Examen partiel du 23 octobre 2023 (durée: 2h30)

L'emploi de documents, calculatrices, etc. n'est pas autorisé. Le sujet comporte 4 *exercices indépendants. Lors de la correction la plus grande attention sera portée à la clarté de la rédaction.*

Dans les exercices 1 et 4 on considère des espaces vectoriels normés sur $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Exercice 1. On munit $\ell^1(\mathbf{N})$ de la norme $\|\cdot\|_1$, définie par $\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)|$.

1. On note $E = \{x \in \ell^1(\mathbf{N}) \colon \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n \geq N\ x(n) = 0\}$. Montrer que E est dense dans $\ell^1(\mathbf{N})$.

Pour $u \in \ell^\infty(\mathbf{N})$, on définit $T_u \colon \ell^1(\mathbf{N}) \to \mathbf{K}$ par

$$\forall v \in \ell^1(\mathbf{N}) \quad T_u(v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(n)v(n)$$

2. Montrer que pour tout $u \in \ell^\infty(\mathbf{N})$ la fonction T_u est bien définie, linéaire, et déterminer sa norme subordonnée.
3. Soit $\varphi \in \ell^1(\mathbf{N})'$. Pour $n \in \mathbf{N}$ on note e_n l'élément de $\ell^1(\mathbf{N})$ défini par $e_n(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

   Pour $n \in \mathbf{N}$ on pose $u(n) = \varphi(e_n)$.

   (a) Montrer que $u \in \ell^\infty(\mathbf{N})$ et que $T_u(v) = \varphi(v)$ pour tout $v \in E$.

   (b) Montrer que $T_u = \varphi$.
4. Montrer que l'application $u \mapsto T_u$ est une isométrie linéaire surjective de $\ell^\infty(\mathbf{N})$ sur $\ell^1(\mathbf{N})'$.

Exercice 2. Soit H un espace de Hilbert réel et $P \colon H \to H$ une application linéaire continue telle que $P \circ P = P$.

1. Montrer que $\operatorname{Im}(P)$ est fermé.
2. Montrer que P est une projection orthogonale si, et seulement si, $\ker(P) = \operatorname{Im}(P)^\perp$.
3. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

   (a) P est une projection orthogonale.

   (b) $\|P\| \leq 1$.

   (c) $\forall x \in H \quad \langle P(x), x\rangle \leq \|x\|^2$.

   Indication. Pour l'implication (c) $\Rightarrow$ (a), considérer pour $\varepsilon > 0$ $\langle P(x + \varepsilon y), x + \varepsilon y\rangle$ avec $x \in \operatorname{Im}(P)$ et $y \in \operatorname{Im}(P)^\perp$, afin d'établir que $\operatorname{Im}(P)^\perp \subseteq \ker(P)$.
4. Montrer que P est la projection orthogonale sur $\operatorname{Im}(P)$ si, et seulement si, $P^* = P$.

Exercice 3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On suppose que :

- Pour tout $x \in \mathbf{R}$ l'ensemble $\{f_n(x) \colon n \in \mathbf{N}\}$ est borné.
- La famille de fonctions $\{f_n \colon n \in \mathbf{N}\}$ est équicontinue.

Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une suite extraite qui converge uniformément sur les compacts vers une fonction continue $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Exercice 4. Dans cet exercice on fixe $p \in [1, +\infty[$ et on munit $\ell^p(\mathbf{N})$ de sa norme usuelle $\|\cdot\|_p$, définie par $\|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

On cherche à caractériser les parties compactes de $(\ell^p(\mathbf{N}), \|\cdot\|_p)$. Soit A une partie de $\ell^p(\mathbf{N})$.

1. Dans cette question on suppose que A, muni de la distance induite par $\|\cdot\|_p$, est précompact.
   (a) Montrer que A est borné.
   (b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $x \in A$ on ait $\sum_{k=N+1}^{+\infty} |x(k)|^p < \varepsilon$.
2. Réciproquement, supposons que A est borné et que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $x \in A$ on ait $\sum_{k=N+1}^{+\infty} |x(k)|^p < \varepsilon$.
   (a) On fixe $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbf{N}$. On note $\pi_N \colon \ell^p(\mathbf{N}) \to \mathbf{K}^{N+1}$ l'application définie par
   $$\pi_N(x) = (x(0), \ldots, x(N))$$
   Montrer que $\pi_N(A)$ est une partie précompacte de $(\mathbf{K}^{N+1}, \|\cdot\|_p)$.
   (b) Montrer que A est précompact dans $(\ell^p(\mathbf{N}), \|\cdot\|_p)$.
3. À l'aide des résultats des questions précédentes, énoncer une caractérisation des parties compactes de $(\ell^p(\mathbf{N}), \|\cdot\|_p)$.