DM 3, corrigé

Exercice 1 Notons tout d'abord qu'il y a au plus 2^{2^κ} filtres distincts sur X car tout filtre sur X est un élément de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$.

1. Soit $\mathcal{A}$ une famille libre de parties de X. Pour toute partie $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{A}$, considérons la famille $\mathcal{B}_\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(X)$ définie par
$$\mathcal{B}_\mathcal{Y} = \mathcal{Y} \cup \{X \setminus F \colon F \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{Y}\}.$$
Comme $\mathcal{A}$ est libre, $\mathcal{B}_\mathcal{Y}$ est une base de filtre. Choisisons pour chaque $\mathcal{Y}$, un ultrafiltre $\mathcal{U}_\mathcal{Y}$ contenant $\mathcal{B}_\mathcal{Y}$. Si $\mathcal{Y}_1$ et $\mathcal{Y}_2$ sont deux parties de $\mathcal{A}$ et si $F \in \mathcal{Y}_1 \setminus \mathcal{Y}_2$, alors $F \in \mathcal{B}_{Y_1}$ et $X \setminus F \in \mathcal{B}_{\mathcal{Y}_2}$, et donc les ultrafiltres $\mathcal{U}_{\mathcal{Y}_1}$ et $\mathcal{U}_{\mathcal{Y}_2}$ sont disctincts. Il y a donc au moins autant d'ultrafiltres sur X que de parties de $\mathcal{A}$, c'est à dire au moins $2^{|\mathcal{A}|}$ ultrafiltres distincts sur X.
2. Soit $\mathcal{P}_n(X)$ l'ensemble des parties finies de F à n éléments et $\mathcal{P}_f(X)$ l'ensemble des parties finies de X. Alors pour chaque n, $|X| \leq |\mathcal{P}_n(X)| \leq n|X| = \kappa$ et donc
$$|\mathcal{P}_f(X)| = \sum_n |\mathcal{P}_n(X)| = \aleph_0 \cdot \kappa = \kappa.$$
Pour chaque partie finie F de X, $\mathcal{P}(F)$ est également fini. Alors pour tout n, il y a un nombre fini de suites de longueur n de parties de F et donc par union dénombrable, il y a un nombre dénombrable de suites finies de parties de F.
Ainsi $|Y| = |\mathcal{P}_f(X)| \cdot \aleph_0 = \kappa$.
3. Soient $A'_1, \ldots, A'_m$, $B'_1, \ldots, B'_m$ des éléments deux à deux distincts de $\{A' \colon A \subseteq X\}$. Alors les élements de $\mathcal{P}(X)$ correspondants $A_1, \ldots, A_m$, $B_1, \ldots, B_m$ sont également deux à deux distincts. Comme ils sont en nombre fini, il existe une partie finie F de X témoignant de ce fait, c'est-à-dire telle que $A_1 \cap F, \ldots, A_m \cap F$, $B_1 \cap F, \ldots, B_m \cap F$ sont deux à deux distincts. Il suit que l'élément
$$(F, (A_1 \cap F, \ldots, A_m \cap F)) \in A'_1 \cap \ldots \cap A'_m \cap ((X \sqcup Y) \setminus B'_1) \cap \ldots \cap ((X \sqcup Y) \setminus B'_m).$$
4. L'ensemble $X \sqcup Y$ est de cardinal κ d'après 2. Il existe une famille libre de parties de $X \sqcup Y$ de cardinal $2^\kappa = |\mathcal{P}(X)|$ d'après 3. Par 1, il existe 2^{2^κ} ultrafiltres distincts sur $X \sqcup Y$. On a donc montré que sur un ensemble de cardinal κ (ici $X \sqcup Y$) il existe 2^{2^κ} ultrafiltres distincts, mais c'est alors vrai sur tout ensemble de cardinal κ car si deux ensembles sont équipotents, les ensembles d'ultrafiltres sur ceux-ci le sont également.

Exercice 2

1. $0_A = (0_{A_j}) \in \mathcal{I}$. Soit $(a_j), (b_j) \in \mathcal{I}$. Alors
$$\{j \in J \colon a_j + b_j = 0_{A_j}\} \supseteq \{j \in J \colon a_j = 0_{A_j}\} \cap \{j \in J \colon b_j = 0_{A_j}\}$$
et donc
$$\{j \in J \colon a_j + b_j = 0_{A_j}\} \in \mathcal{U}$$
car $\mathcal{U}$ est un filtre. Donc $(a_j) + (b_j) \in \mathcal{U}$. De manière évidente $-(a_j) \in \mathcal{U}$. Enfin si $(c_j) \in A$ alors
$$\{j \in J \colon c_j \cdot a_j = 0_{A_j}\} \supseteq \{j \in J \colon a_j = 0_{A_j}\}$$
et donc $(c_j)(a_j) \in \mathcal{I}$. De même $(a_j)(c_j) \in \mathcal{I}$. On a donc vérifié que $\mathcal{I}$ est un idéal bilatère.

2. Rappelons qu'un filtre principal est de la forme $\mathcal{F}_S = \{X \subseteq J \colon X \supseteq S\}$ pour une partie non vide S de J. Remarquons que si $\mathcal{F}_S$ est un ultrafiltre alors S est une partie réduite à un point. En effet si $j_0 \in S$ alors $\mathcal{F}_{j_0} \supseteq \mathcal{F}_S$ et par maximalité d'un ultrafiltre on a égalité.

   Supposons donc que $\mathcal{U} = \mathcal{F}_{j_0} = \{X \subseteq J \colon j_0 \in X\}$ pour un $j_0 \in J$. Alors $(a_j) \in \mathcal{I}$ si et seulement si $(a_{j_0}) = 0_{A_j}$. On a donc B isomorphe à A_{j_0}.
3. Soit n un entier tel que $C = \{j \in J \colon |A_j| \geq n\} \in \mathcal{U}$. Pour chaque j tel que $|A_j| \geq n$, choisissons n éléments distincts $x_{1,j}, \ldots, x_{n,j}$ de A_j. Pour les autres j, posons $x_{1,j} = \ldots = x_{n,j} = 0_{A_j}$. Notons $x_1, \ldots, x_n$ les éléments $(x_{1,j}), \ldots, (x_{n,j})$. Mais alors pour tout $k \neq l$, $x_k - x_l \notin \mathcal{I}$ car $\{j \in J \colon x_{k,j} - x_{l,j} = 0_{A_j}\} = X \setminus C$. Les classes de $x_1, \ldots, x_n$ sont donc n éléments distincts de B.
4. Comme $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre non principal, il contient le filtre de Fréchet, c'est-à-dire tous les complémentaires des parties finies de J [1]. On conclut en utilisant la question précédente.
5. On doit montrer que tout élément non nul de B est inversible pour la multiplication. Soit x un élément non nul. Alors x est la classe de (a_j) tel que $(a_j) \notin \mathcal{I}$. Soit (b_j) tel que $a_j b_j = 1_{A_j}$ si $a_j \neq 0_{A_j}$, $b_j = 0_{A_j}$ sinon. Comme $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre et $(a_j) \notin \mathcal{I}$,

$$\{j \in J \colon a_j b_j = 1_{A_j}\} = J \setminus \{j \in J \colon a_j = 0_{A_j}\} \in \mathcal{U}.$$

   On a donc $xy = 1_B$ pour y la classe de (b_j).
6. Soit k un entier non nul. Notons que 1_{K_1} est la classe de $(1_{\mathbb{F}_p})_{p \in \mathcal{P}}$ et comme $k \cdot 1_{K_1} = \underbrace{1_{K_1} + \cdots + 1_{K_1}}_{k}$, le nombre $k \cdot 1_{K_1}$ est la classe de $(k \cdot 1_{\mathbb{F}_p})_{p \in \mathcal{P}}$. Alors comme $\{p \in \mathcal{P} \colon k \cdot 1_{\mathbb{F}_p} = 0_{\mathbb{F}_p}\}$ est fini et comme $\mathcal{U}_1$ est un ultrafiltre non principal, $\{p \in \mathcal{P} \colon k \cdot 1_{\mathbb{F}_p} = 0_{\mathbb{F}_p}\} \notin \mathcal{U}_1$. D'où $k \cdot 1_{K_1} \neq 0_{K_1}$.
7. On considère plus exactement un ultrafiltre $\mathcal{U}_2$ sur $\mathbb{N}^*$.

   Pour tout $n > 0$, $\mathbb{F}_{p^n}$ est de caractéristique p, donc $\{n \in \mathbb{N}^* \colon p \cdot 1_{\mathbb{F}_{p^n}} = 0_{\mathbb{F}_{p^n}}\} = \mathbb{N}^* \in \mathcal{U}_2$. Donc $p \cdot 1_{K_2} = 0_{K_2}$.

   Soit $x \in K_2$. Alors x est la classe de (a_n) où chaque $a_n \in \mathbb{F}_{p^n}$. Soit $(b_n) = (a_n^{p^{n-1}})$. Alors pour tout $n > 0$, $b_n^p = a_n^{p^n} = a_n$. Donc si on pose y la classe de (b_n) dans K_2 alors $y^p = x$.

   Pour la dernière question, l'énoncé est inexact ; le fait qu'un polynôme irréductible $P \in \mathbb{F}_p[X]$ de degré $m > 0$ ait une racine dans K_2 dépend du choix de l'ultrafiltre $\mathcal{U}_2$. En effet un tel polynôme P a une racine dans $\mathbb{F}_{p^n}$ si et seulement si $\mathbb{F}_{p^m} \subseteq \mathbb{F}_{p^n}$ (car une telle racine engendre l'unique extension $\mathbb{F}_{p^m}$ de degré m sur $\mathbb{F}_p$). Donc P a une racine dans $\mathbb{F}_{p^n}$ si et seulement si m divise n. Il suit facilement que P a une racine dans l'ultraproduit K_2 si et seulement si $m\mathbb{N}^* = \{mk \colon k \in \mathbb{N}^*\} \in \mathcal{U}_2$.

   L'énoncé est donc vérifié si et seulement si $\mathcal{U}_2$ contient l'ensemble des parties $m\mathbb{N}^*$ pour m parcourant $\mathbb{N}^*$. Un tel ultrafiltre non principal existe car, si $\mathcal{F}$ désigne le filtre de Fréchet, on vérifie que $\mathcal{F} \cup \{m\mathbb{N}^* \colon m \in \mathbb{N}^*\}$ est une base de filtre.

   Remarquons également qu'il existe des ultrafiltres non principaux ne vérifiant pas cette propriété, il suffit pour cela de choisir un entier $m_0 > 0$ et de vérifier que $\mathcal{F} \cup \{\mathbb{N}^* \setminus m_0\mathbb{N}^*\}$ est également une base de filtre.

---

[1] Rappelons que le filtre de Fréchet est le filtre

$$\mathcal{F} = \{X \subseteq J \colon \text{ le complémentaire de } X \text{ est fini}\}.$$

Notons par ailleurs que si $X = X_1 \cup X_2$ est un élément d'un ultrafiltre U alors X_1 ou X_2 est dans $\mathcal{U}$; En effet ou bien $X_1 \in \mathcal{U}$ ou bien $(J \setminus X_1) \in \mathcal{U}$ et alors $X_2 = (J \setminus X_1) \cap X$ est dans $\mathcal{U}$. Donc si un ultrafiltre $\mathcal{U}$ contient une partie finie $X = \{j_1, \ldots, j_n\}$ alors il contient l'un des singletons $\{j_i\}$ et alors $\mathcal{U} = \mathcal{F}_{j_i}$. Par conséquent un ultrafiltre non principal contient le filtre de Fréchet.