Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre de printemps 2024-2025**
Master mathématiques et applications | Analyse Fonctionnelle 2

Contrôle partiel du 10 mars 2025 (durée 2h)

L'emploi de documents, calculatrices, etc. n'est pas autorisé. Lors de la correction une grande attention sera portée à la qualité de la rédaction. Le sujet comporte 4 exercices indépendants.

Dans ce sujet on ne considère que des R-espaces vectoriels.

Exercice 1. Soit X un espace de Banach, et B une partie de X convexe, fermée, symétrique, qui contient 0 et telle que pour tout $x \in X$ il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tel que $x \in \lambda B$.

1. Soit $\lambda, \mu \in \mathbf{R}_+$ tels que $\lambda \leq \mu$. Montrer que $\lambda B \subseteq \mu B$.
2. Montrer que 0 appartient à l'intérieur de B.

Exercice 2. Soit X un espace de Banach et Y un sous-espace vectoriel fermé de X. Soit $x \in X \setminus Y$. Montrer qu'il existe $f \in X^*$ avec les propriétés suivantes :

- $f(y) = 0$ pour tout $y \in Y$.
- $f(x) = 1$.
- $\|f\| = \dfrac{1}{d(x, Y)}$.

Exercice 3. Soit X, Y deux espaces de Banach.

1. Soit $T \colon X \to Y$ une application linéaire. Montrer que T est continue si, et seulement si, $\varphi \circ T$ est continue pour tout $\varphi \in Y^*$.
   Indication : on pourra essayer d'appliquer le théorème du graphe fermé.
2. Soit $F \colon X \to Y$ une fonction.
   (a) On suppose que F est lipschitzienne. Montrer que $\varphi \circ F$ est lipschitzienne pour tout $\varphi \in Y^*$.
   (b) On souhaite établir la réciproque de l'énoncé précédent ; on suppose que $\varphi \circ F$ est lipschitzienne pour tout $\varphi \in Y^*$.
      i. Pour $x_1 \neq x_2 \in X$ on considère l'application $T_{x_1,x_2} \colon Y^* \to \mathbf{R}$, définie par
      $$T_{x_1,x_2}(\varphi) = \frac{\varphi \circ F(x_1) - \varphi \circ F(x_2)}{\|x_1 - x_2\|} .$$
      Montrer que pour tout $\varphi \in Y^*$ l'ensemble $\{T_{x_1,x_2}(\varphi) \colon x_1 \neq x_2 \in X\}$ est borné dans $\mathbf{R}$.
      ii. Montrer qu'il existe une constante M telle que pour tout $x_1, x_2 \in X$ et tout $\varphi \in Y^*$ on ait
      $$|\varphi \circ F(x_1) - \varphi \circ F(x_2)| \leq M\|\varphi\|\|x_1 - x_2\|.$$
      iii. Conclure.

Exercice 4.

1. Soit X un espace vectoriel normé, et Y un sous-espace vectoriel fermé. On considère l'espace quotient X/Y, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence sur X pour la relation d'équivalence $\sim$ telle que $x_1 \sim x_2$ ssi $x_1 - x_2 \in Y$; on note $[x] = x + Y$ la classe d'équivalence de x. On rappelle que, par définition, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et tout $x_1, x_2 \in X$ on a
$$\lambda[x_1] + [x_2] = [\lambda x_1 + x_2] \ .$$
On note $\pi \colon x \to [x]$ l'application quotient, qui est linéaire.
On pose
$$\left\| [x] \right\| = \inf\{\|x + y\| \colon y \in Y\}$$
   (a) Montrer que $\| \cdot \|$ est une norme sur X/Y, et que π est continue.
   (b) On suppose que X est un espace de Banach. Soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite dans X/Y telle que $\sum \|z_n\|$ converge. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans X telle que $\pi(x_n) = z_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $\sum \|x_n\|$ converge.
   (c) Montrer que $(X/Y, \| \cdot \|)$ est un espace de Banach.
2. Soit E, F deux espaces de Banach et $T \colon E \to F$ une application linéaire continue et surjective. On considère l'espace quotient $X = E/\ker(T)$, muni de la norme quotient définie à la question précédente. Comme précédemment on note $[e] = e + \ker(T)$ la classe d'équivalence de $e \in E$, et $\pi(e) = [e]$.
   (a) Montrer qu'il existe une unique application linéaire continue $\tilde{T} \colon X \to F$ telle que
$$\forall e \in E \quad \tilde{T}(\pi(e)) = T(e) \ .$$
   (b) Montrer que $\tilde{T}$ est bijective et que son inverse est continu.