Introduction à la Logique Mathématique

Seconde partie : Théorie des modèles

Thomas Blossier & Julien Melleray

Table des matières

5 Structures et théories **1**

5.1 Structures, langage associé 1

5.2 Sous-structures, plongements, isomorphismes 2

5.3 Langage du 1er ordre 6

5.4 Satisfaction des formules du 1er ordre 7

5.5 Ensembles définissables 11

5.6 Théories et leurs modèles 12

5.7 Extensions élémentaires 14

6 Compacité, Théorème de Löwenheim-Skolem **17**

6.1 Enoncés du théorème de compacité 17

6.2 Ultraproduits - Une démonstration du théorème de compacité 19

6.3 Théorème de l'extension élémentaire commune 21

6.4 Théorème de Löwenheim-Skolem - Théories κ-catégoriques 21

7 Types et élimination des quanteurs **25**

7.1 Types 25

7.2 Elimination des quanteurs 27

7.3 Les corps algébriquement clos 29

8 Espaces de types, Saturation, Théorème d'omission **31**

8.1 Espaces de types 31

8.2 Types sur des paramètres 32

8.3 Saturation 34

8.4 Théorème d'omission des types 36

8.5 Théories $\aleph_0$-catégoriques 37

9 Limtes de Fraïssé **39**

Chapitre 5

Structures et théories

Les théoriciens des modèles s'intéressent aux structures et à leurs ensembles définissables. Ils étudient plus précisément des classes de structures suivant des propriétés partagées par celles-ci, qui peuvent être par exemple combinatoires ou géométriques. Dans ce chapitre on présente des notions de base de la théorie des modèles. Les aspects syntaxiques des langages considérés sont introduits sans être complètement détaillés, l'essentiel pour les théoriciens des modèles étant le point de vue sémantique.

5.1 Structures, langage associé

Les structures, structures de groupes, de corps ..., sont des objets usuels pour les mathématiciens contemporains. Dans la première partie du cours, la structure sous-jacente était réduite à un univers muni d'une unique relation binaire, $\in$ (et de l'égalité $=$). Pour ce cours, nous définissons la notion de structures de la façon suivante :

Définition 5.1.

1. Une *structure* $\mathcal{M}$ est la donnée d'un *ensemble de base* ou *univers* M non vide muni :
   - d'une famille $(c_i^{\mathcal{M}})_{i\in I}$ de constantes, où $c_i^{\mathcal{M}} \in M$,
   - d'une famille $(f_j^{\mathcal{M}})_{j\in J}$ de fonctions, où pour tout $j \in J$, $f_j^{\mathcal{M}}$ est une fonction totale de M^{n_j} dans M pour un entier $n_j > 0$,
   - d'une famille $(R_k^{\mathcal{M}})_{k\in K}$ de relations, où pour tout $k \in K$, $R_k^{\mathcal{M}}$ est un sous-ensemble de M^{n_k} pour un entier $n_k > 0$.

   On supposera de plus qu'une structure est toujours munie de l'égalité, c'est-à-dire que la diagonale de $\mathcal{M}^2$ est l'une des relations $R_k^{\mathcal{M}}$. L'ensemble de base M sera appelé *domaine* de $\mathcal{M}$ et sera souvent noté de la même façon que $\mathcal{M}$.
2. Le *langage* L associé à une structure $\mathcal{M}$ consiste en :
   - un symbole de constante c_i pour chaque constante $c_i^{\mathcal{M}}$,
   - un symbole de fonction f_j *d'arité* n_j pour chaque fonction $f_j^{\mathcal{M}}$,
   - un symbole de relation R_k *d'arité* n_k pour chaque relation $R_k^{\mathcal{M}}$.

3. Une *L-structure* est une structure $\mathcal{M}$ dont le langage associé est L.

Notation. Un langage arbitraire sera noté

$$L = \{(c_i)_{i\in I}, (f_j)_{j\in J}, (R_k)_{k\in K}\}.$$

Une L-structure sera notée

$$\mathcal{M} = \langle M, (c_i^{\mathcal{M}})_{i\in I}, (f_j^{\mathcal{M}})_{j\in J}, (R_k^{\mathcal{M}})_{k\in K}\rangle$$

ou plus simplement s'il n'y a pas d'ambiguité

$$\mathcal{M} = \langle M, (c_i)_{i\in I}, (f_j)_{j\in J}, (R_k)_{k\in K}\rangle.$$

Dans ces notations, l'égalité sera le plus souvent omise.

Exemple 5.2.

1. $\langle \mathbb{N}, 0, +\rangle$ et $\langle \mathbb{Z}, 0, +\rangle$ sont des structures ayant le même langage associé $L = \{0, +\}$ qui est constitué d'un symbole de constante 0, d'un symbole $+$ de fonction binaire et d'un symbole de relation $=$ pour l'égalité.
2. Le langage des ordres $L_{ord} = \{<\}$ ne contient que deux relations binaires $=$ et $<$. Les structures $\langle \mathbb{Z}, <\rangle$ et $\langle \mathbb{Q}, <\rangle$ sont des L_{ord}-structures.
3. Le langage des groupes $L_{gp} = \{1, \cdot, ^{-1}\}$ contient une constante 1, une fonction binaire $\cdot$, une fonction unaire $^{-1}$ et l'égalité.
4. Le langage des anneaux $L_{ann} = \{0, 1, +, -, \cdot\}$ contient deux constantes 0 et 1, trois fonctions binaires $+$, $-$, $\cdot$, et l'égalité.
5. Le langage de la théorie des ensembles $\in$.

Remarque. Toute ensemble avec une relation binaire peut être vue comme une L_{ord}-structure, même si cette relation n'est pas une relation d'ordre. On pourrait par exemple considérer la structure $\mathcal{M} = \langle M, <\rangle$ avec $M = \mathbb{C}$ et $<^{\mathcal{M}} = \{(x, y) \in M^2 : y^2 = x^3\}$. Autrement dit la donnée d'un langage L ne fixe pas les propriétés des constantes, fonctions ou relations d'une L-structure (à l'exception des arités). Nous utiliserons des formules construites à partir de L pour exprimer certaines propriétés.

Nous fixons pour toute la suite un langage $L = \{(c_i)_{i\in I}, (f_j)_{j\in J}, (R_k)_{k\in K}\}$.

5.2 Sous-structures, plongements, isomorphismes

Définition 5.3. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux L-structures. Alors $\mathcal{M}$ est une *sous-structure* de $\mathcal{N}$ (on notera $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$) si $M \subset N$ et si cette inclusion préserve les constantes, les fonctions et les relations, c'est-à-dire est telle que :
– pour toute constante $c \in L$, $c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{N}}$,
– pour toute fonction n-aire $f \in L$ et pour tout $\bar{a} \in M^n$, $f^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = f^{\mathcal{N}}(\bar{a})$,

– pour toute relation n-aire $R \in L$ et pour tout $\bar{a} \in M^n$, $\bar{a} \in R^{\mathcal{M}}$ ssi $\bar{a} \in R^{\mathcal{N}}$.

Remarque 5.4.

1. Soit $\mathcal{N}$ une L-structure. On dira aussi qu'une partie M de N est une *sous-structure* de $\mathcal{N}$ si M contient toutes les constantes et est close par toutes les fonctions. Dans ce cas, on vérifie (exercice) que la structure ("induite sur M")

$$\mathcal{M} := \langle M, (c_i^{\mathcal{N}}), (f_j^{\mathcal{N}}{}_{|M^{n_j}}), (R_k \cap M^{n_k}) \rangle$$

est une sous-structure, au sens précédent, de $\mathcal{N}$.

2. Soit $\mathcal{N}$ une L-structure et A une partie de N. Il existe une plus petite sous-structure de $\mathcal{N}$ contenant A, la sous-structure engendrée par A, qui est la clôture de A et de l'ensemble des constantes de L par les fonctions de L.
3. La notion de sous-structure dépend du langage choisi. Par exemple, $\mathbb{N}$ est une sous-structure de $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ et de $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ mais pas de $\langle \mathbb{Z}, 0, +, - \rangle$.

Exercice 5.5. Soit un corps K.

1. Remarquer que toute sous-structure de la structure $\langle K, 0, 1, +, -, \cdot \rangle$ est un anneau.
2. Ajouter une fonction f au langage telle que toute sous-structure de $\langle K, 0, 1, +, -, \cdot, f \rangle$ soit un corps.

Exercice 5.6. Soit I un ensemble totalement ordonné et $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ une chaîne de L-structures ($\mathcal{M}_i \subset \mathcal{M}_j$, pour tout $i < j$). Alors la réunion $M = \cup_{i \in I} M_i$, est munie canoniquement d'une L-structure, notée $\mathcal{M} = \cup_{i \in I} \mathcal{M}_i$, qui satisfait pour tout $i \in I$, $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{M}$.

Définition 5.7. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux L-structures.

1. Un *morphisme* de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ est une application σ de M dans N qui préserve les constantes, les fonctions et les relations de la façon suivante :
   – pour toute constante $c \in L$, $\sigma(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$,
   – pour toute fonction n-aire $f \in L$ et pour tout $\bar{a} \in M^n$, $\sigma(f^{\mathcal{M}}(\bar{a})) = f^{\mathcal{N}}(\sigma(\bar{a}))$,
   – pour toute relation n-aire $R \in L$ et pour tout $\bar{a} \in M^n$, si $\bar{a} \in R^{\mathcal{M}}$ alors $\sigma(\bar{a}) \in R^{\mathcal{N}}$.
2. Un *plongement* de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ est un morphisme σ de M dans N qui de plus vérifie pour toute relation n-aire $R \in L$ et pour tout $\bar{a} \in M^n$,

$$\bar{a} \in R^{\mathcal{M}} \text{ si et seulement si } \sigma(\bar{a}) \in R^{\mathcal{N}}.$$

Remarquons qu'un plongement est nécessairement injectif (car l'égalité est l'une des relations du langage). Notons également que l'image d'un plongement est une sous-structure et que réciproquement $M \subset N$ est une sous-structure de $\mathcal{N}$ ssi l'identité de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ est un plongement.

3. Un *isomorphisme* de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ est un plongement surjectif. Un *automorphisme* de $\mathcal{M}$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}$ sur lui-même. On dénote $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ pour $\mathcal{M}$ isomorphe à $\mathcal{N}$.

Nous allons introduire maintenant la notion de *va-et-vient infini* , notion qui sera très utile pour l'étude de structures.

Définition 5.8. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux L-structures.

1. Un *isomorphisme partiel* de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ est un isomorphisme d'une sous-structure de $\mathcal{M}$ sur une sous-structure de $\mathcal{N}$. (Remarque : tout plongement est un isomorphisme partiel.)
2. On dira qu'une famille non vide $\mathcal{F}$ d'isomorphismes partiels de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ définit un *va-et-vient infini* entre les structures $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ si pour tout $\sigma \in \mathcal{F}$,
   – pour tout $m \in M$, il existe $\tau \in \mathcal{F}$ prolongeant σ tel que $m \in \mathrm{Dom}(\tau)$ (*VA*),
   – pour tout $n \in N$, il existe $\tau \in \mathcal{F}$ prolongeant σ tel que $n \in \mathrm{Im}(\tau)$ (*VIENT*).
   Une telle famille d'isomorphismes partiels est dite *famille Karpienne* .
3. On dira que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont ∞-*équivalentes* s'il existe un va-et-vient infini entre ces structures.

Exemple 5.9. Deux ordres totaux denses sans extrémité sont ∞-équivalents.
Soient $\langle X, < \rangle$ et$\langle Y, < \rangle$ deux ordres totaux denses sans extrémité. Soit $\mathcal{F}$ la famille des isomorphismes entre des parties finies de X et Y. Cette famille est évidemment non vide : pour tout $x \in X$ et $y \in Y$, l'application qui à x associe y est un isomorphisme de $\{x\}$ sur $\{y\}$. Soit σ un isomorphisme de $A = \{a_1, ..., a_n\} \subset X$ sur $B = \{b_1, ..., b_n\} \subset Y$. On peut supposer que pour tout i, $\sigma(a_i) = b_i$ et que $a_1 < a_2 < ... < a_n$. Dans ce cas on a aussi $b_1 < b_2 < ... < b_n$. Montrons le VA (le VIENT est symétrique) : soit $x \in X \setminus A$. Alors ou bien $x < a_1$ et dans ce cas on prolonge σ en envoyant x sur un $y < b_1$, ou bien $a_i < x < a_{i+1}$ et on prolonge σ en envoyant x sur un $y \in Y$ tel que $b_i < y < b_{i+1}$, ou bien $a_n < x$ et on prolonge σ en envoyant x sur un $y > b_n$.

Exemple 5.10. Deux corps algébriquement clos K_1 et K_2 de même caractéristique et de degré de transcendance infini sont ∞-équivalents.
Soit $\mathcal{F}$ la famille des isomorphismes entre des sous-corps finiment engendrés respectivement de K_1 et K_2. Comme K_1 et K_2 ont même caractéristique, $\mathcal{F}$ est non vide car leurs corps premiers sont isomorphes.
Soit $\sigma \in \mathcal{F}$ un isomorphisme de k_1 sur k_2. Montrons le VA (le VIENT est symétrique) : soit $a \in K_1$.
Ou bien a est algébrique sur k_1. Soit $P \in k_1[X]$ son polynôme minimal. Alors $Q = \sigma(P)$ est un polynôme irréductible de $k_2[X]$. Comme K_2 est algébriquement clos il existe $b \in K_2$ qui a Q pour polynôme minimal sur k_2. On obtient alors un isomorphisme de $k_1(a)$ sur $k_2(b)$ qui prolonge σ en envoyant a sur b.
Ou bien a est transcendant sur k_1. Comme k_2 est finiment engendré et K_2 est de degré de transcendance infini, il existe $b \in K_2$ transcendant sur k_2. Même conclusion que dans le cas précédent.

Exercice 5.11. Soit K un corps. On considère $L_K = \{0, +, \lambda_k : k \in K\}$ le langage des K-espaces vectoriels, les λ_k étant des fonctions unaires (les fonctions scalaires). Soient E et F deux K-espaces vectoriels vus comme L_K-structures. Montrer que si E et F sont de dimension infinie alors ils sont ∞-équivalents.

Exercice 5.12. Donner un exemple de deux ordres totaux discrets infinis qui ne sont pas ∞-équivalents.

Exercice 5.13. Montrer que la relation d'∞-équivalence est bien une relation d'équivalence.

Remarque 5.14. Si deux structures $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont isomorphes alors il existe un va-et-vient infini entre ces deux structures, en effet la famille réduite à un isomorphisme entre les deux structures est une famille Karpienne.

Réciproquement :

Proposition 5.15. *Deux structures dénombrables qui sont ∞-équivalentes sont isomorphes.*

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ une famille Karpienne d'isomorphismes partiels définissant un va-et-vient infini entre deux structures dénombrables $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$. On choisit une énumération $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de M et une énumération $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de N.
On définit alors par récurrence une suite croissante $(\sigma_i)_{i\in\omega}$ d'isomorphismes partiels dans $\mathcal{F}$ telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$ et pour tout $j < i$, $m_j \in \mathrm{Dom}(\sigma_i)$ et $n_j \in \mathrm{Im}(\sigma_i)$. On choisit pour cela, n'importe quel élément de $\mathcal{F}$ pour σ_0. Supposons que $\sigma_i \in \mathcal{F}$ est choisi. Par va-et-vient, il existe $\tau \in \mathcal{F}$ prolongeant σ_i tel que $m_i \in \mathrm{Dom}(\tau)$ et $n_i \in \mathrm{Im}(\tau)$. On prend alors pour σ_{i+1}, l'isomorphisme partiel τ.
Soit $\sigma = \cup_{i\in\mathbb{N}}\sigma_i$. Alors $\mathrm{Dom}(\sigma) = M$ et $\mathrm{Im}(\sigma) = N$. Vérifions que σ est un plongement :
– soit c une constante de L. Alors

$$\sigma(c^{\mathcal{M}}) = \sigma_0(c^{\mathrm{Dom}(\sigma_0)}) = c^{\mathrm{Im}(\sigma_0)} = c^{\mathcal{N}}.$$

– soit f une fonction n-aire de L, R une relation n-aire de L et $\bar{a} \in M^n$. Alors il existe un entier i tel que $\bar{a} \in (\mathrm{Dom}(\sigma_i))^n$. On a donc

$$\sigma(f^{\mathcal{M}}(\bar{a})) = \sigma_i(f^{\mathrm{Dom}(\sigma_i)}(\bar{a})) = f^{\mathrm{Im}(\sigma_i)}(\sigma_i(\bar{a})) = f^{\mathcal{N}}(\sigma(\bar{a}))$$

et $\bar{a} \in R^{\mathcal{M}}$ ssi $\bar{a} \in R^{\mathrm{Dom}(\sigma_i)}$ ssi $\sigma_i(\bar{a}) \in R^{\mathrm{Im}(\sigma_i)}$ ssi $\sigma(\bar{a}) \in R^{\mathcal{N}}$.

□

Exemple 5.16. Deux ordres totaux denses sans extrémité et dénombrables sont isomorphes.

5.3 Langage du 1er ordre

Afin d'étudier les *ensembles définissables* et d'exprimer certaines propriétés d'une structure, on considère des formules obtenues à partir du langage de base. On se restreint de manière arbitraire à un langage finitiste (formules de longueur finie) et du premier ordre (on ne quantifie que sur des éléments de l'univers). Ce choix est fait pour des raisons pratiques car c'est un cadre qui fournit de "bons outils techniques", en particulier le théorème de compacité que nous présenterons dans le chapitre suivant.
Dans ce langage, on pourra alors exprimer les *axiomes* (du premier ordre) satisfaits par une structure et donc parler de *théories*.

Nous avons précédemment fixé un langage L et nous allons de plus utiliser un ensemble infini dénombrable de variables qui sont généralement notées $x, y, z, t, x_i, \dots$ pour construire par induction les L-termes et ensuite les L-formules à l'aide de connecteurs :

Définition 5.17.

1. On commence par définir l'ensemble des *termes* du langage L par l'induction suivante :
   - toutes les constantes de L et toutes les variables sont des L-termes,
   - si f est une fonction n-aire de L et $t_1, \dots, t_n$ sont des termes, alors $f(t_1, \dots, t_n)$ est un terme.
2. On définit ensuite l'ensemble des *formules* de L par l'induction suivante :
   - *Les formules atomiques* : si R est une relation n-aire de L et $t_1, \dots, t_n$ sont des termes alors $R(t_1, \dots, t_n)$ est une formule,
   - *Combinaisons booléennes (négation, conjonction, disjonction)* : si ϕ et ψ sont des formules alors $\neg\phi$ (*non* ϕ), $(\phi \wedge \psi)$ (ϕ *et* ψ) et $(\phi \vee \psi)$ (ϕ *ou* ψ) sont des formules,
   - *Quantifications universelle et existentielle* : si ϕ est une formule et x est une variable alors $\forall x\phi$ (*pour tout* x, ϕ) et $\exists x\phi$ (*il existe* x, ϕ) sont des formules.
3. *Variables liées, variables libres* :
   - si ϕ est une formule et x est une variable alors les occurrences de x dans les formules $\forall x\phi$ et $\exists x\phi$ sont *liées* au quanteur (ou quantificateur) $\forall$ ou $\exists$, exceptées celles qui étaient liées auparavant dans la formule ϕ,
   - si ϕ est une formule et x est une variable alors les occurrences de x qui ne sont liées à aucun quanteur sont dites *libres*. En particulier toutes les occurrences des variables d'une formule sans quanteur sont libres.
4. Un *énoncé* (ou *formule close*) est une formule dont toutes les (occurrences de) variables sont liées.

Remarque. Une formule est un mot fini constitué de symboles de constantes, fonctions et relations de L, de symboles de variables, de connecteurs et de séparateurs (les paranthèses et la virgule).

Exemple 5.18. Les termes de L_{ord} sont les variables ; les formules atomiques de L_{ord} sont les égalités et les inégalités. Les formules suivantes sont des énoncés de L_{ord} qui décriront, une fois interprétés, les ordres totaux stricts :

1. $\forall x \neg\, x < x$,
2. $\forall x \forall y((x < y \vee y < x) \vee x = y)$,
3. $\forall x \forall y \forall z\, \neg((x < y \wedge y < z) \wedge (z = x \vee z < x))$.

Nous allons très rapidement passer au sens "naturel" que l'on donne à ces formules dans une structure. Pour être tout à fait rigoureux dans nos futures définitions et démonstrations par induction sur la construction des formules, il est nécessaire de vérifier que la lecture des formules est unique. Nous laissons la vérification de ce résultat syntaxique au lecteur :

Fait 5.1 (Lecture unique)**.**

1. *Chaque terme est, soit une variable, soit une constante, soit de la forme $f(t_1, \ldots, t_n)$ où f est une fonction d'arité n et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes. Cette écriture est* **uniquement déterminée***.*
2. *Chaque formule est :*
   - *soit atomique et de la forme $R(t_1, \ldots, t_n)$ où R est une relation d'arité n et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes,*
   - *soit de la forme $\neg\phi$ où ϕ est une formule,*
   - *soit de la forme $(\phi_1 \wedge \phi_2)$ ou de la forme $(\phi_1 \vee \phi_2)$ où ϕ_1 et ϕ_2 sont deux formules,*
   - *soit de la forme $\exists x\phi$ ou de la forme $\forall x\phi$ où ϕ est une formule et x est une variable.*

   Cette écriture est **uniquement déterminée***.*

5.4 Satisfaction des formules du 1er ordre

Pour définir l'interprétation des termes et la satisfaction des formules dans une structure, on considérera toujours un terme t avec un choix de variables $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ tel que $\bar{x}$ contienne au moins toutes les variables ayant une occurrence dans t et de même on considérera une formule ϕ avec un uple $\bar{x}$ de variables tel que toute variable ayant une occurrence libre dans ϕ se trouve dans l'uple $\bar{x}$. On utilisera alors les notations $t(\bar{x})$ et $\phi(\bar{x})$.

Exemple 5.19. Dans le langage $L = \{\in\}$ on pourra par exemple noter $\phi(x, y)$ la formule

$$(x \in y \ \wedge \ \forall z(\neg\, x \in z \ \vee \ (y = z \ \vee \ y \in z))).$$

Cette formule exprimera le fait que y est le successeur de x.

Dans le langage $L = \{f\}$ réduit à une fonction unaire, on pourra noter $\psi(x, y)$ la formule
$$(f(x) = y \ \wedge \ \forall y(y = x \ \vee f(y) \neq f(x))).$$
Cette formule exprimera le fait que x est l'unique antécédent de y par f. Notons que la variable y de $\psi(x, y)$ correspond à l'unique occurrence libre de y dans la formule (la première occurence), les occurences suivantes sont liées au quanteur $\forall$. On peut évidemment renommer la variable liée et on obtient par exemple la formule
$$(f(x) = y \ \wedge \ \forall z(z = x \ \vee f(z) \neq f(x)))$$
qui aura exactement la même interprétation que la précédente. (Pour abréger on a utilisé ici le symbole $\neq$ pour la négation de l'égalité.)

Notation. Pour toute la suite du cours les notations $\bar{x}$, $\bar{y}$, ... désigneront des uples finis de variables et les notations $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{m}$ ... désigneront des uples finis d'éléments.

Définition 5.20. Soit $\mathcal{M}$ une L-structure.

1. Soit $t(\bar{x})$ un terme et $\bar{m} = (m_1, \ldots, m_n)$ un uple d'éléments de M de même longueur que $\bar{x}$. On obtient un terme $t(\bar{m})$, à *paramètres* $\bar{m}$, en substituant m_i à toute occurrence de x_i dans t. On définit alors l'*interprétation* $t^{\mathcal{M}}(\bar{m}) \in M$ du terme $t(\bar{m})$ par l'induction suivante :
   – l'interprétation d'une constante c est $c^{\mathcal{M}}$,
   – l'interprétation d'un paramètre m est m,
   – l'interprétation de $f(t_1, \ldots, t_n)(\bar{m})$ où f est une fonction n-aire et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes est $f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{M}}(\bar{m}) = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\bar{m}), \ldots, t_n^{\mathcal{M}}(\bar{m}))$.
2. De même pour une formule $\phi(\bar{x})$, on obtient une formule $\phi(\bar{m})$, à paramètres $\bar{m}$, en substituant m_i à toute occurrence libre de x_i dans ϕ. On définit alors la *satisfaction* de $\phi(\bar{m})$ dans $\mathcal{M}$, que l'on dénote $\mathcal{M} \models \phi(\bar{m})$, par l'induction suivante :
   – $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)(\bar{m})$ ssi $(t_1^{\mathcal{M}}(\bar{m}), \ldots, t_n^{\mathcal{M}}(\bar{m})) \in R^{\mathcal{M}}$,
   – $\mathcal{M} \models \neg\phi(\bar{m})$ ssi $\mathcal{M} \not\models \phi(\bar{m})$,
   – $\mathcal{M} \models (\phi_1 \wedge \phi_2)(\bar{m})$ ssi $\mathcal{M} \models \phi_1(\bar{m})$ et $\mathcal{M} \models \phi_2(\bar{m})$,
   – $\mathcal{M} \models (\phi_1 \vee \phi_2)(\bar{m})$ ssi $\mathcal{M} \models \phi_1(\bar{m})$ ou $\mathcal{M} \models \phi_2(\bar{m})$,
   – $\mathcal{M} \models \forall x\phi\ (x, \bar{m})$ ssi pour tout $a \in M$, $\mathcal{M} \models \phi(a, \bar{m})$,
   – $\mathcal{M} \models \exists x\phi\ (x, \bar{m})$ ssi il existe $a \in M$ tel que $\mathcal{M} \models \phi(a, \bar{m})$.
3. Si $\phi(\bar{m})$ est satisfaite dans $\mathcal{M}$ ($\mathcal{M} \models \phi(\bar{m})$), on dit également que $\phi(\bar{m})$ est *vraie* dans $\mathcal{M}$, que $\mathcal{M}$ *satisfait* $\phi(\bar{m})$ ou que $\bar{m}$ *satisfait* $\phi(\bar{x})$ dans $\mathcal{M}$.
4. Soient $\phi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$ deux formules. On dit que $\phi(\bar{x})$ *implique* $\psi(\bar{x})$ si pour toute L-structure $\mathcal{M}$ et tout $\bar{m} \in M$, si $\mathcal{M} \models \phi(\bar{m})$ alors $\mathcal{M} \models \psi(\bar{m})$.
   Les formules $\phi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$ sont *équivalentes* si $\phi(\bar{x})$ implique $\psi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$ implique $\phi(\bar{x})$.

Exercice 5.21. Toute formule est équivalente à une formule ne contenant ni le connecteur booléen $\vee$, ni le quanteur $\forall$.

On vérifie facilement que dans une conjonction ou une disjonction de plusieurs formules, tout choix de parenthèses donne une formule équivalente. On supprimera donc en général les parenthèses superflues.
Par la suite, nous utiliserons les abréviations suivantes :
– $\phi \to \psi$ pour $\neg\phi \vee \psi$,
– $\phi \leftrightarrow \psi$ pour $(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$.

Exercice 5.22. Deux formules $\phi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$ sont équivalentes si et seulement toute L-structure satisfait $\forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$.

Exercice 5.23. Toute formule est équivalente à une formule *prénexe*, c'est-à-dire à une formule de la forme $Q_1x_1Q_2x_2 \dots Q_nx_n\phi$ où les Q_i sont des quanteurs et ϕ est une formule sans quanteur.

Maintenant que nous avons défini les formules, nous pouvons parler des structures vérifiant les mêmes énoncés, c'est-à-dire ayant même *théorie* (cf plus loin).

Définition 5.24. Deux L-structures $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont *élémentairement équivalentes* (noté $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$) si elles satisfont les mêmes énoncés.

Exemple 5.25.

1. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle \equiv \langle 2\mathbb{Z}, + \rangle$ car ces deux structures sont isomorphes (voir Cor 5.28).
2. $\langle \mathbb{Q}, + \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, + \rangle$. (Cf plus loin, théorie des groupes abéliens divisibles sans torsion).
3. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle \not\equiv \langle \mathbb{Q}, + \rangle$ car $\forall x \exists y\ x = y + y$ est satisfaite dans $\mathbb{Q}$ mais pas dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 5.26. Si $\mathcal{M}$ est une L-structure finie et $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$ alors $|\mathcal{N}| = |\mathcal{M}|$.

La proposition suivante montre en particulier que deux structures isomorphes sont élémentairement équivalentes.

Proposition 5.27. *Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux L-structures.*

1. *Si σ est un morphisme de $\mathcal{M}$ vers $\mathcal{N}$ alors pour toute formule atomique $\phi(x_1, ..., x_k)$ et tout $\bar{m} = (m_1, ..., m_k) \in M^k$, si $\mathcal{M} \models \phi(\bar{m})$ alors $\mathcal{N} \models \phi(\sigma(\bar{m}))$.*
2. *Si σ est un plongement de $\mathcal{M}$ vers $\mathcal{N}$ alors pour toute formule sans quanteurs $\phi(x_1, ..., x_k)$ et tout $\bar{m} = (m_1, ..., m_k) \in M^k$, $\mathcal{M} \models \phi(\bar{m})$ si et seulement si $\mathcal{N} \models \phi(\sigma(\bar{m}))$.*
3. *Si σ est un isomorphisme de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{N}$ alors pour toute formule $\phi(x_1, ..., x_k)$ et tout $\bar{m} = (m_1, ..., m_k) \in M^k$, $\mathcal{M} \models \phi(\bar{m})$ si et seulement si $\mathcal{N} \models \phi(\sigma(\bar{m}))$.*

Démonstration. La preuve se fait par induction sur les termes puis les formules. Elle est laissée au lecteur qui pourra s'inspirer de la preuve de la proposition suivante. □

Corollaire 5.28. Deux structures isomorphes sont élémentairement équivalentes.

La méthode de va-et-vient sera souvent utilisée pour montrer que deux structures sont élémentairement équivalentes :

Proposition 5.29. *Si $\mathcal{F}$ est une famille Karpienne définissant un va-et-vient infini entre deux structures $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ alors pour tout $\sigma \in \mathcal{F}$, tout $\bar{m} \in (\mathrm{Dom}(\sigma))^n$ (ici n peut-être nul) et toute formule $\phi(\bar{x})$,*

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{m}) \text{ ssi } \mathcal{N} \models \phi(\sigma(\bar{m})).$$

En particulier, $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.

Démonstration. Commençons par remarquer qu'un isomorphisme partiel préserve les formules atomiques. Soit σ un isomorphisme partiel de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$. Montrons par induction, que pour tout terme $t(\bar{x})$ et tout $\bar{m} \in (\mathrm{Dom}(\sigma))^n$, $t^{\mathcal{M}}(\bar{m}) \in \mathrm{Dom}(\sigma)$ et $\sigma(t^{\mathcal{M}}(\bar{m})) = t^{\mathcal{N}}(\sigma(\bar{m}))$. Pour les constantes et les variables, c'est évident car $\mathrm{Dom}(\sigma)$ est une sous-structure de $\mathcal{M}$ et σ est un isomorphisme de $\mathrm{Dom}(\sigma)$ sur la sous-structure $\mathrm{Im}(\sigma)$ de $\mathcal{N}$. Si $t(x)$ est le terme $f(t_1, \ldots, t_n)$ où f est une fonction n-aire et $t_1(\bar{x}), \ldots, t_n(\bar{x})$ sont des termes pour lesquels le résultat est vrai. Alors $f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\bar{m}), \ldots, t_n^{\mathcal{M}}(\bar{m})) \in \mathrm{Dom}(\sigma)$ car $\mathrm{Dom}(\sigma)$ est une sous-structure de $\mathcal{M}$. De plus

$$\sigma(t^{\mathcal{M}}(\bar{m})) = \sigma(f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\bar{m}), \ldots, t_n^{\mathcal{M}}(\bar{m}))) = f^{\mathcal{N}}(\sigma(t_1^{\mathcal{M}}(\bar{m})), \ldots, \sigma(t_n^{\mathcal{M}}(\bar{m})))$$

car σ est un isomorphisme partiel. Par hypothèse d'induction, on obtient

$$\sigma(t^{\mathcal{M}}(\bar{m})) = f^{\mathcal{N}}(t_1^{\mathcal{N}}(\sigma(\bar{m})), \ldots, t_n^{\mathcal{N}}(\sigma(\bar{m}))) = t^{\mathcal{N}}(\sigma(\bar{m})).$$

On en déduit qu'un isomorphisme partiel préserve les formules atomiques et, par combinaisons booléennes, toutes les formules sans quanteur.

Nous montrons maintenant le résultat par induction sur la construction des formules pour tous les éléments de $\mathcal{F}$. Si le résultat est vrai pour deux formules, il est évidemment vrai pour toute combinaison booléenne de ces formules. Il suffit donc de vérifier que si le résultat est vrai pour $\phi(x, \bar{y})$ il est encore vrai pour $\exists x \phi(x, \bar{y})$. Soit $\sigma \in \mathcal{F}$ et $\bar{m} \in (\mathrm{Dom}(\sigma))^n$. Si $\mathcal{M} \models \exists x \phi(x, \bar{m})$ alors il existe $a \in M$ tel que $\mathcal{M} \models \phi(a, \bar{m})$. Par VA, il existe $\tau \in \mathcal{F}$ prolongeant σ tel que $a \in \mathrm{Dom}(\tau)$. Par hypothèse d'induction, $\mathcal{N} \models \phi(\tau(a), \tau(\bar{m}))$ donc $\mathcal{N} \models \exists x \phi(x, \sigma(\bar{m}))$. Si $\mathcal{N} \models \exists x \phi(x, \sigma(\bar{m}))$, on fait de même avec le VIENT. □

Exercice 5.30. Montrer que deux ordres totaux denses sans extrémité sont élémentairement équivalents. En particulier $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, < \rangle$.

Exercice 5.31. Donner un exemple de structures $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ tel que $\mathcal{M}$ est une sous-structure de $\mathcal{N}$ mais n'est pas élémentairement équivalente à $\mathcal{N}$.

5.5 Ensembles définissables

Avec notre langage nous pourrons aussi étudier les parties définies par des formules dans une structure :

Définition 5.32. Soit $\mathcal{M}$ une L-structure. Une partie D de M^n est un *ensemble définissable* dans $\mathcal{M}$ s'il existe une formule $\phi(\bar{x},\bar{y})$ et des paramètres $\bar{b}$ dans M tels que

$$D = \{\bar{a} \in M^n : \mathcal{M} \models \phi(\bar{a},\bar{b})\}.$$

On dit alors que D est définissable avec des paramètres dans B ou est défini par une formule à paramètres dans B si $\bar{b} \subset B$. Si de plus D est défini par une formule atomique, on dit que D est un *ensemble définissable atomique.*
On note $\mathrm{Def}(\mathcal{M})$ la famille des ensembles définissables de $\mathcal{M}$.

Exemple 5.33. Dans un groupe $\langle G, 1, \cdot, ^{-1}\rangle$, le centre C de G est défini par $\phi(x) := \forall y\ xy = yx$. Soit $\psi(x,y) := (xy = yx)$. Pour tout $a \in G$, le centralisateur de a, $C(a)$, est défini par $\psi(x,a)$.

Exercice 5.34. Montrer que l'ensemble des nombres premiers est une partie définissable dans la structure $\langle \mathbb{N}, \cdot\rangle$. A-t-on besoin de paramètres ?

Exercice 5.35. Montrer que l'ordre sur $\mathbb{R}$ est définissable sans paramètre dans la structure $\langle \mathbb{R}, +, \cdot\rangle$.

Exercice 5.36. La famille $\mathrm{Def}(\mathcal{M})$ est close par

1. combinaisons booléennes finies : si $A, B \in \mathrm{Def}(\mathcal{M})$, le complémentaire de A, l'union et l'intersection de A et B sont dans $\mathrm{Def}(\mathcal{M})$,
2. produits cartésiens : si $A, B \in \mathrm{Def}(\mathcal{M})$, $A \times B \in \mathrm{Def}(\mathcal{M})$,
3. projections : si A est une partie définissable de M^{n+m} alors la projection de A sur M^n est définissable,
4. spécialisations : si A est une partie définissable de M^{n+m} et si $\bar{b} \in M^m$ alors
$$A(\bar{b}) := \{\bar{a} \in M^n : (\bar{a},\bar{b}) \in A\} \in \mathrm{Def}(\mathcal{M}),$$
5. permutations des coordonnées : si A est une partie définissable de M^n et σ une permutation de $\{1,\ldots,n\}$ alors
$$\sigma(A) := \{(a_{\sigma(1)},\ldots,a_{\sigma(n)} : (a_1,\ldots,a_n) \in A\} \in \mathrm{Def}(\mathcal{M}).$$

La famille $\mathrm{Def}(\mathcal{M})$ est en fait la plus petite famille de parties de $\cup_{n>0} M^n$, contenant les ensembles définissables atomiques et étant close par combinaisons booléennes finies, produits cartésiens et projections.

Exemple 5.37. Soit K un corps commutatif considéré dans le langage L_{ann}. La famille des ensembles atomiques de K est formée des parties définies par des équations polynômiales. Si on clôt par intersections finies, on obtient alors les *fermés de Zariski.* Alors si on clôt par combinaisons booléennes finies, on obtient les *ensembles constructibles.* Ce n'est pas en général clos par projection. Par contre c'est le cas si K est un corps algébriquement clos (Théorème de Chevalley). Ce résultat correspond, d'un point de vue modèle théorique, à l'élimination des quanteurs dans les corps algébriquement clos (cf suite du cours). Les ensembles définissables d'un corps algébriquement clos sont donc exactement les ensembles constructibles.

Proposition 5.38. *Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux L-structures. Supposons que $\mathcal{M}$ est finie. Alors $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ ssi $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.*

Démonstration. Soit n le cardinal de $\mathcal{M}$ et $(a_1, \ldots, a_n)$ une énumération de M. Remarquons qu'il y a un nombre fini de parties de M^n car M est fini. Soit $(D_i)_{i\in I}$ une énumération des parties de M^n contenant $\bar{a}$ et définissables dans $\mathcal{M}$ sans paramètre. Notons pour tout $i \in I$, une formule $\phi_i(\bar{x})$ définissant D_i. Soit $\phi(\bar{x})$ la conjonction de cet ensemble fini de formules. Alors $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$, donc $\mathcal{M} \models \exists\bar{x}\phi(\bar{x})$. Comme $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$, $\mathcal{N} \models \exists\bar{x}\phi(\bar{x})$. Soit donc $\bar{b} \in N^n$ tel que $\mathcal{N} \models \phi(\bar{b})$.
Notons σ l'application de M dans N qui à a_k associe b_k. Nous allons vérifier que σ est un isomorphisme. Remarquons tout d'abord que σ est bijective. En effet il existe un ensemble définissable D_{i_0} qui dit que les a_k sont distincts. Par conséquent les b_k sont distincts et comme N a même cardinal que M (voir exercice), $N = \{b_1, \ldots, b_k\}$.
Vérifions que σ est un plongement :

1. soit c une constante de L. Alors il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $c^{\mathcal{M}} = a_k$. Soit D_c la partie de M^n définie par la formule $x_k = c$. Il existe $i \in I$ tel que $D_c = D_i$. Donc $\mathcal{M} \models \forall\bar{x}\ (\phi_i(\bar{x}) \leftrightarrow x_k = c)$. D'où $c^{\mathcal{N}} = b_k$.
2. soit f une fonction r-aire et $\bar{m} = (m_1, \ldots, m_r) \in M^r$. Soit $m_0 := f^{\mathcal{M}}(\bar{m})$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, soit $k_j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $m_j = a_{k_j}$. On considère alors $D_{f,\bar{m}}$ la partie de M^n définie par la formule $f(x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}) = x_{k_0}$. On en déduit que $\sigma(m_0) = f^{\mathcal{N}}(\sigma(\bar{m}))$.
3. soient R une relation r-aire et $\bar{m} = (m_1, \ldots, m_r) \in M^r$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, soit $k_j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $m_j = a_{k_j}$. On considère alors la partie $D_{R,\bar{m}}$ de M^n définie par $R(x_{k_1}, \ldots, x_{k_r})$ si $\mathcal{M} \models R^{\mathcal{M}}(\bar{m})$, la partie $D_{\neg R,\bar{m}}$ de M^n définie par $\neg R(x_{k_1}, \ldots, x_{k_r})$ sinon. On en déduit que $\mathcal{M} \models R^{\mathcal{M}}(\bar{m})$ ssi $\mathcal{N} \models R^{\mathcal{N}}(\sigma(\bar{m}))$.

□

5.6 Théories et leurs modèles

Définition 5.39. Soit Σ un ensemble d'énoncés.

1. Une L-structure $\mathcal{M}$ est un *modèle* de Σ (noté $\mathcal{M} \models \Sigma$) si tout énoncé de Σ est satisfait par $\mathcal{M}$.

2. On dit que Σ est *consistant* si Σ a un modèle.
3. Un énoncé ϕ est une *conséquence* de Σ (noté $\Sigma \vdash \phi$) si tout modèle de Σ satisfait ϕ.
4. Une *théorie* T est un ensemble consistant d'énoncés contenant toutes ses conséquences. Si T correspond à l'ensemble des conséquences de Σ, on dit que Σ est un *ensemble d'axiomes* pour T ou une *axiomatisation* de T.
5. Une théorie T est *complète* si elle est maximale pour l'inclusion, ce qui signifie que pour toute formule ϕ, $\phi \in T$ ou $\neg\phi \in T$.
6. En général si une théorie T est axiomatisée par Σ, on confond T et Σ. En particulier on dira que Σ est complet si pour tout énoncé ϕ, $\Sigma \vdash \phi$ ou $\Sigma \vdash \neg\phi$.
7. Si $\mathcal{M}$ est une L-structure, on note $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ la théorie constituée de l'ensemble des énoncés vrais dans $\mathcal{M}$. Cette théorie est évidemment complète.

Remarque 5.40.

1. Deux théories complètes qui ont un modèle commun sont égales.
2. Deux modèles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont élémentairement équivalents ssi $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$ ssi $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont modèles d'une même théorie complète.
3. Une théorie est complète si ses modèles sont tous élémentairement équivalents.

Exercice 5.41. Soit T une théorie complète.

1. Si T a un modèle fini $\mathcal{M}$, alors tous ses modèles sont isomorphes à $\mathcal{M}$.
2. Si T a un modèle infini, alors tous ses modèles sont infinis. (Nous verrons plus loin que, contrairement au cas fini, une structure infinie ne peut être l'unique modèle de sa théorie.)

Exemple 5.42.

1. Théorie des ensembles infinis dans le langage réduit à l'égalité :
   – $\exists x_1 x_2 ... x_n \ \wedge_{i \neq j} (x_i \neq x_j)$, pour tout $n > 0$.
2. Théorie des ordres totaux :
   – $\forall x \neg\, x < x$,
   – $\forall x \forall y ((x < y \vee y < x) \vee x = y)$,
   – $\forall x \forall y \forall z\ (x < y \wedge y < z) \rightarrow (x < z)$.
   Cette théorie n'est pas complète. Par exemple $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ et $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ sont des modèles de cette théorie qui ne sont pas élémentairement équivalents. Le premier satisfait l'énoncé $\exists x \forall y \neg(y < x)$ alors que le second non.
3. Théorie des ordres totaux denses sans extrémité :
   – théorie des ordres totaux,
   – $\forall x \forall y\ (x < y) \rightarrow (\exists z (x < z < y))$,
   – $\forall x \exists y \exists z\ (y < x < z)$.
   Cette théorie est complète. (Voir exo 5.30.)

4. La théorie des corps commutatifs n'est pas complète, elle a des modèles finis et infinis. La théorie des corps commutatifs de caractéristique 0 n'est pas non plus complète. La formule $\exists x(x^2 = -1)$ est vraie dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.
5. Théorie des corps algébriquement clos de caractéristique p fixé :
   – théorie des corps commutatifs,
   – $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{p} = 0$ si $p > 0$; $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n} \neq 0$, pour tout $n > 0$, si $p = 0$.
   – $\forall y_0 \ldots \forall y_n (y_n \neq 0 \rightarrow \exists x \sum_{i=0}^{n} y_n x^i = 0)$, pour tout $n > 0$.
   Cette théorie est complète. (Voir exo 6.16 ou exemple 6.19.)
6. Théorie des groupes abéliens divisibles sans torsion non triviaux dans $L = \{0, +, -\}$:
   – théorie des groupes abéliens,
   – $\exists x \neq 0$,
   – $\forall x \exists y \; ny = x$, pour tout $n > 0$,
   – $\forall x(x = 0 \vee nx \neq 0)$, pour tout $n > 0$.
   Cette théorie est complète. (Voir exemple 6.19)

Exercice 5.43. Soit L le langage réduit à une relation binaire E (et l'égalité).

1. Donner une axiomatisation (dans ce langage) de la théorie de la relation d'équivalence à deux classes infinies.
2. Donner une axiomatisation de la théorie de la relation d'équivalence à une infinité de classes toutes infinies.
3. Montrer que ces deux théories sont complètes.

5.7 Extensions élémentaires

Définition 5.44.

1. Un plongement σ de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ est *élémentaire* si pour toute formule $\phi(\bar{x})$ et tout $\bar{m} \in M^n$,
$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{m}) \text{ ssi } \mathcal{N} \models \phi(\sigma(\bar{m})).$$
2. $\mathcal{M}$ est une *sous-structure élémentaire de* $\mathcal{N}$ (notée $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$) si $\mathcal{M}$ est une sous-structure de $\mathcal{N}$ telle que pour toute formule $\phi(\bar{x})$ et tout $\bar{m} \in M^n$,
$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{m}) \text{ ssi } \mathcal{N} \models \phi(\bar{m}).$$
3. Un isomorphisme partiel σ de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ est *élémentaire* si pour toute formule $\phi(x_1, ..., x_n)$ et tout $\bar{m} \in \mathrm{dom}(\sigma)^n$.
$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{m}) \text{ ssi } \mathcal{N} \models \phi(\sigma(\bar{m})).$$

Notation. Pour $\mathcal{M}$ une L-structure et A un ensemble de paramètres dans M, on peut considérer l'*expansion* $\mathcal{M}_A$ de $\mathcal{M}$ par des constantes dans A, c'est-à-dire la L_A-structure $\langle M, L, a : a \in A \rangle$ où $L_A = L \cup \{a : a \in A\}$. On note $\mathrm{Th}(\mathcal{M}, A)$ la théorie de $\mathcal{M}_A$ qui correspond donc à l'ensemble des énoncés à paramètres dans A qui sont vrais dans $\mathcal{M}$.

Exercice 5.45. Soit $\mathcal{M}$ une sous-structure de $\mathcal{N}$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$,
2. $\mathrm{Th}(\mathcal{M}, M) = \mathrm{Th}(\mathcal{N}, M)$,
3. l'inclusion $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$ est un plongement élémentaire.

On appelle $\mathrm{Th}(\mathcal{M}, M)$ le *diagramme élémentaire* de $\mathcal{M}$.

Remarque 5.46.
– Un isomorphisme est élémentaire (Rem 5.14 et prop 5.29).
– Si $\mathcal{M}$ est une sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$ alors $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. (De même, si $\mathcal{M}$ se plonge élémentairement dans $\mathcal{N}$, alors $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.)
– La réciproque est fausse : une sous-structure élémentairement équivalente n'est pas nécessairement élémentaire. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle \equiv \langle 2\mathbb{Z}, + \rangle$ mais $\langle 2\mathbb{Z}, + \rangle \not\prec \langle \mathbb{Z}, + \rangle$.

Exercice 5.47. Soient $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_3$.
– Si $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_2 \prec \mathcal{M}_3$ alors $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_3$.
– Si $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_3$ et $\mathcal{M}_2 \prec \mathcal{M}_3$ alors $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2$.
– Trouver un exemple tel que $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_3$ mais $\mathcal{M}_2 \not\prec \mathcal{M}_3$. (Cette question est difficile à traiter en utilisant uniquement les notions vu précédemment. Elle pourra être regardée ensuite.)

Exercice 5.48. Soit I un ensemble totalement ordonné et $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ une chaîne élémentaire de L-structures ($\mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}_j$, pour tout $i < j$). Alors pour tout $i \in I$, $\mathcal{M}_i \prec \cup_{i \in I} \mathcal{M}_i$.

Voici un critère utile pour vérifier qu'une sous-structure est élémentaire. Ce critère n'utilise que la satisfaction dans la grande structure :

Proposition 5.49 (Test de Tarski)**.** *Soit $\mathcal{M}$ une sous-structure de $\mathcal{N}$. Alors $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ si et seulement si pour toute formule $\phi(x, \bar{y})$ et tout $\bar{m} \in M^n$, si $\mathcal{N} \models \exists x \phi(x, \bar{m})$ alors il existe $m_0 \in M$ tel que $\mathcal{N} \models \phi(m_0, \bar{m})$.*

Démonstration. Si $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ et $\mathcal{N} \models \exists x \phi(x, \bar{m})$. Alors $\mathcal{M} \models \exists x \phi(x, \bar{m})$. Donc il existe $m_0 \in M$ tel que $\mathcal{M} \models \phi(m_0, \bar{m})$. Alors $\mathcal{N} \models \phi(m_0, \bar{m})$.
Réciproquement si $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ satisfont le critère de Tarski. On montre par induction sur les formules que pour toute formule $\phi(\bar{x})$ et tout $\bar{m} \in M^n$, $\mathcal{M} \models \phi(\bar{m})$ ssi $\mathcal{N} \models \phi(\bar{m})$. Le résultat est évidemment vérifié pour les formules atomiques car $\mathcal{M}$ est une sous-structure de $\mathcal{N}$. Si le résultat est vrai pour ϕ_1 et ϕ_2, il est facile de voir qu'il est encore vrai pour les combinaisons booléennes de ϕ_1 et ϕ_2. Il suffit donc de montrer que si le résultat est vrai pour $\phi(x, \bar{y})$ il est encore vrai pour $\exists x \phi(x, \bar{y})$. Soit $\bar{m} \in M^n$. Si $\mathcal{M} \models \exists x \phi(x, \bar{m})$ alors il existe $m_0 \in M$ tel que $\mathcal{M} \models \phi(m_0, \bar{m})$. Par hypothèse de récurrence, alors $\mathcal{N} \models \phi(m_0, \bar{m})$ et donc $\mathcal{N} \models \exists x \phi(x, \bar{m})$. Si $\mathcal{N} \models \exists x \phi(x, \bar{m})$. Alors par le critère de Tarski, il existe $m_0 \in M$ tel que $\mathcal{N} \models \phi(m_0, \bar{m})$. Par hypothèse de récurrence, $\mathcal{M} \models \phi(m_0, \bar{m})$ et donc $\mathcal{M} \models \exists x \phi(x, \bar{m})$. □

Corollaire 5.50 (Théorème de Löwenheim-Skolem Descendant)**.** Soient $\mathcal{N}$ une L-structure infinie, A un ensemble de paramètres dans N, et κ un cardinal infini tel que $\max(|A|, |L|) \leq \kappa \leq |\mathcal{N}|$. Alors il y a une sous-structure élémentaire $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ contenant A et de cardinal κ.

Démonstration. On peut supposer que $|A| = \kappa$. On construit par récurrence une chaîne $(\mathcal{M}_i)_{i\in\omega}$ de sous-structures de $\mathcal{N}$ telle que $\mathcal{M}_0$ contient A, telle que pour tout $i \in \omega$, $|\mathcal{M}_i| = \kappa$ et telle que pour toute formule $\phi(x, \bar{y})$ et $\bar{m}_i \in M_i^n$, si $\mathcal{N} \models \exists x\phi(x, \bar{m}_i)$ alors il existe $m_{i+1} \in M_{i+1}$ tel que $\mathcal{N} \models \phi(m_{i+1}, \bar{m}_i)$.
Soit $\mathcal{M}_0$ la sous-structure de $\mathcal{N}$ engendrée par A. Cette sous-structure est de cardinal κ car $|L| \leq \kappa = |A|$. Si $\mathcal{M}_i$ est construit, alors pour toute formule $\phi(x, \bar{y})$ (il y en a $\max(|L|, \aleph_0)$) et tout paramètre $\bar{m} \in M_i^n$ tel que $\mathcal{N} \models \exists x\phi(x, \bar{m})$ (il y en a au plus κ), on choisit $n_{\phi,\bar{m}} \in N$ tel que $\mathcal{N} \models \phi(n_{\phi,\bar{m}}, \bar{m})$. On définit alors $\mathcal{M}_{i+1}$ comme la sous-structure engendrée par M_i et les $n_{\phi,\bar{m}}$. Cette sous-structure est évidemment de cardinal κ et vérifie l'hypothèse de récurrence.
Soit $\mathcal{M} := \cup_{i\in\omega}\mathcal{M}_i$. Alors $\mathcal{M}$ est une sous-structure de $\mathcal{N}$ de cardinal κ qui de plus vérifie le test de Tarski. C'est donc une sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$. $\square$

Revenons aux ensembles définissables pour terminer ce chapitre :

Définition 5.51. Si $\mathcal{M}$ est une sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$ et $D \subset M^n$ est un ensemble définissable dans $\mathcal{M}$, alors D a une extension canonique en un ensemble $D' \subset N^n$ définissable dans $\mathcal{N}$, tel que $D' \cap M^n = D$: si D est défini par une formule $\phi(\bar{x}, \bar{b})$ ($\bar{b} \subset M$) alors $D' := \{\bar{a} \in N^n : \mathcal{N} \models \phi(\bar{a}, \bar{b})\}$. En pratique on confondra D' avec D.

Exercice 5.52. Vérifier que D' ne dépend pas du choix de ϕ pour D.

Exercice 5.53. Soit $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Montrer que $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ si et seulement si pour toute partie non vide définissable $D \subset N$ à paramètres dans M, $D \cap M \neq \emptyset$.

Chapitre 6

Compacité, Théorème de Löwenheim-Skolem

Ce chapitre est consacré à un théorème fondamental en théorie des modèles, le théorème de compacité et à ses premières conséquences. Commençons par donner des énoncés équivalents de ce théorème.

6.1 Enoncés du théorème de compacité

Théorème 6.1 (Compacité)**.** *Soit Σ un ensemble d'énoncés tel que tout sous-ensemble fini de Σ a un modèle. Alors Σ a un modèle.*

Exercice 6.2. Montrer que le théorème de compacité est équivalent à l'énoncé suivant : soient Σ un ensemble d'énoncés et ϕ une conséquence de Σ ($\Sigma \vdash \phi$) alors ϕ est conséquence d'une partie finie de Σ.

Exercice 6.3. A l'aide du théorème de compacité vérifier les assertions suivantes :

1. Une théorie qui, pour tout entier n, a un modèle de cardinalité plus grand que n, a un modèle infini.
2. Il n'existe pas de théorie dans la langage L_{ord} dont les modèles sont précisément les ordres finis.
3. Il n'existe pas de théorie dans la langage L_{ann} dont les modèles sont précisément les corps finis.

Le théorème de compacité s'exprime topologiquement de la façon suivante : nous munissons l'ensemble $\mathcal{T}$ des théories complètes dans le langage L d'une topologie. A tout énoncé ϕ, on associe l'ensemble $\langle\phi\rangle$ des théories complètes contenant ϕ. Alors les $\langle\phi\rangle$ forment une base d'ouverts pour une topologie, car si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux énoncés, $\langle\phi_1\rangle \cap \langle\phi_2\rangle = \langle\phi_1 \wedge \phi_2\rangle$. Muni de cette topologie, $\mathcal{T}$ est un espace séparé : si T_1 et T_2 sont deux théories complètes distinctes alors il existe un énoncé $\phi \in T_1$ tel que $\phi \notin T_2$. Donc $\langle\phi\rangle$ et $\langle\neg\phi\rangle$ sont des voisinages disjoints respectivement de T_1 et T_2. Cet espace

$\mathcal{T}$ est de plus totalement discontinu, c'est-à-dire il admet une base d'ouverts qui sont fermés : le complémentaire de $\langle \phi \rangle$ est $\langle \neg\phi \rangle$. Par conséquent, toute partie connexe de $\mathcal{T}$ est soit vide, soit réduite à un point.

Théorème 6.4 (Compacité)**.** *L'espace $\mathcal{T}$ des théories complètes dans le langage L est compact.*

Exercice 6.5. Les deux énoncés ci-dessus du théorème de compacité sont équivalents.

Exercice 6.6. Les ouverts-fermés de $\mathcal{T}$ sont les parties de la forme $\langle \phi \rangle$ pour ϕ un énoncé de $\mathcal{T}$.

Regardons maintenant un corollaire du théorème de compacité en termes d'ensembles définissables.

Corollaire 6.7 (Compacité)**.** Soit $\mathcal{M}$ une L-structure et $(\phi_i(\bar{x}, \bar{m}_i))_{i \in I}$. Si pour toute partie finie I_0 de I, il existe $\bar{a} \in M^n$ tel que pour tout $i \in I_0$, $\mathcal{M} \models \phi_i(\bar{a}, \bar{m}_i)$ alors il existe une extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ et $\bar{a} \in N^n$ tel que pour tout $i \in I$, $\mathcal{N} \models \phi_i(\bar{a}, \bar{m}_i)$.
En d'autres termes, si $(D_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de M^n définissables dans $\mathcal{M}$ tel que toute intersection finie de parties de cette famille est non vide dans la structure $\mathcal{M}$ alors cette famille a une intersection non vide dans une extension élémentaire de $\mathcal{M}$.

Démonstration. Soit $\bar{c}$ un n-uple de nouvelle constante. Considérons l'ensemble d'énoncés

$$\Sigma := \mathrm{Th}(\mathcal{M}, M) \cup \{\phi_i(\bar{c}, \bar{m}_i) : i \in I\}$$

dans le langage $L \cup \{m : m \in M\} \cup \{\bar{c}\}$. Alors par hypothèse, pour toute partie finie de Σ, il existe $\bar{a} \in M^n$ telle $\langle M, L, m, \bar{a} : m \in M \rangle$ soit modèle de cette partie finie. Donc par le théorème de compacité Σ est consistant. Soit $\mathcal{N}$ un modèle de Σ alors l'interprétation des constantes $\{m : m \in M\}$ forme une sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}'$, la structure sur N réduite au langage L. Cette sous-structure est isomorphe à $\mathcal{M}$ car $\mathcal{N} \models \mathrm{Th}(\mathcal{M}, M)$. Par un isomorphisme, on peut donc supposer que $\mathcal{M}$ est une sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}'$ et l'interprétation $\bar{a} \in N^n$ de $\bar{c}$ dans $\mathcal{N}$ implique que pour tout $i \in I$, $\mathcal{N}' \models \phi_i(\bar{a}, \bar{m}_i)$. □

Exemple 6.8.

1. **Les entiers non-standards** : il existe une extension élémentaire de la structure $\langle \mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot \rangle$ contenant un entier (non-standard) non nul qui est divisible par tous les entiers standards non nuls (les entiers de $\mathbb{N}^*$).
2. **Les réels non-standards** : il existe une extension élémentaire $\mathbb{R}'$ de la structure $\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, < \rangle$ contenant un réel c (non-standard) strictement positif qui est **infiniment petit**, c'est-à-dire tel que pour tout réel r standard strictement positif ($r \in \mathbb{R}$, $r > 0$), $0 < c < r$. On a alors pour tout $r' \in \mathbb{R}'$ **borné** (tel qu'il existe $r_0 \in \mathbb{R}$ avec $-r_0 < r' < r_0$), il existe un unique réel standard $r \in \mathbb{R}$ **infiniment proche** de r'. On appelle r la **partie standard** de r'.

6.2 Ultraproduits - Une démonstration du théorème de compacité

Nous présentons ici une démonstration (sémantique) du théorème de compacité qui consiste à construire un modèle de Σ à partir d'une famille de modèles des parties finies de Σ. Pour cela on utilise la notion d'*ultraproduits* de structures qui sont des produits directs de structures quotientés par des ultrafiltres.
Rappelons la définition de filtres et ultrafiltres ainsi que quelques propriétés de ceux-ci vues au chapitre 4 : Soit I un ensemble infini. Un ensemble non vide $\mathcal{F}$ de parties de I est un filtre sur I si :
– $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
– si $X, Y \in \mathcal{F}$ alors $X \cap Y \in \mathcal{F}$,
– si $X \in \mathcal{F}$ et $X \subset Y$ alors $Y \in \mathcal{F}$.
Un ultrafiltre $\mathcal{U}$ est un filtre maximal pour l'inclusion, ce qui est équivalent à pour toute partie A de $\mathcal{U}$, A ou $I - A$ est dans $\mathcal{U}$.
Si $\mathcal{U}$ est ultrafiltre sur I alors
– soit $\mathcal{U}$ est un filtre principal $\mathcal{F}_a = \{A : a \in A\}$ pour un élément a de I ;
– soit $\mathcal{U}$ contient le filtre de Fréchet, c'est-à-dire l'ensemble des parties co-finies de I.
Enfin, à l'aide de l'axiome du choix, on vérifie que tout filtre est contenu dans un ultrafiltre (c'est en particulier le cas pour le filtre de Fréchet).
Définissons maintenant ce qu'on entend par ultraproduits :

Définition 6.9. Soit $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ une famille de L-structures et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I. L'*ultraproduit* $\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/\mathcal{U}$ est la structure $\mathcal{M}$ suivante :

1. le domaine de $\mathcal{M}$ est le produit des M_i modulo la relation d'équivalence suivante :

$$(a_i)_{i\in I} \sim (b_i)_{i\in I} \text{ si et seulement si } \{i \in I : a_i = b_i\} \in \mathcal{U}.$$

   Cette relation est de manière évidente réflexive et symétrique. La transitivité découle du fait que $\mathcal{U}$ est un filtre : on a $\{i \in I : a_i = c_i\} \supset \{i \in I : a_i = b_i\} \cap \{i \in I : b_i = c_i\}$. On notera $[a_i]_{i\in I}$ la classe modulo $\mathcal{U}$ de l'uple $(a_i)_{i\in I}$.
2. pour toute constante $c \in L$, on pose $c^{\mathcal{M}} := [c^{\mathcal{M}_i}]_{i\in I}$.
3. pour toute fonction n-aire f de L, on pose

$$f^{\mathcal{M}} : ([a_i^1]_{i\in I}, \ldots, [a_i^n]_{i\in I}) \mapsto [f^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \ldots, a_i^n)]_{i\in I}.$$

4. pour toute relation n-aire R de L, on pose

$$R^{\mathcal{M}} := \{([a_i^1]_{i\in I}, \ldots, [a_i^n]_{i\in I}) \in M^n : \{i \in I : (a_i^1, \ldots, a_i^n) \in R^{\mathcal{M}_i}\} \in \mathcal{U}\}.$$

Exercice 6.10. Vérifier que les fonctions et relations sont bien définies, c'est-à-dire qu'elle ne dépendent pas du choix des représentants. Noter de plus que la définition de $=^{\mathcal{M}}$ correspond à la vrai égalité sur M.

Exercice 6.11. Que peut-on dire de l'ultraproduit si l'ultrafiltre est principal ?

Théorème 6.12 (Critère de Łos)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I et $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ une famille de L-structures. Si $\bar{m} = ([m_i^1]_{i\in I}, ..., [m_i^n]_{i\in I})$ est un n-uple dans l'ultraproduit $\mathcal{M} := \prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/U$ et $\phi(\bar{x})$ est une formule, alors*

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{m}) \text{ si et seulement si } \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \phi(m_i^1, ..., m_i^n)\} \in \mathcal{U}.$$

En particulier si θ est un énoncé alors $\mathcal{M}$ est modèle de cet énoncé si et seulement si il existe $X \in \mathcal{U}$ tel que pour tout $i \in X$, $\mathcal{M}_i$ est un modèle de θ.

Démonstration. On commence par vérifier par induction sur la construction des termes que si $t(\bar{x})$ est un terme alors

$$t^{\mathcal{M}}(\bar{m}) = [t^{\mathcal{M}_i}(m_i^1, ..., m_i^n)]_{i\in I}.$$

Par définition de l'ultraproduit, c'est évident si $t(\bar{x})$ est une constante ou une variable. Soient $t_1(\bar{x}), ..., t_k(\bar{x})$ des termes pour lesquels la propriété est vérifiée et $f \in L$ une fonction k-aire. Par hypothèse de récurrence, pour tout $j \in \{1, ..., k\}$,

$$t_j^{\mathcal{M}}(\bar{m}) = [t_j^{\mathcal{M}_i}(m_i^1, ..., m_i^n)]_{i\in I},$$

et par définition de l'ultraproduit,

$$\begin{aligned} (f(t_1, ..., t_n))^{\mathcal{M}}(\bar{m}) &= f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\bar{m}), ..., t_n^{\mathcal{M}}(\bar{m})) \\ &= [f^{\mathcal{M}_i}(t_1^{\mathcal{M}_i}(m_i^1, ..., m_i^n), ..., t_n^{\mathcal{M}_i}(m_i^1, ..., m_i^n))]_{i\in I} \\ &= [f(t_1, ..., t_n)^{\mathcal{M}_i}(m_i^1, ..., m_i^n))]_{i\in I}. \end{aligned}$$

On vérifie maintenant le critère de Łos par induction sur la construction des formules. Par définition de l'ultraproduit et par ce qui précède le critère est évident pour les formules atomiques.
Supposons le critère vérifié pour deux formules $\phi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$. Alors $\mathcal{M} \models (\phi \wedge \psi)(\bar{m})$ ssi $X := \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \phi(m_i^1, ..., m_i^n)\} \in \mathcal{U}$ et $Y := \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \psi(m_i^1, ..., m_i^n)\} \in \mathcal{U}$. Comme $\mathcal{U}$ est un filtre, $X \in \mathcal{U}$ et $Y \in \mathcal{U}$ est équivalent à $X \cap Y \in \mathcal{U}$. Or $X \cap Y = \{i \in I : \mathcal{M}_i \models (\phi \wedge \psi)(m_i^1, ..., m_i^n)\} \in \mathcal{U}$, donc le critère est alors vérifié pour $(\phi \wedge \psi)$.
On a aussi $\mathcal{M} \models \neg\phi(\bar{m})$ ssi $X \notin \mathcal{U}$. Comme $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre $X \notin \mathcal{U}$ ssi $I \setminus X \in \mathcal{U}$. Or $I \setminus X = \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \neg\phi(m_i^1, ..., m_i^n)\}$, donc le critère est également vérifié pour $\neg\phi$.
Supposons maintenant le critère vérifié pour une formule $\phi(y, \bar{x})$. Soit $X := \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \exists y\phi(y, m_i^1, ..., m_i^n)\}$. Si $\mathcal{M} \models \exists y\phi(y, \bar{m})$ alors il existe $[\bar{m}_i^0]_{i\in I} \in \mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models \phi([\bar{m}_i^0]_{i\in I}, [\bar{m}_i^1]_{i\in I}, ..., [\bar{m}_i^n]_{i\in I})$. Par hypothèse, $Y := \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \phi(m_i^0, m_i^1, ..., m_i^n)\} \in \mathcal{U}$. Donc $X \in \mathcal{U}$ car $X \supset Y \in \mathcal{U}$. Réciproquement, si $X \in \mathcal{U}$, choisissons pour tout $i \in I$, $m_i^0 \in \mathcal{M}_i$ tel que si $\mathcal{M}_i \models \exists y\phi(y, m_i^1, ..., m_i^n)$ alors $\mathcal{M}_i \models \phi(m_i^0, m_i^1, ..., m_i^n)$. Alors $\{i \in I : \mathcal{M}_i \models \phi(m_i^0, m_i^1, ..., m_i^n)\} = X$ et donc, par hypothèse, $\mathcal{M} \models \phi([\bar{m}_i^0]_{i\in I}, [\bar{m}_i^1]_{i\in I}, ..., [\bar{m}_i^n]_{i\in I})$. Le critère est donc alors vérifier pour la formule $\exists y\phi$. $\square$

Démonstration du **théorème de compacité**. Considérons Σ un ensemble d'énoncé finiment consistant et pour toute partie finie i de Σ, soit $\mathcal{M}_i$ un modèle de i. Nous allons montrer en utilisant le critère de Łos qu'un ultraproduit des $\mathcal{M}_i$ est modèle de Σ. Soit I l'ensemble des parties finies de Σ, et pour tout $i \in I$, soit $I_i := \{j \in I : j \supset i\}$. Alors $\mathcal{F} := \{X \subset I : X \supset I_i \text{ pour un } i \in I\}$ est un filtre sur I. En effet : $I_{\{\emptyset\}} = I \in \mathcal{F}$; $\emptyset \notin \mathcal{F}$; si $X \supset I_i$ et $Y \supset I_j$ alors $X \cap Y \supset I_{i \cup j}$; si $X \supset I_i$ et $X \subset Y$ alors $Y \supset I_i$. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre contenant $\mathcal{F}$ et $\mathcal{M}$ l'ultraproduit $\prod_{i \in I} \mathcal{M}_i / \mathcal{U}$. Alors $\mathcal{M}$ est un modèle de Σ : en effet pour $\theta \in \Sigma$, $\mathcal{M}_i \models \theta$ pour tout $i \in I_{\{\theta\}}$, donc par le critère de Łos $\mathcal{M} \models \theta$. □

6.3 Théorème de l'extension élémentaire commune

Lemme 6.13. *Si $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont deux L-structures élémentairement équivalentes, elles ont une extension élémentaire "commune" : il existe une L-structure $\mathcal{N}$ telle que $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ se plongent élémentairement dans $\mathcal{N}$.*

Démonstration. On peut supposer que $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Considérons l'ensemble d'énoncés $\Sigma := \mathrm{Th}(\mathcal{M}_1, M_1) \cup \mathrm{Th}(\mathcal{M}_2, M_2)$ dans le langage $L \cup \{m_1 : m_1 \in M_1\} \cup \{m_2 : m_2 \in M_2\}$. Remarquons que les modèles de Σ correspondent aux extensions élémentaires communes à $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$. Nous allons donc montrer que Σ est consistant. Par compacité, il est suffisant de montrer que tout fragment fini de Σ est consistant. Un fragment fini de Σ est équivalent à la conjonction d'un énoncé $\theta_1(\bar{m}_1)$ de $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_1, M_1)$ et d'un énoncé $\theta_2(\bar{m}_2)$ de $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_2, M_2)$. Alors $\mathcal{M}_1 \models \exists \bar{x} \theta_2(\bar{x})$ car $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont élémentairement équivalente et $\mathcal{M}_2 \models \theta_2(\bar{m}_2)$. Soit $\bar{m}_2' \in M_1$, tel que $\mathcal{M}_1 \models \theta_2(\bar{m}_2')$. Alors en interprétant $\bar{m}_2$ par $\bar{m}_2'$ dans M_1, on fait de $\langle \mathcal{M}_1, L, \bar{m}_1, \bar{m}_2' \rangle$ un modèle de $\theta_1(\bar{m}_1) \wedge \theta_2(\bar{m}_2)$. □

Théorème 6.14. *Si $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ est une famille de L-structures élémentairement équivalentes, ces structures ont une extension élémentaire "commune".*

Démonstration. Considérons ici l'ensemble d'énoncés $\Sigma := \cup_{i \in I} \mathrm{Th}(\mathcal{M}_i, M_i)$. En itérant le lemme précédent, pour toute partie finie I_0 de I, $\cup_{i \in I_0} \mathrm{Th}(\mathcal{M}_i, M_i)$ est consistant. On déduit par compacité que Σ est consistant. □

6.4 Théorème de Löwenheim-Skolem - Théories κ-catégoriques

Lemme 6.15 (Löwenheim-Skolem ascendant)**.** *Si $\mathcal{M}$ est une L-structure infinie alors pour tout cardinal $\kappa \geq \max\{|L|, |M|\}$, il existe une extension élémentaire $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ de cardinal κ.*

Démonstration. Montrons d'abord qu'il existe une extension élémentaire $\mathcal{N}_0$ de $\mathcal{M}$ de cardinal supérieur ou égal à κ. Pour cela considérons $(c_i)_{i \in \kappa}$ des nouveaux symboles de constantes et l'ensemble d'énoncés

$$\Sigma := \mathrm{Th}(\mathcal{M}, M) \cup \{c_i \neq c_j : i \neq j\}.$$

Chaque fragment fini de Σ ne mentionne qu'un nombre fini de constantes, qui peuvent être interprétés par des éléments distincts de $\mathcal{M}$ car $\mathcal{M}$ est infini. Donc Σ est finiment consistant et donc consistant par compacité. Un modèle $\mathcal{N}_0$ de Σ est alors une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ de cardinal supérieur ou égal à κ. Par Löwenheim-Skolem descendant, il existe une sous-structure élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{N}_0$ contenant M et de cardinal κ, qui est alors une extension élémentaire de $\mathcal{M}$. □

Proposition 6.16. *1. La théorie des corps algébriquement clos de caractéristique p fixé ($p \geq 0$) est complète.*

2. Soit ϕ un énoncé dans le langage des anneaux. Alors ϕ est vrai dans tout corps algébriquement clos de caractéristique nulle si et seulement si ϕ est vrai dans tout corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, pour tout p premier sauf un nombre fini.

Démonstration. 1. Soient k_1 et k_2 deux corps algébriquement clos de même caractéristique. Considérons K_1 et K_2 des extensions élémentaires non dénombrables respectivement de k_1 et k_2 ; Alors K_1 et K_2 sont deux corps algébriquement clos de même caractéristique et de degré de transcendance infini. Par 5.10, ils sont ∞-équivalents et donc élémentairement équivalents. Par conséquent k_1 et k_2 sont élémentairement équivalents.

2. Soit ϕ un énoncé et CAC_0 la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique 0. Considérons $\Sigma = \mathrm{CAC}_0 \cup \{\phi\}$. Si ϕ est vrai dans tout corps algébriquement clos de caractéristique assez grande alors chaque partie finie de Σ a un modèle, car elle ne peut contenir qu'un nombre fini d'axiomes du type $1 + ... + 1 \neq 0$. Par compacité, Σ a un modèle qui est donc un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et donc ϕ est vraie dans tous les corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

   Réciproquement, si ϕ est conséquence de CAC_0 alors par compacité, il est conséquence d'une partie finie de CAC_0 et on conclut facilement.

□

Convention. Le cardinal d'une théorie T dans un langage L, notée $|T|$ est par convention le cardinal de l'ensemble des formules du langage L, c'est-à-dire $|T| := \max\{\omega, |L|\}$. En particulier on dit que T est dénombrable si $|L| \leq \omega$.

Théorème 6.17 (Théorème de Löwenheim-Skolem). *Si T est une théorie qui a un modèle infini alors pour tout cardinal $\kappa \geq |T|$, T a un modèle de cardinal κ.*

Démonstration. Par Löwenheim-Skolem ascendant et descendant, il existe une structure N de cardinal κ élémentairement équivalente à M. □

Définition. Une théorie T est *κ-catégorique* si T a un unique modèle à isomorphisme près de cardinal κ.

Proposition 6.18. *Une théorie T qui n'a que des modèles infinis et qui est κ-catégorique pour un cardinal $\kappa \geq |T|$ est complète.*

Démonstration. Soit M le modèle de T de cardinal κ. Toujours par Löwenheim-Skolem ascendant et descendant, tout modèle de T est élémentairement équivalent à une structure de cardinal κ, donc à M. □

Exemple 6.19. – La théorie des ensembles infinis est **totalement catégorique** (c.à.d. κ-catégorique pour tout cardinal infini).

– La théorie des ordres totaux denses sans extrémité est ω-catégorique (voir exo 5.30). Par contre cette théorie n'est pas κ-catégorique pour tout cardinal $\kappa > \omega$. Considérons par exemple un ordre I total dense sans extrémité de cardinal κ tel que pour chaque point de cet ordre, il y a κ points plus grand. Prolongeons cet ordre par l'ensemble des rationnels. Alors les ordres I et $I \frown \mathbb{Q}$ ne sont évidemment pas isomorphes.
– Soit $p \geq 0$. La théorie des corps algébriquement clos de caractéristique p est catégorique en tout cardinal infini non-dénombrable. En effet si K_1 et K_2 sont deux corps algébriquement clos de caractéristique p et de cardinal $\kappa > \omega$, ils sont tous deux de degré de transcendance κ et donc isomorphes. Par contre cette théorie n'est pas ω-catégorique : la clôture algébrique du corps premier et le corps algébriquement clos de degré de transcendance 1 ne sont pas isomorphes.
– La théorie des groupes abéliens divisibles sans torsion non triviaux est également catégorique en tout cardinal infini non-dénombrable. En effet tout groupe abélien divisible sans torsion peut être regardé comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel et un groupe abélien divisible sans torsion de cardinal $\kappa > \omega$ aura pour dimension κ comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Par contre cette théorie n'est pas ω-catégorique.

Exercice 6.20. Déterminer les cardinaux κ pour lesquels la théorie de la relation d'équivalence à une infinité de classes toutes infinies est κ-catégorique. Même question pour la théorie de la relation d'équivalence à deux classes infinies.

Exercice 6.21. Soit $L = \{P_i : i \in \omega\}$ où les P_i sont des relations unaires. Soit T la théorie dans le langage L qui dit que les P_i sont deux à deux disjoints et que chaque P_i est infini.

1. Vérifier que T n'est catégorique en aucun cardinal κ.
2. Montrer que T est complète.

Pour terminer ce chapitre nous allons énoncer le théorème de Morley qui est le point de départ de la théorie de la stabilité ("une seconde naissance de la théorie des modèles"). La démonstration de ce théorème ne sera pas faite dans ce cours.

Fait 6.1 (Théorème de Morley 1965). *Une théorie dénombrable qui est catégorique en un cardinal infini non-dénombrable est catégorique en tout cardinal infini non-dénombrable.*

Chapitre 7

Types et élimination des quanteurs

Dans ce chapitre nous introduisons la notion de types, notion centrale en théorie des modèles pour l'étude des structures. Nous verrons leur utilisation pour l'élimination des quanteurs et nous traiterons l'exemple des corps algébriquement clos. Dans le chapitre suivant, nous parlerons de la question de la réalisation et de l'omission des types.

7.1 Types

Commençons par deux exemples.

Exemple 7.1.

1. Soit $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Z}, < \rangle$. Les uples $(2, 5, 9)$ et $(3, 4, 8)$ satisfont les mêmes formules sans quanteurs dans $\mathcal{M}$ car on a $2 < 5 < 9$ et $3 < 4 < 8$. On dira que ces deux uples ont même type sans quanteurs. Par contre, si on pose $\phi(x, y, z) = \exists t\ x < t < y$ alors $\mathcal{M} \models \phi(2, 5, 9)$ mais $\mathcal{M} \models \neg\phi(3, 4, 8)$. On dira que ces deux uples n'ont pas même type. En étudiant plus précisément la théorie des ordres discrets, on pourra vérifier que les uples $(5, 9)$ et $(4, 8)$ satisfont les même formules car il y a le même nombre d'éléments entre 5 et 9 qu'entre 4 et 8.
2. Soit $\mathcal{N} = \langle \mathbb{R}, < \rangle$. Les uples $(1, \pi, \mathrm{e})$ et $(\sqrt{2}, 8, 7)$ satisfont les mêmes formules dans $\mathcal{N}$. En effet comme $1 < \mathrm{e} < \pi$ et $\sqrt{2} < 7 < 8$, on peut faire correspondre par un va-et-vient infini ces deux uples. On dira que ces deux uples ont même type.

Définition 7.2. Soit $\mathcal{M}$ une L-structure de domaine M et $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ un n-uple de M.
- On appelle *type sans quanteurs* de $\bar{a}$ dans $\mathcal{M}$ l'ensemble des formules sans quanteurs satisfaites par $\bar{a}$, c'est-à-dire l'ensemble

$$\mathrm{tpsq}_{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \{\phi(x_1, \ldots, x_n) \text{ formules sans quanteurs de } L\colon \mathcal{M} \models \phi(a_1, \ldots, a_n)\}.$$

– On appelle *type* de $\bar{a}$ dans $\mathcal{M}$ l'ensemble des formules satisfaites par $\bar{a}$, c'est-à-dire l'ensemble

$$\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \{\phi(x_1, \ldots, x_n) \text{ formules de } L\colon \mathcal{M} \models \phi(a_1, \ldots, a_n)\}.$$

Notons que le type sans quanteurs est déterminé par le type atomique, c'est-à-dire l'ensemble des formules atonique satisfaites par $\bar{a}$.

Remarque. Soit $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ deux L-structures et $\bar{a} \in M^n$.
– Si $\mathcal{M}$ est une sous-structure de $\mathcal{N}$ alors $\mathrm{tpsq}_{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tpsq}_{\mathcal{N}}(\bar{a})$.
– Si $\mathcal{M}$ est une sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$ alors $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\bar{a})$.

Par exemple si $\mathcal{M} = \langle 2\mathbb{Z}, < \rangle$ et $\mathcal{N} = \langle \mathbb{Z}, < \rangle$ alors $\mathrm{tpsq}_{\mathcal{M}}(0, 2) = \mathrm{tpsq}_{\mathcal{N}}(0, 2)$ mais $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(0, 2) \neq \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(0, 2)$.

Définition 7.3. On dit qu'un isomorphisme partiel de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ est un ∞-*isomorphisme* s'il appartient à une famille Karpienne d'isomorphismes partiels de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$, c'est-à-dire s'il est prolongeable par va-et-vient infini.

Il suit des définitions et de la proposition 5.29 que

Proposition 7.4. *Soit σ un isomorphisme partiel de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$. Alors pour tout $\bar{a} \in \mathrm{Dom}(\sigma)^n$, $\mathrm{tpsq}_{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tpsq}_{\mathcal{N}}(\sigma(\bar{a}))$. De plus si σ est un ∞-isomorphisme, alors $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\sigma(\bar{a}))$.*

Réciproquement deux uples qui ont même type, sont en fait conjugués par un automorphisme d'une extension élémentaire. Tout d'abord, remarquons que si $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ sont deux L-structures et $\bar{a} \in M^n$, $\bar{b} \in M^n$ tels que $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\bar{b})$ alors $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont élémentairement équivalentes. En effet, tous les énoncés satisfaits par $\mathcal{M}$ sont par définition parmi les formules de $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a})$. On peut donc supposer par la propriété de plongement commun (lemme 6.13) que $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont dans la même structure.

Proposition 7.5. *Soient $\bar{a}$ et $\bar{b}$ deux uples d'une L-structure $\mathcal{M}$. Alors $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type si et seulement s'il existe une extension élémentaire $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ et un automorphisme σ de $\mathcal{N}$ qui envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$.*

Démonstration. ($\Leftarrow$) est évident.
($\Rightarrow$) : construisons une chaîne d'extensions élémentaires

$$\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}_1 \prec .... \prec \mathcal{M}_n \prec ...$$

et une chaîne

$$\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset ... \subset \sigma_n \subset ...$$

d'isomorphismes partiels élémentaires $\sigma_i : \mathcal{M}_i \to \mathcal{M}_i$ telle que $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$, σ_0 est l'unique isomorphisme de la sous-structure engendré par $\{\bar{a}\}$ sur la sous-structure engendré par $\{\bar{b}\}$ qui envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$ et telle que pour tout $i < \omega$, le domaine de σ_{2i+1} contient $\mathcal{M}_{2i}$ et l'image de σ_{2i+2} contient $\mathcal{M}_{2i+1}$. Pour cela on utilise le lemme suivant :

Lemme 7.6. *Si $\mathcal{M}$ est une L-structure et $\sigma : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ est un isomorphisme partiel élémentaire alors il existe une extension élémentaire $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ et un isomorphisme partiel élémentaire $\tau : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ de domaine $\mathcal{M}$ qui prolonge σ.*

Démonstration. Associons à chaque $m \in \mathcal{M}$ une nouvelle constante m' et considérons l'ensemble des énoncés suivants dans le langage $L \cup \{m, m' : m \in M\}$,

$$\Sigma := \mathrm{Th}(\mathcal{M}, M) \cup \{\phi(\bar{m}', \sigma(\bar{n})) : \mathcal{M} \models \phi(\bar{m}, \bar{n}) \text{ et } \bar{n} \in \mathrm{dom}(\sigma)\}.$$

Montrons que Σ est consistant. Pour cela considérons en une partie finie

$$\Sigma_0 := \theta(\bar{m}) \cup \{\phi(\bar{m}'_i, \sigma(\bar{n}_i)) : i \in I\}.$$

Alors $\mathcal{M} \models \exists(\bar{x}_i)_{i\in I} \wedge_{i\in I} \phi(\bar{x}_i, \sigma(\bar{n}_i))$ car $\mathcal{M} \models \exists(\bar{x}_i)_{i\in I} \wedge_{i\in I} \phi(\bar{x}_i, \bar{n}_i)$ et σ est élémentaire. On peut donc interprété les m' dans $\mathcal{M}$ tel que $(\mathcal{M}, M, M') \models \Sigma_0$. Par compacité il existe donc un modèle $\mathcal{N}$ de Σ, qui est de plus une extension élémentaire de $\mathcal{M}$. Considérons $\tau : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ la fonction qui à $m \in M$ associe $m' \in N$. Alors τ prolonge σ et est un isomorphisme partiel : pour tout $\bar{m} \in \mathcal{M}$,

$$\mathcal{N} \models \phi(\bar{m}) \text{ ssi } \mathcal{M} \models \phi(\bar{m}) \text{ ssi } \mathcal{N} \models \phi(\tau(\bar{m})).$$

□

Revenons à la construction de nos chaînes : aux étapes paires on prolonge σ_{2i} et aux étapes impaires σ_{2i+1}^{-1}. Les chaînes construites, on vérifie que $\cup_{i\in\omega}\sigma_i$ est un automorphisme de $\cup_{i\in\omega}\mathcal{M}_i$ qui envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$. □

7.2 Elimination des quanteurs

Quand on considère une théorie sur un langage donné, il est intéressant d'isoler un sous-ensemble des formules du premier ordre suffisant pour décrire les ensembles définissables dans les modèles de cette théorie. L'étude des propriétés des modèles en question s'avèrent souvent ainsi simplifiée. Le cas particulier de l'élimination des quanteurs est le cas où toute formule est équivalente modulo la théorie à une formule sans quanteurs.

Définition 7.7. Une théorie T *élimine les quanteurs* si pour tout $n > 0$ et toute formule $\psi(\bar{x})$ où $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)$ il existe une formule $\phi(\bar{x})$ sans quanteur telle que $T \vdash \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$.

Notons que si une théorie T élimine les quanteurs alors tout type d'un uple dans un modèle de T est déterminé par le type sans quanteurs de cet uple. Réciproquement, pour vérifier l'élimination des quanteurs (ou plus généralement l'élimination à un sous-ensemble de formules), on utilisera la méthode de va-et-vient afin de montrer que deux uples ayant même type sans quanteurs, ont même type et on pourra conclure à l'aide de la caractérisation suivante.

Proposition 7.8. *Soit T une théorie et Φ un ensemble non vide de formules de L tels que pour tout entier $n > 0$, deux n-uples extraits de modèles de T ont même types dès qu'ils satisfont les mêmes formules de Φ. Alors pour toute formule $\psi(\bar{x})$ de L il existe une combinaison booléenne $\phi(\bar{x})$ d'éléments de Φ telle que*

$$T \vdash \forall \bar{x}(\psi(\bar{x}) \leftrightarrow \phi(\bar{x})).$$

En particulier si pour tout $n > 0$, tout $\mathcal{M} \models T$, tout $\mathcal{N} \models T$, tout $\bar{a} \in M^n$ et tout $\bar{b} \in M^n$ on a $\mathrm{tpsq}_{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tpsq}_{\mathcal{N}}(\bar{b})$ implique que $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\bar{b})$ alors T élimine les quanteurs.

Démonstration. Soit $\psi(\bar{x})$ une formule de L avec $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)$. Si ψ n'est satisfaite dans aucun modèle de T, on considère une formule θ de Φ et on a

$$T \vdash \forall \bar{x}((\psi(\bar{x}) \leftrightarrow \theta(\bar{x}) \wedge \neg\theta(\bar{x})))$$

Sinon, soit $\mathcal{M} \models T$ et $\bar{a} \in M^n$ tel que $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$. Il existe alors une combinaison booléenne $\phi_{\bar{a}}(\bar{x})$ d'éléments de Φ telle que $\mathcal{M} \models \phi_{\bar{a}}(\bar{a})$ et $T \vdash \forall \bar{x}(\phi_{\bar{a}}(\bar{x}) \to \psi(\bar{x}))$. En effet, considérons $\bar{c}$ un n-uple de nouvelles constantes alors l'ensemble d'énoncés suivant dans le langage $L \cup \{\bar{c}\}$ est inconsistant par hypothèse

$$T \cup \{\phi(\bar{c})\colon \phi \in \Phi \text{ et } \mathcal{M} \models \phi(\bar{a})\} \cup \{\neg\phi(\bar{c})\colon \phi \in \Phi \text{ et } \mathcal{M} \models \neg\phi(\bar{a})\} \cup \{\neg\psi(\bar{c})\}.$$

Par compacité une partie finie est inconsistante, ce qui nous donne une combinaison booléenne $\phi_{\bar{a}}(\bar{x})$ d'éléments de Φ telle que $\mathcal{M} \models \phi_{\bar{a}}(\bar{a})$ et $T \cup \{\phi_{\bar{a}}(\bar{c})\} \cup \{\neg\psi(\bar{c})\}$ est inconsistant.
Soit maintenant $(\mathcal{M}_i, \bar{a}_i)_{i \in I}$ une énumération de tous les types possibles d'un n-uple dans un modèle $\mathcal{M}_i$ de T tel que $\mathcal{M}_i \models \psi(\bar{a}_i)$. Alors

$$T \cup \{\neg\phi_{\bar{a}_i}(\bar{c})\colon i \in I\} \cup \{\psi(\bar{c})\}$$

est inconsistant. Par compacité, il exsite donc I_0 fini tel que

$$T \vdash \forall \bar{x}(\psi(\bar{x}) \to \bigvee_{i \in I_0} \phi_{\bar{a}_i}(\bar{x}).$$

Alors ψ est équivalente modulo T à $\vee_{i \in I_0} \phi_{\bar{a}_i}$. □

Exemple 7.9. Considérons la théorie T de la relation d'équivalence à une infinité de classes toutes infinies dans le langage $L = \{E\}$. Soient $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ deux modèles de T. On vérifie alors que les isomorphismes partiels de $\mathcal{M}_1$ dans $\mathcal{M}_2$ à domaine fini forment une famille Karpienne. On en déduit que T est complète et élimine les quanteurs.

Exemple 7.10. Soit K un corps. On exprime la théorie T des K-espaces vectoriels infinis dans le langage $L_K := \{0, +, -, \lambda_k : k \in K\}$ où pour tout $k \in K$, λ_k est une fonction unaire qui est interprétée dans un K-espace vectoriel par la multiplication par k. Alors T est complète et élimine les quanteurs : soient V_1 et V_2 deux espaces vectoriels de dimension infini et considérons $\mathcal{F}$ la famille des isomorphismes partiels ayant pour domaine un sous-espace vectoriel de dimension finie. Alors $\mathcal{F}$ est non vide et on vérifie facilement que $\mathcal{F}$ est un va-et-vient entre V_1 et V_2. Donc T est complète. De plus T élimine les quanteurs car si $\bar{a} \in V_1$ et $\bar{b} \in V_2$ satisfont les mêmes équations linéaires alors les sous-espaces vectoriels engendrés par $\bar{a}$ et respectivement par $\bar{b}$ sont isomorphes.

Remarque. La théorie des groupes abéliens divisibles sans torsion non triviaux "correspond" à la théorie des $\mathbb{Q}$-e.v. infinis : on définit dans un groupe divisible sans torsion $\lambda_{p/q}$ par $px = qy$ qui est une formule sans quanteur. On en déduit que cette théorie élimine elle aussi les quanteurs.

Exercice 7.11. La théorie des ordres totaux denses sans extrémité élimine les quanteurs.

Exercice 7.12. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux modèles d'une théorie T qui élimine les quanteurs. Si $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ alors $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$. Une théorie qui vérifie cette propriété est dite *modèle-complète.*

7.3 Les corps algébriquement clos

Nous vérifions dans cette section que la théorie des corps algébriquement clos élimine les quanteurs et nous en déduisons une preuve du théorème des zéros de Hilbert.

Proposition 7.13. *La théorie des corps algébriquement clos élimine les quanteurs (dans le langage des anneaux $L_{ann} = \{0, 1, +, -, \cdot\}$).*

Démonstration. Soient K_1 et K_2 deux corps algébriquement clos et $\bar{a} \in K_1$ et $\bar{b} \in K_2$ deux uples satisfaisant les mêmes formules atomiques. Dans ce cas K_1 et K_2 ont même caractéristique car pour tout p, $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{p} = 0$ est une formule atomique. De plus $\bar{a}$ et $\bar{b}$ satisfont les mêmes équations polynomiales sur le corps premier, donc ils engendrent deux sous-corps k_1 et k_2 isomorphes. On peut supposer, en passant à des extensions élémentaires, que K_1 et K_2 sont de degré de transcendance infini. On a vu (voir exemple 5.10) qu'il existe alors un va-et-vient de K_1 sur K_2 contenant l'isomorphisme de k_1 sur k_2 qui envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$. Donc $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type. $\square$

Lemme 7.14. *Soit S un système fini d'équations et d'inéquations (en plusieurs inconnues), à coefficients dans un corps k. Si S a une solution dans une extension K de k, il a une solution dans toute extension algébriquement close de k.*

Démonstration. On peut voir S comme une formule sans quanteur $\phi(x_1, ..., x_n, b_1, ..., b_m)$ dans le langage des anneaux où les x_i correspondent aux inconnues et les b_i sont les coefficients dans le corps k. Alors il existe $\bar{a} \in K$ tel que $K \models \phi(\bar{a}, \bar{b})$. Considérons une extension K_1 de K algébriquement close. Comme ϕ est sans quanteur, $K_1 \models \phi(\bar{a}, \bar{b})$.

Soit une autre extension K_2 de k algébriquement close. Alors les clôtures algébriques $\bar{k}_1$ de k dans K_1 et $\bar{k}_2$ de k dans K_2 sont isomorphes au-dessus de k. Comme la théorie des corps algébriquement clos élimine les quanteurs, $\bar{k}_1 \prec K_1$ et $\bar{k}_2 \prec K_2$ et donc comme $K_1 \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{b})$ on a $\bar{k}_1 \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{b})$, $\bar{k}_2 \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{b})$ et $K_2 \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{b})$. □

Théorème 7.15 (Théorème des zéros de Hilbert)**.** *Soit K un corps algébriquement clos, I un idéal de $K[X_1, ..., X_n]$ et $P \in K[X_1, ..., X_n]$. Supposons que pour tout $\bar{a} \in K^n$, si $Q(\bar{a}) = 0$ pour tout $Q \in I$ alors $P(\bar{a}) = 0$. Alors il existe m tel que $P^m \in I$.*

Démonstration. Supposons que pour tout m, $P^m \notin I$ et soit J l'idéal maximal contenant I mais aucun des P^m. On vérifie facilement que J est premier. Soit L le corps de fractions de $K[X_1, ..., X_n]/J$. Alors L contient K. Soit $Q_1, ..., Q_r$ des générateurs de J. Alors la système $S := \{Q_1 = 0, ..., Q_r = 0, P \neq 0\}$ a une solution dans L et donc d'après le lemme précédent une solution dans K, mais cette solution contredit l'hypothèse. □

Chapitre 8

Espaces de types, Saturation, Théorème d'omission

Dans ce chapitre nous nous intéressons aux espaces de types d'une théorie complète et on supposera que les modèles des théories complètes considérées sont infinis. Nous verrons que tous les types d'une théorie donnée ne sont pas nécessairement réalisés dans tout modèle de celle-ci mais que cela est le cas pour certains modèles "suffisament riches", les modèles ω-*saturés*.

8.1 Espaces de types

Définition 8.1. Soit T une théorie complète et n un entier. On note $S_n(T)$ l'ensemble des types des n-uples de modèles de T, c'est-à-dire

$$S_n(T) = \{\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a})\colon \mathcal{M} \models T,\ \bar{a} \in M^n\}.$$

Si $p \in S_n(T)$, on dit qu'un modèle $\mathcal{M} \models T$ *réalise* p s'il existe $\bar{a} \in M^n$ tel que $p = \mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a})$.
On note $S(T)$ l'ensemble des types réalisés dans l'un des modèles de T, c'est-à-dire

$$S(T) = \bigcup_{n>0} S_n(T).$$

Remarque. Soit $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$. Alors chaque type $p \in S(T)$ n'est pas nécessairement réalisé dans $\mathcal{M}$ (voir exemple 8.3 ci-dessous) mais il est toujours réalisé dans une extension élémentaire de $\mathcal{M}$. (Il suffit d'utiliser le théorème de l'extension élémentaire commune.) Par ailleurs toute formule $\phi(\bar{x})$ d'un type $p \in S(T)$ est réalisée dans $\mathcal{M}$ (c'est-à-dire il existe $\bar{a} \in M^n$ tel que $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$).

Exemple 8.2. Considérons à nouveau la théorie T de la relation d'équivalence à une infinité de classes toutes infinies dans le langage $L = \{E\}$.
– Il y a un unique 1-type.

– Il y a trois 2-types : le type déterminé par $x_1 = x_2$, celui déterminé par $(x_1 \neq x_2) \wedge E(x_1, x_2)$ et enfin celui déterminé par $\neg E(x_1, x_2)$.

On peut remarquer que tout type de $S(T)$ est réalisé dans tout modèle de T.

Soit T une théorie et $n > 0$. Remarquons qu'un type de $S_n(T)$ correspond à une théorie complète dans le langage $L \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$. En fait l'espace des n-types d'une théorie complète est un espace topologique compact en tant que fermé de l'espace des théories complètes dans le langage $L \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$. On dira qu'une formule $\phi(\bar{x})$ *isole* un type $p \in S_n(T)$ si p est l'unique type de $S_n(T)$ contenant $\phi(\bar{x})$, c'est-à-dire si l'ouvert fermé $\langle\phi(\bar{x})\rangle$ de $S_n(T)$ isole p.

Exemple 8.3. Soit $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Z}, < \rangle$ et $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$. Pour chaque $m \geq 1$, notons $d_m(x, y)$ une formule exprimant qu'il existe exactement $m - 1$ éléments strictement compris entre x et y, c'est-à-dire si x et y sont à distance m.

On peut vérifier que tout type de $S_2(T)$ est de l'un des types suivants

– le type isolé par la formule $x_1 = x_2$,

– pour chaque $m \geq 1$, le type isolé par la formule $(x_1 < x_2) \wedge d_m(x_1, x_2)$,

– pour chaque $m \geq 1$, le type isolé par la formule $(x_1 > x_2) \wedge d_m(x_1, x_2)$,

– le type contenant les formules $x_1 < x_2$ et $\neg d_m(x_1, x_2)$ pour tout $m \geq 1$,

– le type contenant les formules $x_1 > x_2$ et $\neg d_m(x_1, x_2)$ pour tout $m \geq 1$.

Remarquons que les deux derniers types ne sont pas réalisés dans $\mathcal{M}$. On peut également vérifier qu'aucune formule n'isole l'un de ces deux types.

Exercice 8.4. Soit $\mathcal{M}$ une L-structure, $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ et $p \in S_n(T)$. Supposons qu'il existe $k > 0$, tel que pour chaque extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$, il y a au plus k réalisations de p dans $\mathcal{N}$. Montrer qu'alors toute réalisation de p dans une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ est en fait dans $\mathcal{M}$. Indication : montrer qu'il existe une formule dans p qui n'est satisfaite que par un nombre fini m d'éléments. Choisir une telle formule ϕ avec m minimal et montrer que ϕ isole p.

8.2 Types sur des paramètres

De manière plus générale on considère les types au-dessus d'un ensemble de paramètres. À partir de maintenant pour tout ensemble A, on notera $L(A)$ le langage $L \cup \{a : a \in A\}$.

Définition 8.5. Soit $\mathcal{M}$ une L-structure et $A \subset \mathcal{M}$ un ensemble de paramètres.

1. Soit $\bar{a}$ un uple de $\mathcal{M}$. Le type de $\bar{a}$ sur A (dans $\mathcal{M}$) est l'ensemble

$$\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}/A) := \{\phi(\bar{x}) \in L(A) : \mathcal{M} \models \phi(\bar{a})\}.$$

2. On appelle n-type sur A un élément de $S_n(\mathrm{Th}(\mathcal{M}, A))$. S'il n'y a pas d'ambiguité on note $S_n(A)$ l'ensemble des n-types sur A et $S(A)$ l'union des $S_n(A)$. Notons que chaque type p de $S(A)$ est réalisé dans une extension élémentaire de $\mathcal{M}$, c'est-à-dire il existe $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ et $\bar{a} \in N^n$ tel que $p = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\bar{a}/A)$.

Exemple 8.6. Dans la théorie des ordres totaux denses sans extrémité, un 1-type sur A correspond à la coupure qu'il détermine sur A. En particulier les 1-types sur $\mathbb{Q}$ correspondent aux coupures :

1. $\{x = q\}$ pour $q \in \mathbb{Q}$,
2. $\{q < x < q' \colon q' > q\}$ pour $q \in \mathbb{Q}$,
3. $\{q' < x < q \colon q' < q\}$ pour $q \in \mathbb{Q}$,
4. $\{q' < x < q \colon q' < r < q\}$ pour $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
5. $\{x > q \colon q \in \mathbb{Q}\}$,
6. $\{x < q \colon q \in \mathbb{Q}\}$.

Exemple 8.7. Dans la théorie d'un corps algébriquement clos K un 1-type p sur un sous-corps k est déterminé

– soit par le polynôme minimal sur k d'une réalisation de p (types des éléments algébriques sur k),
– soit par l'ensemble $\{P(x) \neq 0 : P \in k[X]\}$ (type des éléments transcendants sur k).

Définition 8.8. Soit $\mathcal{M}$ une structure et $A \subseteq M$ un ensemble de paramètres. On appelle A-*automorphisme* de $\mathcal{M}$ un automorphisme de $\mathcal{M}$ qui fixe point par point A.

En reprenant la proposition 7.5 dans le langage $L(A)$, on obtient

Proposition 8.9. *Soient $\bar{a}$ et $\bar{b}$ deux uples d'une L-structure $\mathcal{M}$ et $A \subset M$ un ensemble de paramètres. Alors $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type sur A si et seulement il existe une extension élémentaire $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ et un A-automorphisme σ de $\mathcal{N}$ qui envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$. Avoir même type sur A signifie donc être dans la même orbite au-dessus de A.*

Théorème 8.10 (Svenonius)**.** *Soit $\mathcal{M}$ une L-structure, $A \subset M$ un ensemble de paramètres et D une partie de M^n définissable dans $\mathcal{M}$. Alors D est définissable à paramètres dans A si et seulement si dans toute extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$, D est invariant par tout A-automorphisme de $\mathcal{N}$.*

Démonstration. ($\Rightarrow$) est immédiat.
($\Leftarrow$) Soit $\phi(\bar{x}, \bar{m})$ une formule à paramètres $\bar{m}$ dans M définissant D et soit $p = \mathrm{tp}(\bar{m}/A)$. Vérifions tout d'abord que

$$p(\bar{c}_1) \cup p(\bar{c}_2) \vdash \forall \bar{x} (\phi(\bar{x}, \bar{c}_1) \leftrightarrow \phi(\bar{x}, \bar{c}_2))$$

dans le langage $L(A) \cup \{\bar{c}_1, \bar{c}_2\}$ où $\bar{c}_1$ et $\bar{c}_2$ sont deux uples de nouvelles constantes. Soit $\mathcal{N}$ une $L(A)$-structure contenant $\bar{n}_1$ et $\bar{n}_2$ réalisant p. En particulier $\mathrm{Th}(\mathcal{N}) = \mathrm{Th}(\mathcal{M}, A)$. On peut donc supposer que la restriction $\mathcal{N}'$ de $\mathcal{N}$ au langage L est une extension élémentaire de $\mathcal{M}$. Alors dans $\mathcal{N}'$, $\mathrm{tp}(\bar{n}_1/A) = \mathrm{tp}(\bar{n}_2/A) = \mathrm{tp}(\bar{m}/A)$. En utilisant la proposition 8.9, on en déduit que dans $\mathcal{N}'$,

$$\{\bar{a} \in N : \mathcal{N}' \models \phi(\bar{a}, \bar{n}_1)\} = D = \{\bar{a} \in N : \mathcal{N}' \models \phi(\bar{a}, \bar{n}_2)\}$$

car D est invariant par tout A-automorphisme.
Par compacité il existe $\theta(\bar{y}) \in p$ ($\theta \in L(A)$) tel que

$$\vdash \theta(\bar{c}_1) \wedge \theta(\bar{c}_2) \to \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}, \bar{c}_1) \leftrightarrow \phi(\bar{x}, \bar{c}_2)).$$

On en déduit que D est défini par $\exists \bar{y}(\theta(\bar{y}) \wedge \phi(\bar{x}, \bar{y}))$. □

8.3 Saturation

Définition 8.11. Soit κ un cardinal infini. Une structure $\mathcal{M}$ est *κ-saturée* si pour toute partie $A \subset M$ telle que $|A| < \kappa$, $\mathcal{M}$ réalise tout type de $S_1(\mathrm{Th}(\mathcal{M}, A))$.

Proposition 8.12. *Une structure $\mathcal{M}$ est κ-saturée si pour toute partie $A \subset M$ telle que $|A| < \kappa$, $\mathcal{M}$ réalise tout type de $S(\mathrm{Th}(\mathcal{M}, A))$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{M}$ une structure κ-saturée. On montre par récurrence sur k que pour toute partie $A \subset M$ telle que $|A| < \kappa$, $\mathcal{M}$ réalise tout type de $S_k(\mathrm{Th}(\mathcal{M}, A))$. Pour $k = 1$ c'est vrai par hypothèse de saturation. Supposons $k > 1$. Soit $p \in S_k(\mathrm{Th}(\mathcal{M}, A))$. Alors il existe une extension élémentaire $\mathcal{N}_1$ de $\mathcal{M}$ et $(a_1, \ldots, a_k) \in N_1^k$ tel que $p = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}_1}(a_1, \ldots, a_k/A)$. Par hypothèse de récurrence il existe $(b_1, \ldots, b_{k-1}) \in M^{k-1}$ tel que $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(b_1, \ldots, b_{k-1}/A) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}_1}(a_1, \ldots, a_{k-1}/A)$. Il existe alors une extension élémentaire $\mathcal{N}_2$ de $\mathcal{N}_1$ et un A-automorphisme σ de $\mathcal{N}_2$ qui envoie $(a_1, \ldots, a_{k-1})$ sur $(b_1, \ldots, b_{k-1})$. Mais alors par saturation $\mathrm{tp}_{\mathcal{N}_2}(\sigma(a_k)/A \cup \{b_1, \ldots, b_{k-1}\})$ est réalisé par un élément b_k de M. On a alors $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(b_1, \ldots, b_k/A) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}_2}(b_1, \ldots, b_{k-1}, \sigma(a_k)/A) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}_2}(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_k)/A)) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}_2}(a_1, \ldots, a_k/A) = p$. □

Exercice 8.13. Soient $\mathcal{M}$ une structure ω-saturée, $\mathcal{N}$ une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ et $(n_i)_{i\in\omega}$ une famille d'éléments de N alors il existe une famille $(m_i)_{i\in\omega}$ d'éléments de M tel que pour tout $k \in \omega$, $(m_0, ..., m_k)$ et $(n_0, ..., n_k)$ ont même type.

Exemple 8.14.
1. Tout ordre total dense sans extrémité est ω-saturé.
2. Un corps algébriquement clos est ω-saturé si et seulement si il est de degré de transcendance infini.

Proposition 8.15. *Toute structure a une extension élémentaire ω-saturée.*

Démonstration. Soit $\mathcal{M}$ une structure. On construit une chaîne

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{M} \prec \mathcal{M}_1 \prec ... \prec \mathcal{M}_i \prec ...$$

telle que pour tout i, $\mathcal{M}_{i+1}$ réalise tous les types dans $S_1(M_i)$. Pour cela considérons une énumération $(p_j)_{j\in J}$ des types dans $S_1(M_i)$ et l'ensemble d'énoncés

$$\Sigma := \cup_{j\in J} p_j(c_j)$$

où $(c_j)_{j\in J}$ est une famille de nouvelles constantes. Par compacité Σ est consistant car toute partie finie de chaque p_j est réalisée dans $\langle \mathcal{M}_i, M_i \rangle$.

Alors l'union $\mathcal{N} := \cup \mathcal{M}_i$ est une extension élémentaire de $\mathcal{M}$, ω-saturée. En effet si A est une partie finie de N, il existe i tel que $A \subset M_i$. Soit p un type dans $S_1(A)$. Il a une réalisation a dans un extension élémentaire de $\mathcal{M}_i$. Alors le type de a sur $\mathcal{M}_i$ est réalisé dans $\mathcal{M}_{i+1}$, donc p est réalisé dans $\mathcal{N}$. □

Par une preuve analogue à la proposition précédente, on peut montrer que pour tout cardinal κ infini, toute structure admet une extension élémentaire κ-saturée (pour cela on peut supposer que κ est régulier). En étant un peu plus astucieux, dans le cas où κ est un cardinal fortement inaccessible, on peut supposer que l'extension est de cardinal κ.
Nous allons voir maintenant que pour l'étude des types sans paramètres d'une théorie, l'utilisation de modèles ω-saturés est suffisante.

Proposition 8.16. *Soit T une théorie complète et $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ deux modèles ω-saturés de T. Pour tous n-uples $\bar{a} \in M^n$ et $\bar{b} \in N^n$, les types $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a})$ et $\mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\bar{b})$ sont égaux si et seulement s'il existe un ∞-isomorphisme σ de $\mathcal{M}$ vers $\mathcal{N}$ envoyant $\bar{a}$ sur $\bar{b}$. En particulier deux modèles ω-saturés d'une théorie complète sont ∞-équivalents.*

Démonstration. ($\Leftarrow$) a déjà été remarqué.
($\Rightarrow$) Pour tout $k > 0$ et tous uples $\bar{c} \in M^k$, $\bar{d} \in N^k$ tels que $\mathrm{tp}(\bar{c}) = \mathrm{tp}(\bar{d})$ il existe un unique isomorphisme partiel $\sigma_{\bar{c},\bar{d}}$ (qui est élémentaire) de la sous-structure engendrée par $\bar{c}$ vers la sous-structure engendrée par $\bar{d}$ qui envoie $\bar{c}$ sur $\bar{d}$. Alors l'ensemble de ces isomorphismes partiels forment une famille Karpienne. En effet si $\bar{c} \in M^k$, $\bar{d} \in N^k$ tels que $\mathrm{tp}(\bar{c}) = \mathrm{tp}(\bar{d})$ et si $c' \in M$ alors $p = \{\phi(x, \bar{d}) : \mathcal{M} \models \phi(c', \bar{c})\}$ est un type sur $\bar{d}$ réalisé par un d' dans $\mathcal{N}$ car $\mathcal{N}$ est ω-saturée. Alors $\sigma_{c'\bar{c},d'\bar{d}}$ prolonge $\sigma_{\bar{c},\bar{d}}$. □

Rappelons que deux structures dénombrables ∞-équivalentes sont isomorphes. Une théorie complète possède donc au plus un modèle dénombrable ω-saturé à isomorphisme près. Voici une caractérisation des théories ayant un modèle dénombrable ω-saturé.

Théorème 8.17. *Soit T une théorie complète dans un langage L fini ou dénombrable. La théorie T a un modèle dénombrable ω-saturé si et seulement si l'espace de types $S(T)$ est dénombrable.*

Démonstration. L'implication est évidente car tous les types de $S(T)$ sont alors réalisés dans ce modèle ω-saturé qui est dénombrable.
Réciproquement, remarquons tout d'abord que si $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ est un ensemble fini de paramètres dans un modèle $\mathcal{M}$ de T alors $S_1(A)$ est au plus dénombrable. Cela vient du fait que si deux éléments b et c sont deux éléments d'une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ tel que les uples $(b, a_1, \ldots, a_n)$ et $(c, a_1, \ldots, a_n)$ ont même type alors b et c ont même type sur A.
Maintenant par le théorème de Löwenheim-Skolem Descendant, on commence par considérer un modèle dénombrable $\mathcal{M}_0$ de T. Le nombre de parties finies de M_0 est alors également dénombrable et donc par la remarque précédente, le nombre de 1-types sur des parties finies de M_0 est dénombrable. Par compacité et en utilisant à

nouveau Löwenheim-Skolem Descendant, il existe une extension élémentaire $\mathcal{M}_1$ de $\mathcal{M}_0$ réalisant tous les 1-types sur des parties finies de M_0. Pour conclure on construit une chaine dénombrable d'extensions élémentaires dénombrables vérifiant la propriété ci-dessus et alors l'union de cette chaine est ω-saturée. □

Remarque 8.18. De même que deux structures dénombrables ∞-équivalentes sont isomorphes, tout ∞-isomorphisme d'une structure dénombrable vers elle-même se prolonge en un automorphisme de celle-ci. Par conséquent, en utilisant la proposition 8.16, si $\mathcal{M}$ est une structure dénombrable ω-saturée alors deux uples $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type si et seulement s'il existe un automorphisme de $\mathcal{M}$ envoyant $\bar{a}$ sur $\bar{b}$. On dit qu'une telle structure est *fortement homogène* .

8.4 Théorème d'omission des types

Commençons cette partie par une remarque pratique permettant de construire une sous-structure élémentaire dénombrable vérifiant des propriétés voulues :

Lemme 8.19 (Témoins de Henkin)**.** *Soit L un langage et C un famille de nouvelles constantes. Soit $\mathcal{M}_C$ une $(L\cup C)$-structure et $\mathcal{M}$ sa restriction au langage L. Supposons que pour toute formule $\phi(x)$ de $L \cup C$ à une variable libre, il existe $c \in C$ tel que $\mathcal{M}_C \models \exists x\phi(x) \to \phi(c)$ alors*

$$C^{\mathcal{M}_C} := \{c^{\mathcal{M}_C} : c \in C\}$$

est une sous-structure élémentaire de $\mathcal{M}$.

Démonstration. A l'aide des formules $x = d$ où d est un symbole de constante de L et $y = f(\bar{c})$ où f est un symbole de fonctions, on remarque que $C^{\mathcal{M}_C}$ est une sous-structure de $\mathcal{M}$. Il suffit alors de vérifier le test de Tarski. En effet soit $\psi(x, \bar{y})$ une formule de L et $\bar{a}$ des paramètres dans $C^{\mathcal{M}_C}$. On peut alors considérer la formule $\phi(x)$ de $L \cup C$ correspondant à la formule $\psi(x, \bar{a})$. Par hypothèse il existe $c \in C$ tel que $\mathcal{M}_C \models \phi(c)$. Mais alors $\mathcal{M} \models \psi(c^{\mathcal{M}_C}, \bar{a})$ et le test de Tarski est ainsi vérifié. □

Soit T une théorie complète et p un type de $S(T)$. On dira qu'un modèle de T *omet* p s'il ne réalise pas p. Rappelons que p est dit isolé s'il existe une formule $\phi \in p$ tel que p est l'unique type de $S(T)$ contenant ϕ. Si de plus on suppose le langage fini ou dénombrable, on a le résultat suivant concernant les types non isolés.

Théorème 8.20 (Omission des types)**.** *Soit T une théorie complète sur un langage L fini ou dénombrable et p un type de $S(T)$. Alors il existe un modèle $\mathcal{M}$ qui omet p si et seulement si p n'est pas isolé.*

Démonstration. Considérons tout d'abord un type $p \in S_n(T)$ isolé par la formule $\phi(\bar{x})$. Soit $\mathcal{M}$ un modèle de T. Il existe alors une extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ et $\bar{b} \in N^n$ tel que $p = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\bar{b})$. On a $\mathcal{N} \models \exists\bar{x}\phi(\bar{x})$. Donc il existe $\bar{a} \in M^n$ tel que $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$. Mais comme ϕ isole p, il suit que $p = tp_{\mathcal{M}}(\bar{a})$.

Réciproquement, soit $p \in S_n(T)$ non isolé. Considérons une famille $C = \{c_i : i \in \omega\}$ de nouvelles constantes. Nous allons construire une $L \cup C$-structure vérifiant la propriété du lemme 8.19 et telle que la sous-structure élémentaire formée des points de C omet p. Pour cela choisissons une énumération $\{\phi_i(x) \colon i < \omega\}$ des formules de $L \cup C$ à une variable libre et $\{\bar{a}_i \colon i < \omega\}$ une énumération des n-uples de C. Posons $\Sigma_0 = \emptyset$ et construisons par récurrence une suite croissante d'ensembles finis Σ_n d'énoncés de $L \cup C$ consistant avec T de la façon suivante :

– Si $n = 2m$, prenons i minimal tel que c_i ne figure ni dans Σ_n, ni dans $\phi_m(x)$. Posons alors
$$\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{\exists x \phi_m(x) \to \phi_m(c_i)\}.$$
Commme $T \cup \Sigma_n$ est consistant et qu'il n'y a aucune occurence de c_i ni dans Σ_n, ni dans $\phi_m(x)$, il suit que $T \cup \Sigma_{n+1}$ a un modèle.

– Si $n = 2m+1$, soit $\theta(\bar{c})$ la conjonction des énoncés dans Σ_n. On considère alors l'uple $\bar{a}_m$ et on peut alors supposer que $\theta(\bar{c}) = \theta(\bar{a}_m, \bar{b})$ avec $\bar{a}_m \cap \bar{b} = \emptyset$ et $\theta(\bar{x}, \bar{y})$ formule de L. Comme $T \cup \Sigma_n$ est consistant et la formule $\exists \bar{y} \theta(\bar{x}, \bar{y})$ n'isole pas p, il existe un modèle $\mathcal{M}$ de T et $\bar{a} \in M^n$ tels que $\mathcal{M} \models \exists \bar{y} \theta(\bar{a}, \bar{y})$ et $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}) \neq p$. Choissisons $\psi_m(\bar{x}) \in \mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}) \setminus p$ et posons
$$\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{\psi_m(\bar{a}_m)\}.$$
Par ce qui précède $\Sigma_{n+1} \cup T$ est consistant.

La famille Σ_n étant construite, par compacité il existe un modèle $\mathcal{M}_C$ de $T \cup \bigcup_n \Sigma_n$. Alors par le lemme 8.19, $C^{\mathcal{M}_C}$ est une sous-structure élémentaire de $\mathcal{M}$, c'est donc un modèle de T. De plus un n-uple de $C^{\mathcal{M}_C}$ est de la forme $\bar{a}_m$, il satisfait donc une formule $\psi_m(\bar{a}_m)$ et ne peut donc réaliser p. □

Le théorème précédent est également vérifié pour des types au-dessus d'un ensemble fini ou dénombrable de paramètres ; Si A est un tel ensemble de paramètres dans un modèle $\mathcal{M}$ de T, on applique le théorème aux types de $S(\mathrm{Th}(\mathcal{M}, A))$.
Par ailleurs en reprenant la démonstration on peut montrer qu'il est possible d'omettre une famille dénombrable de types non isolés. On peut faire un peu mieux. Remarquons que si $p \in S_n(T)$ alors le singleton $\{p\}$ est un fermé de $S_n(T)$. De plus p est non isolé si et seulement si $\{p\}$ est d'intérieur vide. Soit pour chaque $n > 0$, une partie X_n de $S_n(T)$ qui est une réunion au plus dénombrable de fermés d'intérieur vide (c'est-à-dire une partie dite *maigre* de $S_n(T)$). Alors on peut montrer qu'il existe un modèle de T qui omet tous les types appartenant à $\bigcup_n X_n$.

8.5 Théories $\aleph_0$-catégoriques

Nous donnons dans cette partie une démonstration du théorème de Ryll-Nardzewski, Svenonius, Engeler caractérisant les théories $\aleph_0$-catégoriques en termes de types.

Lemme 8.21. *Soit T une théorie complète telle que tous les types de $S(T)$ sont isolés. Alors tout modèle de T est ω-saturé.*

Démonstration. Soit $\mathcal{M}$ un modèle de T et $\bar{a}$ un uple fini de M. Soit p un 1-type sur $\bar{a}$. Soit $\mathcal{N}$ une extension élémentaire réalisant p. Soit $b \in N$ tel que $p = \mathrm{tp}_N(b/\bar{a})$. Soit $\phi(x, \bar{y})$ isolant $\mathrm{tp}_N(b\bar{a})$. Alors la formule $\phi(x, \bar{a})$ isole p dans $S_1(\mathrm{Th}(\mathcal{M}, A))$. Comme $\mathcal{M}$ est sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$ il existe $d \in M$ tel que $\mathcal{M} \models \phi(d, \bar{a})$ mais alors d réalise p dans $\mathcal{M}$. □

Théorème 8.22 (Ryll-Nardzewski, Svenonius, Engeler)**.** *Soit T une théorie complète sur un langage L fini ou dénombrable. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *T est $\aleph_0$-catégorique.*
2. *Pour chaque $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)$, il n'y a qu'un nombre fini de formules inéquivalentes modulo T à n variables libres $\bar{x}$.*
3. *$S_n(T)$ est fini pour chaque $0 < n < \omega$.*

De plus tout modèle de T est ω-saturé.

Démonstration. 2 implique 3 est évident.

3 implique 2 et 1 : si $S_n(T) = \{p_1, \ldots, p_k\}$ alors chaque type p_i de $S_n(T)$ est isolé par une formule $\phi_i(\bar{x})$. Maintenant toute formule $\psi(\bar{x})$ est équivalente à une combinaison booléenne des ϕ_i déterminé par l'appartenance ou non de ψ à p_i pour chaque i.
De plus comme tout type de $S(T)$ est alors isolé alors d'après le lemme précédent tout modèle de T est ω-saturé et il n'y a donc qu'un seul modèle dénombrable à isomorphisme près.

1 implique 3 : supposons T $\aleph_0$-catégorique. Comme tout type peut être réalisé dans un (ici le) modèle dénombrable, par le théorème d'omission des types, tout type est isolé. Soit $n > 0$ et pour chaque $p \in S_n(T)$ une formule $\phi_p(\bar{x})$ isolant p. Si $S_n(T)$ est infini alors par compacité, l'ensemble $\{\neg\phi_p(\bar{x})\}$ serait consistant, c'est-à-dire il existerait un modèle $\mathcal{M}$ de T et $\bar{a} \in M^n$ tel que $\mathcal{M} \models \neg\phi_p(\bar{a})$ pour tout $p \in S_n(T)$. Mais alors le type $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a})$ ne pourrait être égal à aucun des $p \in S_n(T)$! □

Chapitre 9

Limtes de Fraïssé

Nous terminons ce cours par une introduction à la méthode d'amalgamation de Fraïssé. Il s'agit de construire à partir d'une classe dénombrable de structures finiment engendrées, une structure dénombrable contenant (via des plongements) toutes les structures de cette classe. Nous nous limiterons ici au cas où le langage est fini et relationnel et on obtiendra alors des théories $\aleph_0$-catégoriques.
On considère pour toute la suite un langage L fini constitué uniquement de relations et une classe non vide $\mathcal{K}$ de L-structures finies. On supposera la classe $\mathcal{K}$ close par isomorphismes. Notons tout d'abord que comme le langage est fini, il n'y a à isomorphisme près qu'un nombre dénombrable de L-structures finies. Donc la classe $\mathcal{K}$ ne contient à isomorphisme près qu'un nombre fini ou dénombrable de L-structures.

Définition 9.1. On dit que la classe $\mathcal{K}$ a

1. *la propriété d'hérédité* si pour tout $A \in \mathcal{K}$ et $B \subseteq A$ alors $B \in \mathcal{K}$,
2. *la propriété de plongement commun* si pour tout $A, B \in \mathcal{K}$ il existe $C \in \mathcal{K}$ tel que A et B se plongent dans C :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, dotted] & \\ & C \\ B \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

Théorème 9.2. *Soit L un langage relationnel fini et $\mathcal{K}$ une classe non vide de L-structures finies, close par isomorphismes. Alors $\mathcal{K}$ a les propriétés d'héridité et de plongement commun si et seulement s'il existe une L-structure finie ou dénombrable $\mathcal{M}$ telle que $\mathcal{K}$ est exactement la classe des L-structures finies qui se plongent dans $\mathcal{M}$.*

Démonstration. La réciproque est évidente (pour la propriété de plongement commun, il suffit de considérer l'union des deux structures plongées dans $\mathcal{M}$). Montrons l'implication : considérons une énumération $(A_i)_{i<\omega}$ (à isomorphisme près) de toutes les structures dans $\mathcal{K}$. On définit alors par récurrence une chaine $(B_i)_{i<\omega}$ de structures dans $\mathcal{K}$ de la façon suivante : on pose $B_0 = A_0$ et B_i étant choisi on considère en utilisant la propriété de plongement commun, $C \in \mathcal{K}$ tel que B_i et A_{i+1} se plongent dans C et on choisit pour B_{i+1} une copie isomorphe de C contenant B_i. On prend alors pour $\mathcal{M}$ l'union $\bigcup_{i<\omega} B_i$. Alors $\mathcal{M}$ est fini ou dénombrable et par construction toute structure dans $\mathcal{K}$ se plonge dans $\mathcal{M}$. De plus si A est une sous-structure finie $\mathcal{M}$ alors A est une sous-structure de l'un des B_i et donc par la propriété d'hérédité A est une sous-structure dans $\mathcal{K}$. □

Définition 9.3. On dit que la classe $\mathcal{K}$ a *la propriété d'amalgamation* si pour tout A, B, C dans $\mathcal{K}$ avec des plongements $e : A \to B$ et $f : A \to C$, alors il existe D dans $\mathcal{K}$ et des plongements $g : B \to D$ et $h : C \to D$ tels que $g \circ e = h \circ f$:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, dotted, "g"] & \\ A \arrow[ur, "e"] \arrow[dr, "f"'] & & D \\ & C \arrow[ur, dotted, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Exemple 9.4. La classe des ordres linéaires finis a les propriétés d'héridité, de plongement commun et d'amalgamation.

Notons que comme on suppose qu'une structure est toujours non-vide, a priori les propriétés d'amalgamation et d'hérédité n'impliquent pas celle de plongement commun.

Définition 9.5. On dit qu'une L-structure $\mathcal{M}$ est *ultrahomogène* si tout isomorphisme entre deux sous-structures finies[1] se prolonge en un automorphisme de $\mathcal{M}$.

Remarque. Dans le cas où $\mathcal{M}$ est finie ou dénombrable, il suffit de montrer que tout isomorphisme local f [2] est un ∞-isomorphisme pour conclure que $\mathcal{M}$ est ultrahomogène : en effet on peut alors par va-et-vient infini prolonger f en un automorphisme.

Exemple 9.6. La structure $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ est ultrahomogène. Plus généralement toute structure dénombrable et ω-saturée dont la théorie élimine les quanteurs est ultrahomogène.

Théorème 9.7 (Limite de Fraïssé)**.** *Soit L un langage relationnel fini et $\mathcal{K}$ une classe non vide de L-structures finies, close par isomorphismes, et qui a les propriétés d'hérédité, de plongement commun et d'amalgamation. Alors il existe une unique L-structure $\mathcal{M}$ à isomorphisme près, appelée* limite de Fraïssé *de $\mathcal{K}$, telle que*
– *$\mathcal{M}$ est finie ou dénombrable,*
– *$\mathcal{K}$ est exactement la classe des L-structures finies qui se plongent dans $\mathcal{M}$,*
– *$\mathcal{M}$ est ultrahomogène.*

[1] plus généralement finiment engendrées si on ne suppose pas que L est relationnel
[2] isomorphisme entre deux sous-structures finiment engendrées

Démonstration. Construisons une telle structure $\mathcal{M}$. Considérons pour cela une énumération à isomorphisme près $(A_i, B_i)_{i<\omega}$ de couples de structures dans $\mathcal{K}$ tels que $A_i \subseteq B_i$ avec $|B_i \setminus A_i| \leq 1$ (c.à.d. $B_i = A_i$ ou $B_i = A_i \cup \{b_i\}$). On construit alors par induction une chaine $(D_j)_{j<\omega}$ de structures dans $\mathcal{K}$ telle que pour chaque j, D_j contient A_j et pour tout i, tout plongement $f : A_i \to D_j$ se prolonge en un plongement $g : B_i \to D_{j+1}$:

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[d, "f"'] & \subseteq & B_i \arrow[d, dotted, "g"] \\ D_j & \subseteq & D_{j+1} \end{tikzcd}$$

Pour celà, on pose $D_0 = A_0$. Si D_j est construit, on choisit une énumération $(f_k, A_{i_k}, B_{i_k})_{k<l}$ des triplets (f, A, B) où f est un plongement de A dans D_j et (A, B) est l'un des couples (A_i, B_i) (il y a un nombre fini de tels triplets car D_j est fini et L est fini). En utilisant la propriété de plongement commun et l fois la propriété d'amalgamation, on construit D_{j+1} dans $\mathcal{K}$ contenant A_{j+1} et prolongeant chacun des f_k à B_{i_k}. Soit $\mathcal{M}$ l'union des D_j. Alors $\mathcal{M}$ est finie ou dénombrable, $\mathcal{M}$ contient chaque A_i qui est une énumération à isomorphisme près des structures de $\mathcal{K}$. Par propriété d'hérédité, toute sous-structure finie de $\mathcal{M}$ est dans $\mathcal{K}$. Enfin si $\sigma : A \to A'$ est un isomorphisme local et $b \in M$, alors on peut considérer $B' = A' \cup \{b'\}$ une L-structure isomorphe à $A \cup \{b\}$. Comme $A' \subseteq D_j$ pour un j, on peut supposer, par construction, que $b' \in D_{j+1} \subseteq M$. Ainsi on prolonge l'isomorphisme local σ en envoyant b sur b'. Il suit que tout isomorphisme local de $\mathcal{M}$ est un ∞-isomorphisme et donc que $\mathcal{M}$ est ultrahomogène car $\mathcal{M}$ est finie ou dénombrable.

Vérifions pour terminer l'unicité : soit $\mathcal{M}'$ ayant les mêmes propriétes que $\mathcal{M}$. Soit $\sigma : A \to A'$ un isomorphisme local de $\mathcal{M}$ vers $\mathcal{M}'$. Soit $b \in M$. Il existe une copie de $A \cup \{b\}$ dans $\mathcal{M}'$ (car toute structure dans $\mathcal{K}$ a une copie dans $\mathcal{M}'$). On a donc un isomorphisme local $\tau : A \cup \{b\} \to B'$ de $\mathcal{M}$ vers $\mathcal{M}'$. Mais alors par ultrahomogénéité de $\mathcal{M}'$, l'isomorphisme local $\tau \circ \sigma^{-1} : A' \to \tau(A)$ se prolonge en un automorphisme π de $\mathcal{M}'$ et $\pi^{-1} \circ \tau$ prolonge σ à b.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\sigma"'] & \subset & A \cup \{b\} \arrow[d, dotted, "\tau"] \\ A' \arrow[rr, dotted, "\tau\circ\sigma^{-1}"] \arrow[d, phantom, "\bigcap"] & & B' \arrow[d, phantom, "\bigcap"] \\ \mathcal{M}' \arrow[rr, dotted, "\pi"] & & \mathcal{M}' \end{tikzcd}$$

Les structures $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ sont donc ∞-isomorphes et comme elles sont finies ou dénombrables, elles sont isomorphes.

$\square$

Comme on a supposé L fini et relationnel, pour toute L-structure finie A et $\bar{a}$ une énumération de A il existe une formule $\phi_{\bar{a}}(\bar{x})$ caractérisant A à isomorphisme près (c'est-à-dire dans toute L-structure, tout uple $\bar{b}$ satisfait $\phi_{\bar{a}}$ si et seulement si l'application qui envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$ est un L-isomorphisme ; ou en d'autres termes $\phi_{\bar{a}}$ décrit le type de $\bar{a}$). Enfin pour chaque $n > 0$, notons $\theta_n(\bar{x})$ une formule qui est satisfaite par un n-uple $\bar{a}$ si et seulement si $\bar{a}$ décrit une L-structure finie dans $\mathcal{K}$ (une telle formule existe car il n'y a qu'un nombre fini à isomorphisme près de L-structures finies de taille n).

Théorème 9.8. *Soit L un langage relationnel fini et $\mathcal{K}$ une classe non vide de L-structures finies, close par isomorphismes, et qui a les propriétés d'hérédité, de plongement commun et d'amalgamation. Notons $\mathcal{M}$ la limite de Fraïssé de $\mathcal{K}$ et T la théorie de $\mathcal{M}$. Alors T est axiomatisée par :*

1. *$\forall \bar{x} \theta_n(\bar{x})$ pour chaque $n > 0$;*
2. *$\forall \bar{x} \phi_{\bar{a}}(\bar{x}) \to \exists y \phi_{\bar{a}b}(\bar{x}y)$ pour une énumération à isomorphismes près des couples de structures $(A, A \cup \{b\})$ de $\mathcal{K}$ décrites respectivement par des uples $\bar{a}$ et $\bar{a}b$.*

De plus, $\mathcal{M}$ est l'unique modèle fini ou dénombrable de T (c.à.d. T est $\aleph_0$-catégorique si $\mathcal{M}$ est infini) et T élimine les quanteurs.

Démonstration. La limite de Fraïssé de $\mathcal{K}$ satisfait le premier schéma d'axiomes car $\mathcal{K}$ est exactement la classe des L-structures finies qui se plongent dans $\mathcal{M}$. Par ailleurs par construction de la limite de Fraïssé de $\mathcal{K}$ (ou par ultrahomogénéité), pour tout couple de structures $(A, A \cup \{b\})$ de $\mathcal{K}$ décrites respectivement par des uples $\bar{a}$ et $\bar{a}b$ et tout $\bar{c} \in M$ satisfaisant $\phi_{\bar{a}}(\bar{x})$, l'application qui à $\bar{a}$ associe $\bar{c}$ est un plongement qui se prolonge à b et donc il existe $d \in M$ tel que $\mathcal{M} \models \phi_{\bar{a}b}(\bar{c}d)$.
Inversement, un modèle fini ou dénombrable des deux schémas d'axiomes ci-dessus vérifie les conditions du théorème précédent décrivant la limite de Fraïssé de $\mathcal{K}$. Par conséquent ceci donne une axiomatisation de T et si $\mathcal{M}$ est infini, par unicité de $\mathcal{M}$, la théorie T est $\aleph_0$-catégorique. Enfin par le second schéma d'axiomes, tout isomorphisme local entre des modèles de T est un ∞-isomorphisme donc T élimine les quanteurs. □

Exemple 9.9 (Le graphe aléatoire)**.** Rappelons qu'un graphe est un ensemble (de sommets) muni d'une relation binaire symétrique et irréflexive. Les paires d'éléments satisfaisant la relation sont appelés arêtes du graphe. Un graphe peut donc être vu comme une structure sur le langage $L = \{R\}$ où R est une relation binaire.
On considère $\mathcal{K}$ la classe de tous les graphes finis. On vérifie facilement que $\mathcal{K}$ vérifie les propriétés d'hérédité, de plongement commun et d'amalgamation. La limite de Fraïssé de $\mathcal{K}$ est connu sous le nom de *graphe aléatoire*. Par ce qui précède sa théorie est $\aleph_0$-catégorique, élimine les quantificateurs et est axiomtisée par le schéma d'axiomes suivant :

$$\forall x_1 \dots x_n \forall y_1 \dots y_k \left(\bigwedge_{i,j} x_i \neq y_j \right) \to \exists z \left(\bigwedge_i R(z, x_i) \wedge \bigwedge_j \neg R(z, y_j) \right)$$

pour tout $n, k \leq 1$.

En d'autres termes, le graphe aléatoire est l'unique graphe dénombrable G tel que pour tous sous-graphes finis disjoints A et B il existe un sommet de G qui a une arête avec chaque sommet de A mais aucune avec les sommets de B.
Enfin si on construit un graphe à partir d'un ensemble dénombrable de sommets en choisissant de manière indépendante et avec probabilité $1/2$ de mettre ou non une arête entre deux sommets on obtient avec probabilité 1 le graphe aléatoire ci-dessus. (Notons qu'on obtient le même résultat en remplaçant $1/2$ par une probabilité p pour $0 < p < 1$.)

Index

A-automorphisme, 33
∞-équivalence, 4
∞-isomorphisme, 26
élimination des quanteurs, 27
énoncé, 6
équivalence élémentaire, 9

automorphisme, 4

compacité, 17
consistant, 13

diagramme élémentaire, 15

ensemble définissable, 11
extension élémentaire, 14

famille Karpienne, 4
formule, 6
formule atomique, 6
formules prénexes, 9
fortement homogène, 36

isomorphisme, 4
isomorphisme partiel, 4

Löwenheim-Skolem, 22
langage, 1

modèle, 12
modèles ω-saturés, 35
Morley, 23
morphisme, 3

Omission des types, 36

satisfaction, 7
sous-structure, 2
structure, 1
structure κ saturée, 34

terme, 6
test de Tarski, 15
théorie, 13
théorie κ-catégorique, 23
théorie complète, 13
type, 26
type sans quanteurs, 25

ultraproduit, 19

va-et-vient infini, 4
variables libres, 6

Bibliographie

[Ho] W. Hodges. *A shorter Model Theory.* Cambridge, 1997.

[Po] B. Poizat. *Groupes stables.* Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, Villeurbanne, 1987.