(x) \in U$ si, et seulement si, il existe k tel que $\overline{U_k} \subseteq U$ et

$$\exists m \, \forall n \geq m \, \forall t \in \mathbb{N}^n \, \left(B_x^t \notin \mathcal{I}_x \Rightarrow \exists s \in \mathbb{N}^n \, (s \leq_{lex} t \text{ et } B_x^s \notin \mathcal{I}_x \text{ et } B_x^s \cap U_k \neq \emptyset)\right)$$

Cette condition est analytique, et finalement on a obtenu que la condition $f(x) \in U$ est borélienne pour tout ouvert U de Y. $\square$

Le théorème principal de ce chapitre est le suivant.

Théorème 5.3. *(Lusin-Novikov)*
Soit X, Y deux polonais et B un borélien à sections dénomrables. Alors B peut s'écrire comme une réunion dénombrable de graphes boréliens.
De plus P peut s'écrire comme une réunion dénombrable de graphes boréliens (i.e de boréliens P_n tels que si on a à la fois $(x, y) \in P_n$ et $(x, y') \in P_n$ alors $y = y'$).

Pour montrer le théorème de Lusin-Novikov, on aura besoin du résultat suivant, qu'on admet pour le moment.

Théorème 5.4. *Soit X, Y deux Boréliens standard et $A \subseteq X \times Y$ un borélien. Alors l'ensemble*

$$\{x \in X : \exists! y \, (x, y) \in A\}$$

est coanalytique.

Dans la suite de cette section, nous allons essayer de démontrer le théorème 5.3 à partir du résultat ci-dessus (qu'on résume en disant "l'ensemble d'unicité d'un borélien est coanalytique"). Commençons par un lemme.

Lemme 5.1. *Soit X, Y deux Boréliens standard et $P \subseteq X \times Y$ un borélien tel que P_x est dénombrable pour tout $x \in X$. Alors la projection de P sur X est borélienne.*

Preuve.
On peut supposer que X, Y sont polonais. Il existe un fermé $F \subseteq \mathcal{N}$ et $f : \mathcal{N} \to X \times Y$ une fonction continue et injective telle que $f(\mathcal{N}) = P$. Introduisons alors la partie $Q \subseteq X \times \mathcal{N}$ définie par

$$Q(x, \alpha) \Leftrightarrow \alpha \in F \text{ et } \pi_X(f(z)) = x \ .$$

Alors Q est fermé dans $X \times \mathcal{N}$, et la projection de Q sur X est la même que celle de P ; autrement dit il suffit de démontrer le lemme ci-dessus dans le cas où P est fermé.
Mais alors le théorème de Baire pointe le bout de son nez : chaque P_x est dénombrable et fermé, donc a un point isolé dès qu'il est non vide. Fixons une base d'ouverts (U_n) de Y, et posons

$$A_n = \{x \colon \exists! y \left((x,y) \in P \text{ et } y \in V_n\right)\}$$

On vient d'expliquer que la projection de P sur X est égale à $\cup_n A_n$, et d'autre part le théorème 5.4 nous permet de voir que chaque A_n est coanalytique. Par conséquent la projection de P sur X est coanalytique, et le théorème de Souslin nous permet de voir qu'elle est en fait analytique. □

Preuve du théorème de Lusin-Novikov.
Tout d'abord, notons qu'il est suffisant de prouver qu'on a $B \subseteq \cup_n B_n$, où chaque B_n est un graphe borélien. Quitte à agrandir artificiellement B, on peut donc supposer que chaque section B_x est dénombrable et infinie. Notre but est de construire une application borélienne $e \colon X \to Y^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout x e_x énumère B_x. Une telle application permet bien sûr d'obtenir une uniformisation de B, par exemple en posant $g(x) = e(x)(0)$.
Pour cela, commençons par définir un ensemble $E \subseteq X \times Y^{\mathbb{N}}$ en posant

$$(x,e) \in C \Leftrightarrow (\forall n (x, e(n)) \in B) \text{ et } (\forall y \in B_x \, \exists n \, y = e(n)) \ .$$

Cet ensemble est borélien ; en effet, il est clair que la condition "$\forall n (x, e(n)) \in B$" est borélienne ; appelons $C(x,e)$ la condition "$\forall y \in B_x \, \exists n \, y = e(n)$" . Alors on a

$$(x,e) \notin C \Leftrightarrow \exists y \in B_x \, \forall n \, e(n) \neq y$$

On voit donc que le complémentaire de C est la projection d'un borélien de $X \times Y^{\mathbb{N}} \times Y$ à sections dénombrables, par suite le lemme 5.1 montre que le complémentaire de C est borélien, donc C est borélien.
On a déplacé notre problème : pour conclure, il nous faut obtenir une uniformisation boréliene de E... L'avantage, c'est qu'on va arriver à trouver un σ-idéal témoignant que E_x est gros pour tout x dans $\pi_x(E)$.
Notre idéal est en fait tout trouvé : pour tout x, E_x est une sous-partie de $B_x^{\mathbb{N}}$, qui est naturellement homéomorphe à $\mathcal{N}$ (en le munissant de la topologie produit de la topologie discrète). De plus, on a

$$E_x = \{e \in B_x^{\mathbb{N}} \colon \forall y \in B_x \, \exists n \, e(n) = y\}$$

Par conséquent E_x est un G_δ dense dans $B_x^{\mathbb{N}}$, et on envie de définir un σ-idéal $\mathcal{I}_x$ en posant, pour tout $A \subseteq Y^{\mathbb{N}}$,

$$A \in \mathcal{I}_x \Leftrightarrow A \cap E_x \text{ est maigre dans } B_x^{\mathbb{N}}.$$

Il est clair que $\mathcal{I}_x$ est un σ-idéal pour tout x, et que $E_x \notin \mathcal{I}_x$ pour tout $x \in X$. Finalement, il nous reste à montrer que $\mathcal{I}$ est Borel-Borel. Soit donc A un borélien de $X \times Y$; on peut supposer que $A \subseteq E$. Alors on voit que

$$\begin{array}{lcl} A_x \in \mathcal{I}_x & \Leftrightarrow & \exists e \in Y^{\mathbb{N}} (x,e) \in E \text{ et} \\ & & \forall n \neq m\, e(n) \neq e(m) \text{ et} \\ & & \{\omega \in \mathcal{N} \colon (x, e \circ \omega) \in A\} \text{ est maigre} \end{array}$$

Définissons maintenant une partie Q de $X \times Y^{\mathbb{N}}$ en posant

$$\begin{array}{lcl} (x,e) \in Q & \Leftrightarrow & (x,e) \in E \text{ et } \forall n \neq m\, e(n) \neq e(m) \text{ et} \\ & & \{\omega \in \mathcal{N} \colon (x, e \circ \omega) \in A\} \text{ est maigre} \end{array}$$

Admettons pour le moment que Q soit borélien ; alors on a vu que

$$A_x \in \mathcal{I}_x \Leftrightarrow \exists e\, (x,e) \in Q \ .$$

Par conséquent, $\{x \colon A_x \in \mathcal{I}_x\}$ est analytique. Comme le choix de la bijection e n'importe pas, on voit aussi que

$$A_x \in \mathcal{I}_x \Leftrightarrow \forall e \ \left((x,e) \in E \text{ et } \forall n \neq m\, e(n) \neq e(m)\right) \Rightarrow (x,e) \in Q \ .$$

Ceci prouve que $\{x \colon A_x \in \mathcal{I}_x\}$ est coanalytique, et donc borélien d'après le théorème de Suslin et ce qu'on a vu précédemment. $\square$

Pour que cette partie de la preuve soit tout à fait complète, il nous faut expliquer pourquoi l'ensemble Q ci-dessus est borélien. C'est une conséquence directe du lemme ci-dessous, qui est un cas particulier d'un théorème dû à Montgomery et Novikov. Notez que, avec notre terminologie, ce lemme dit que l'application $x \mapsto \mathcal{I}_x$, où $\mathcal{I}_x$ est le σ-idéal formé par les parties maigres, est Borel-Borel.

Lemme 5.2. *Soit X, Y deux polonais, $A \subseteq X \times Y$ un borélien et $U \subseteq Y$ un ouvert. Alors $\{x \in X \colon A_x \cap U$ est maigre$\}$ est borélien.*

Preuve.
On va montrer que la famille $\mathcal{A}$ formée par les sous-parties de $X \times Y$ pour lequelles le lemme ci-dessus est vrai pour tout ouvert de Y contient les ouverts, et est stable par union dénombrable et passage au complémentaire. Les deux premiers points sont très faciles ; pour voir le troisième point, prenons $A \in \mathcal{A}$ et notons B son complémentaire. Fixons aussi un ouvert U de Y
Pour tout $x \in X$, B_x est maigre dans U si et seulement si A_x est comaigre

dans U ; si l'on se fixe une base (U_n) d'ouverts de Y on sait que A_x est co-maigre dans U si et seulement si il n'existe pas de n tel que $U_n \subseteq U$ et A_x soit maigre dans U_n, Autrement dit, B_x est maigre dans U si, et seulement si,

$$x \in \bigcap_{U_n \subseteq U} (X \setminus \{x \colon A_x \cap U_n \text{ est maigre }\})$$

Comme l'intersection ci-dessus est dénombrable et chacun des ensembles qui y a apparaissent est borélien, ceci achève la preuve du lemme. □

Pour finir la preuve du théorème de Lusin-Novikov, il nous faudrait prouver que l'ensemble d'unicité d'un borélien est coanalytique. Pour cela nous allons utiliser la méthode des *jeux topologiques*.

5.2 Jeux topologiques et ensembles d'unicité.

Commençons par remarquer qu'il est suffisant de prouver le théorème 5.4 dans le cas où $X = Y = \mathcal{N}$, et A est fermé.

On va utiliser une représentation combinatoire des fermés de $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$; disons qu'une partie $\mathcal{T}$ de $2^{<\mathbb{N}} \times 2^{<\mathbb{N}}$ est un arbre sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) $(t,u) \in \mathcal{T} \Rightarrow |t| = |u|$

(ii) $(t,u) \subset (t',u')$ et $(t',u') \in \mathcal{T} \Rightarrow (t,u) \in \mathcal{T}$.

Une branche infinie dans un tel arbre est définie de la façon usuelle ; on note $[\mathcal{T}]$ l'ensemble des branches infinies de $\mathcal{T}$. On dit que l'arbre $\mathcal{T}$ est étêté si tout élément de $\mathcal{T}$ a une extension stricte dans $\mathcal{T}$.

Il est facile de voir que les fermés de $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ sont les parties de la forme $[\mathcal{T}]$, où $\mathcal{T}$ est un arbre étêté sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. En effet, si A est un fermé de $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$, on définit $\mathcal{T}$ en disant qu'une paire (u,s) est dans $\mathcal{T}$ si, et seulement si, (u,s) est un segment initial d'un élément de A (on voit même que cette application est une bijection de l'ensemble des fermés de $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ sur l'ensemble des arbres étêtés sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$).

L'intérêt de cette représentation est que les sections d'un fermé $A \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ sont maintenant représentées comme des ensembles de branches infinies d'arbres sur $\mathbb{N}$ (si $x \in \mathcal{N}$ on note $\mathcal{T}_x$ l'arbre correspondant ; formellement, $y \in \mathcal{T}_x$ si et seulement si $(x_{|n}, y_{|n}) \in \mathcal{T}$ pour tout n).

Notons Tr l'ensemble des arbres sur $\mathbb{N}$; il s'identifie à une partie de $2^{2^{<\mathbb{N}}}$, qui est homéomorphe à $\mathcal{C}$, et cette partie est G_δ. Dans la suite on munit Tr de cette topologie ; on introduit enfin l'ensemble BU des arbres sur $\mathcal{N}$ ayant une unique branche infinie.

L'intérêt de tout ce travail est que, si A est un fermé de $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ et $\mathcal{T}$ est l'arbre étêté sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ associé à A, alors on a pour tout $x \in \mathcal{N}$:

$$\exists! y \ (x, y) \in A \Leftrightarrow \mathcal{T}_x \in BU \ .$$

De plus, l'application qui à x associe $\mathcal{T}_x$ est continue de $\mathcal{N}$ dans Tr ; pour prouver le théorème 5.4, il nous suffit donc de prouver que BU est coanalytique dans Tr (puisque l'image réciproque d'un ensemble coanalytique par une fonction continue est coanalytique).
Si un arbre $\mathcal{T}$ n'est pas dans BU, il y a deux possibilités : l'arbre a au moins deux branches infinies, ou bien l'arbre n'a pas de branches infinies.
Dans le second cas, on dit que l'arbre $\mathcal{T}$ est *bien fondé* On définit un ordinal dénombrable appelé *rang* d'un élément s et noté $\rho(s)$ dans un arbre bien fondé $\mathcal{T}$ en posant :

$$\rho(s) = \sup\{\rho(s \frown a) + 1 \colon s \frown a \in \mathcal{T}\} \ .$$

En particulier, si s est terminal, on a $\rho(s) = 0$; intuitivement, la fonction ρ mesure la "profondeur" de l'arbre $\mathcal{T}$ en-dessous de l'élément s. On note $\rho(\mathcal{T})$ l'ordinal $\rho(\emptyset)$. c'est un bon exercice de vérifier que $\rho(\mathcal{T})$ est un ordinal dénombrable pour tout $\mathcal{T}$ bien fondé (pensez à un analogue de la dérivation de Hausdorff).
Finalement, introduisons l'ensemble L_∞ formé par les arbres sur $\mathbb{N}$ ayant pour tout n un élément de longueur n ; pour tout arbre $\mathcal{T}$ bien fondé dans L_∞ on a $\rho(\mathcal{T}) \geq \omega$, et par conséquent on doit avoir $\rho(\mathcal{T}) = \lambda + n$, où λ est un ordinal limite et $n \in \omega$.

Tout ceci étant (enfin) posé, on introduit un *jeu topologique* à deux joueurs (notés I et II) ; on commene par fixer un arbre $\mathcal{T}$ sur $\mathbb{N}$, et alors une partie du jeu $G_{\mathcal{T}}$ est résumée par le schéma suivant :

$$\begin{array}{cccccccc} \mathrm{I} & n_0 & & x(0) & & x(1) & & \\ & & & & & & & \cdots \\ \mathrm{II} & & y(0) & & y(1) & & & \end{array}$$

Tous les éléments joués par I, II sont des entiers ; I commence la partie en jouant un entier n_0, puis II répond en jouant un entier $y(0)$, puis I répond par un entier $x(0)$, etc. A la fin d'une partie, I a joué un entier n_0 et construit un élément x de $\mathcal{N}$, tandis que II a construit un élément y de $\mathcal{N}$ (n_0 sert à rendre l'ensemble W ci-dessous borélien). On dit que I gagne la partie si la condition suivante est satisfaite :

$$\forall n \geq 1 (y_{|n} \in \mathcal{T} \Rightarrow x_{|n} \in \mathcal{T}) \text{ et } \exists n < n_0 \, x(n) \neq y(n) \ .$$

Si l'on oublie n_0 pour l'instant, on voit que lors d'une partie II essaie de construire une branche infinie de $\mathcal{T}$ tandis que I cherche à produire une branche infinie de $\mathcal{T}$ différente de celle jouée par II (s'il en existe une) ou sinon, s'il n'y a pas de branche infinie, choisit un élément différent de celui joué par II dès que celui-ci est sorti de l'arbre.
On dit que I a une *stratégie gagnante* s'il existe une façon pour I de gagner quelle que soit la suite jouée par II ; formellement, une stratégie σ pour I est un arbre non-vide sur $\mathbb{N}$ tel que

(i) Si $s \in \sigma$ est de longueur impaire (i.e c'est à II de jouer) alors $s \frown n \in \sigma$ pour tout n (i.e II peut jouer ce qu'il veut) ;

(ii) Si $s \in \sigma$ est de longueur paire (i.e c'est à I de jouer) alors il existe un unique n tel que $s \frown n \in \sigma$ (i.e la stratégie impose le coup que I doit jouer).

On dit qu'une stratégie σ est *gagnante* pour I si toute partie au cours de laquelle I suit σ est gagnante pour I. La raison combinatoire pour laquelle BU est coanalytique est alors la proposition suivante :

Proposition 5.5. *Soit $\mathcal{T} \in L_\infty$.*

$$T \notin BU \Leftrightarrow I \text{ a une stratégie gagnante dans } G_{\mathcal{T}} \ .$$

Cette proposition, modulo un calcul de complexité élémentaire, nous permet enfin de conclure la preuve du théorème 5.4 ; en effet, si l'on introduit un ensemble $W \subseteq Tr \times Tr$ en disant que $(\sigma, \mathcal{T}) \in W$ si σ est une stratégie gagante pour I dans le jeu $G_{\mathcal{T}}$ alors on voit que W est borélien (voir ci-dessous), et que

$$\mathcal{T} \notin BU \Leftrightarrow \mathcal{T} \notin L_\infty \text{ ou } (\mathcal{T} \in L_\infty \text{ et } \exists\sigma(\sigma, \mathcal{T}) \in W) \ .$$

Par conséquent, BU est bien coanalytique.
Pour voir que W est borélien, notons que $(\sigma, \mathcal{T}) \in W$ si et seulement si

$$\begin{aligned}
&\sigma \neq \emptyset \text{ et} \\
&\forall m \, \forall s \in \mathbb{N}^m \ (s \in \sigma \text{ et } m \text{ est impair} \Rightarrow \forall n \ s \frown n \in \sigma) \text{ et} \\
&\forall m \, \forall s \in \mathbb{N}^m (s \in \sigma \text{ et } m \text{ est pair} \Rightarrow \exists! n \ s \frown n \in \sigma) \text{ et} \\
&\forall n \, \forall s \in \mathbb{N}^n \forall t \in \mathbb{N}^n \, \forall n_0 (n_0, t_0, s_0, \ldots, t_{n-1}, s_{n-1}) \in \sigma \Rightarrow \\
&(t \in \mathcal{T} \Rightarrow s \in \mathcal{T}) \text{ et } (n \geq n_0 \Rightarrow \exists i < n_0 \ s_i \neq t_i)
\end{aligned}$$

Cette formule compliquée permet de voir que W est G_δ.

Preuve de la proposition 5.5.
Fixons un arbre $\mathcal{T}$; si $\mathcal{T}$ est dans BU alors il est clair que II a une stratégie gagnante dans $G_{\mathcal{T}}$, qui consiste à jouer l'unique branche infinie de $\mathcal{T}$. Il est alors bien sûr impossible que I ait une stratégie gagnante, ce qui prouve une des deux implications qui nous intéressent ici.
Pour démontrer l'autre implication, fixons un arbre $\mathcal{T} \in L_\infty \setminus BU$. Il nous faut décrire une stratégie gagnante pour I. Si $\mathcal{T}$ a deux branches infinies, c'est facile : soit n le plus petit entier où deux branches x_1, x_2 diffèrent ; I commence par jouer $n_0 = n+1$, puis I joue ses $n-1$ premiers coups en énumérant le début commun de x_1 et x_2 ; au n-ième coup, quoi que II joue, il est possible pour I de jouer un élément qui soit le début d'une branche infinie de $\mathcal{T}$ et soit différent de ce que II a joué. I n'a alors plus qu'à continuer à jouer cette branche infinie.
Il nous reste à traiter le cas où $\mathcal{T}$ n'a pas de branche infinie ; comme $\mathcal{T} \in L_\infty$ on sait que $\rho(\mathcal{T}) = \lambda + n$, où λ est un ordinal limite et n un entier naturel. La stratégie de I est alors la suivante : il commence par jouer $n_0 = n+1$. Disons maintenant qu'une position $(n_0, y(0), x(0), \dots, y(k), x(k))$ ave $k < n_0$ est *décisive* si

(A) $x_{|k} \in \mathcal{T}$, $y_{|k} \in \mathcal{T}$, $y_{|(k+1)} \notin \mathcal{T}$ et $x(k) \neq y(k)$, ou

(B) $y_{|(k+1)} \in \mathcal{T}$, $x_{|(k+1)} \in \mathcal{T}$, et $\rho(y_{|(k+1)}) < \rho(x_{|(k+1)})$.

Si I parvient à atteindre une position décisive, alors il lui est facile de continuer de façon à gagner la partie : dans le cas (A), I peut jouer n'importe quoi à partir du rang $k+1$; dans le cas (B), il est possible pour I de réagir aux coups $y(k+1)$, $y(k+2)$,etc de II en jouant $x(k+1)$, $x(k+2)$, etc de telle façon que pour tout $m \geq k$ on ait

$$y_{|(m+1)} \in \mathcal{T} \Rightarrow x_{|(m+1)} \in \mathcal{T} \text{ et } \rho(y_{|(m+1)}) \leq \rho(x_{|(m+1)}) \ .$$

Il nous reste à justifier le fait que I puisse atteindre une position décisive. Disons que II commence par $y(0)$. Si $(y(0)) \notin \mathcal{T}$ alors I joue n'importe quel autre entier et il a atteint une position décisive. Sinon I essaie de trouver $x(0)$ tel que $x_{|1} = (x(0)) \in \mathcal{T}$ et $\rho(x_{|1}) < \rho(y_{|1})$. Si c'est possible, I a atteint une position décisive ; sinon, on doit avoir $n > 0$, et $\rho(y_{|1}) = \lambda + n - 1$. Dans ce cas *I* joue $x(0) = y(0)$. *I* réessaie de faire la même chose au deuxième coup, troisième coup, etc ; si I n'a pas atteint une position décisive avant $n-1$ coups il doit alors arriver que $\rho(y_{|n}) = \lambda$, et dans ce cas quoi que II joue au rang n I peut atteindre une position décisive. $\square$

Pour conclure ces notes, citons deux corollaires des résultats que nous avons obtenus dans ce chapitre, que nous laissons en exercice.

Exercice 5.6. Soit X, Y deux boréliens standard et $P \subseteq X \times Y$ un borélien tel que P_x est dénombrable pour tout x. Montrer qu'il existe une famille dénombrable de fonctions boréliennes f_n, dont le domaine est inclus dans la projection de P, et telles que $P_x = \{f_n(x) \colon n \in \mathbb{N}\}$ pour tout x.
Pour $i = 1, 2, \ldots, \aleph_0$ on note maintenant P_i l'ensemble des x tels que le cardinal de P_x soit exactement égal à i. Montrer que tous les P_i sont boréliens.

Exercice 5.7. (Feldman-Moore)
Soit X un borélien standard et $E \subseteq X \times X$ une relation d'équivalence borélienne et à classes dénombrables. Montrer qu'il existe un groupe déombrable G d'automorphismes boréliens de X tel que

$$\forall x, y \in X \ (xEy) \Leftrightarrow (\exists g \in G \ g(x) = y) \ .$$

Bibliographie

[Cho69] Gustave Choquet. *Cours d'analyse. Tome II : Topologie. Espaces topologiques et espaces métriques. Fonctions numériques. Espaces vectoriels topologiques.* Deuxième édition, revue et corrigée. Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1969.

[Gao09] Su Gao. *Invariant descriptive set theory.* Pure and Applied Mathematics (Boca Raton). CRC Press, Boca Raton, FL, 2009.

[Hal74] Paul R. Halmos. *Naive set theory.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1974. Reprint of the 1960 edition.

[HR98] Paul Howard and Jean E. Rubin. *Consequences of the axiom of choice*, volume 59 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[Jec03] Thomas Jech. *Set theory : The third millennium edition, revised and expanded.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[Kec95] Alexander S. Kechris. *Classical descriptive set theory*, volume 156 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[KM] Kazimierz Kuratowski and Andrzej Mostowski. *Set theory, with an introduction to descriptive set theory.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.

[Mos06] Yiannis Moschovakis. *Notes on set theory.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, second edition, 2006.

[Oxt80] John C. Oxtoby. *Measure and category*, volume 2 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, second edition, 1980.

[Sri98] S.M Srivastava. *A Course on Borel Sets*, volume 180 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1998.

[Wag85] Stan Wagon. *The Banach-Tarski paradox*, volume 24 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

Index