
Contrôle partiel du 10 mars 2025: éléments de correction

Dans ce sujet on ne considère que des R-espaces vectoriels.

Exercice 1. *Soit X un espace de Banach, et B une partie de X convexe, fermée, symétrique, qui contient 0 et telle que pour tout $x \in X$ il existe $\lambda \in \boldsymbol{R}_+$ tel que $x \in \lambda B$.*

1. *Soit $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}_+$ tels que $\lambda \leq \mu$. Montrer que $\lambda B \subseteq \mu B$.*
   Soit $x \in \lambda B$; soit $b \in B$ tel que $x = \lambda b$. Comme $\lambda \leq \mu$ on peut écrire $\lambda = t\mu$ avec $t \in [0,1]$. On a alors
   $$x = t\mu b = \mu(tb + (1-t)0)$$
   Comme B est convexe et contient 0 et b, on vient d'écrire $x = \mu b'$ avec $b' = tb \in B$. Ceci prouve que $x \in \mu B$ et établit donc l'inclusion $\lambda B \subseteq \mu B$.
2. *Montrer que 0 appartient à l'intérieur de B.*
   En appliquant l'hypothèse, on obtient $X = \bigcup_{\lambda \in \mathbf{R}_+} \lambda B$. À l'aide du résultat de la question précédente, on en déduit que $X = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} nB$. Puisque chaque nB est fermé, et X est un espace de Banach, le théorème de Baire nous assure qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que nB est d'intérieur non vide. Donc B est également d'intérieur non vide.
   Soit $x \in B$ et $r > 0$ tels que $B(x,r) \subseteq B$. Pour tout $y \in X$ tel que $\|y\| < r$ on a
   $$y = \frac{(x+y) + (y-x)}{2} \in B$$
   En effet, $\|x + y - x\| = \|y\| < r$ donc $x + y \in B$; de même $x - y \in B$ donc $y - x \in B$ puisque B est symétrique. Donc y appartient à B puisque c'est le milieu de deux éléments de B et B est convexe. On vient de prouver que $B(0,r) \subseteq B$, ce qui conclut.

Exercice 2. *Soit X un espace de Banach et Y un sous-espace vectoriel fermé de X. Soit $x \in X \setminus Y$. Montrer qu'il existe $f \in X^*$ avec les propriétés suivantes :*

- *$f(y) = 0$ pour tout $y \in Y$.*
- *$f(x) = 1$.*
- *$\|f\| = \dfrac{1}{d(x,Y)}$.*

Puisque $x \notin Y$, on peut définir une application linéaire $f \colon Y \oplus \mathbf{R}x \to \mathbf{R}$ en posant $f(y) = 0$ pour tout $y \in Y$ et $f(x) = 1$. Pour montrer que f est continue et calculer sa norme on écrit

$$\begin{aligned}
\sup\left\{\frac{|f(y+\lambda x)|}{\|y+\lambda x\|} : y \in Y\ , \lambda \in \mathbf{R},\, y + \lambda x \neq 0\right\} &= \sup\left\{\frac{|\lambda|}{\|y+\lambda x\|} : y \in Y\ , \lambda \in \mathbf{R}^*\right\} \\
&= \sup\left\{\frac{1}{\|\frac{1}{\lambda}y + x\|} : y \in Y\ , \lambda \in \mathbf{R}^*\right\} \\
&= \sup\left\{\frac{1}{\|y'+x\|} : y' \in Y\right\} \\
&= \frac{1}{\inf\{\|y+x\| : y \in Y\}} \\
&= \frac{1}{d(x,Y)}
\end{aligned}$$

À partir de la deuxième équation ci-dessus on n'a considéré que $\lambda \neq 0$, parce que pour $\lambda = 0$ et $y \in Y$ on a $f(y + \lambda x) = 0$ (et on ne divise pas par 0 parce que $\lambda x \notin Y$ dès que $\lambda \neq 0$).
On vient de montrer que f est continue, et que $\|f\| = \dfrac{1}{d(x,Y)}$; pour conclure, il ne nous reste qu'à appliquer le théorème de Hahn–Banach pour obtenir une application $f \in X^*$ satisfaisant les conditions de l'énoncé.

<u>Exercice 3.</u> *Soit X, Y deux espaces de Banach.*

1. *Soit $T \colon X \to Y$ une application linéaire. Montrer que T est continue si, et seulement si, $\varphi \circ T$ est continue pour tout $\varphi \in Y^*$.*
   Comme suggéré par l'énoncé, on va appliquer le théorème du graphe fermé, ce qui est licite puisque que X et Y sont des espaces de Banach. Considérons donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $(x_n)_n$ converge vers $x \in X$ et $(T(x_n))_n$ converge vers $y \in Y$.
   Pour tout $\varphi \in Y^*$ on a que $(\varphi(T(x_n)))_n$ converge vers $\varphi(y)$; puisque $\varphi \circ T$ est continue et $(x_n)_n$ converge vers x, on conclut que $\varphi(y) = \varphi \circ T(x) = \varphi(T(x))$.
   On sait donc que $\varphi(y) = \varphi(T(x))$ pour tout $\varphi \in Y^*$; d'après un corollaire du théorème de Hahn–Banach vu en cours (ou en appliquant le résultat de l'exercice précédent !), cela n'est possible que si $y = T(x)$. Toutes les hypothèses du théorème du graphe fermé sont donc satisfaites : T est continue.
2. *Soit $F \colon X \to Y$ une fonction.*
   (a) *On suppose que F est lipschitzienne. Montrer que $\varphi \circ F$ est lipschitzienne pour tout $\varphi \in Y^*$.*
   Soit K tel que $\|F(x) - F(x')\| \leq M\|x - x'\|$ pour tout $x, x' \in X$. Pour $\varphi \in Y^*$ on a
   $$|\varphi \circ F(x) - \varphi \circ F(x')| \leq \|\varphi\|\|F(x) - F(x')\| \leq M\|\varphi\|\|x - x'\|$$
   On vient de prouver que $\varphi \circ F$ est lipschitzienne.
   (b) *On souhaite établir la réciproque de l'énoncé précédent ; on suppose que $\varphi \circ F$ est lipschitzienne pour tout $\varphi \in Y^*$.*
      i. *Pour $x_1 \neq x_2 \in X$ on considère l'application $T_{x_1,x_2} \colon Y^* \to \boldsymbol{R}$, définie par*
      $$T_{x_1,x_2}(\varphi) = \frac{\varphi \circ F(x_1) - \varphi \circ F(x_2)}{\|x_1 - x_2\|} .$$
      Montrer que pour tout $\varphi \in Y^*$ l'ensemble $\{T_{x_1,x_2}(\varphi) \colon x_1 \neq x_2 \in X\}$ est borné dans $\boldsymbol{R}$.
      Soit $\varphi \in Y^*$. Puisque $\varphi \circ F$ est lipschitzienne, il existe K tel que
      $$\forall x_1, x_2 \in X \quad |\varphi \circ F(x_1) - \varphi \circ F(x_2)| \leq K\|x_1 - x_2\| .$$
      On en conclut que $\{T_{x_1,x_2}(\varphi) \colon x_1 \neq x_2 \in X\}$ est contenu dans $[-K, K]$.
      ii. *Montrer qu'il existe une constante M telle que pour tout $x_1, x_2 \in X$ et tout $\varphi \in Y^*$ on ait*
      $$|\varphi \circ F(x_1) - \varphi \circ F(x_2)| \leq M\|\varphi\|\|x_1 - x_2\|.$$
      Chaque application T_{x_1,x_2} est une application linéaire continue de Y^* dans $\mathbf{R}$. De plus Y^* est complet, comme tout espace dual ; et on vient d'établir à la question précédente que $\{T_{x_1,x_2} \colon x_1 \neq x_2 \in X\}$ est ponctuellement borné.
      On peut donc appliquer le théorème de Banach–Steinhaus pour obtenir qu'il existe $M \in \mathbf{R}_+$ tel que $\|T_{x_1,x_2}\| \leq M$ pour tout $x_1 \neq x_2 \in X$, ce qui correspond à l'inégalité attendue par l'énoncé.
      iii. *Conclure.*
      Fixons une constante M comme à la question précédente ; en utilisant le fait (conséquence du théorème de Hahn–Banach) que, pour tout $y \in Y$, on a
      $$\|y\| = \sup\{|\varphi(y)| \colon \varphi \in B_{Y^*}\}$$

on obtient que

$$\forall x_1 \neq x_2 \in X \ \|F(x_1) - F(x_2)\| \leq M\|x_1 - x_2\|$$

Cette inégalité est bien sûr vraie aussi quand $x_1 = x_2$, et on vient d'établir que F est M-lipschitzienne.

Exercice 4.

1. *Soit X un espace vectoriel normé, et Y un sous-espace vectoriel fermé. On considère l'espace quotient X/Y, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence sur X pour la relation d'équivalence $\sim$ telle que $x_1 \sim x_2$ ssi $x_1 - x_2 \in Y$; on note $[x] = x + Y$ la classe d'équivalence de x. On rappelle que, par définition, pour tout $\lambda \in \boldsymbol{R}$ et tout $x_1, x_2 \in X$ on a*

$$\lambda[x_1] + [x_2] = [\lambda x_1 + x_2] \ .$$

On note $\pi \colon x \to [x]$ l'application quotient, qui est linéaire.
On pose

$$\Big\|[x]\Big\| = \inf\{\|x + y\| \colon y \in Y\}$$

   (a) *Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur X/Y, et que π est continue.*
   On a $\|0\| = \|[0]\| = 0$ puisque $0 \in Y$. Réciproquement, si $\|[x]\| = 0$ alors il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}} \in Y$ telle que $\|x + y_n\|$ tend vers 0 ; autrement dit $(-y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers x, donc $x \in Y$ puisque $-y_n \in Y$ pour tout n et Y est fermé. Par conséquent si $\|[x]\| = 0$ alors $x \in Y$, ou encore $[x] = 0$. On vient d'établir la propriété de séparation.
   Pour $\lambda \in \mathbf{R}^*$ et $A \subseteq \mathbf{R}$ on a $\inf\{|\lambda| a \colon a \in A\} = |\lambda| \inf A$, et on en déduit (en utilisant que $\lambda Y = Y$ si $\lambda \neq 0$) que $\|\lambda[x]\| = |\lambda|\|[x]\|$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^*$. Cette égalité est vraie aussi pour $\lambda = 0$.
   Soit $x_1, x_2 \in X$, et $\varepsilon > 0$. Par définition d'une borne inférieure, il existe $y_1, y_2 \in Y$ tels que $\|x_1 + y_1\| \leq \|[x_1]\| + \varepsilon$ et $\|x_2 + y_2\| \leq \|[x_2]\| + \varepsilon$. Il s'ensuit que

$$\|x_1 + x_2 + y_1 + y_2\| \leq \|[x_1]\| + \|[x_2]\| + 2\varepsilon \ .$$

   Comme $y_1 + y_2 \in Y$, et $\varepsilon > 0$ est quelconque, on en conclut que $\|[x_1 + x_2]\| \leq \|[x_1]\| + \|[x_2]\|$. On vient d'établir que $\|\cdot\|$ satisfait l'inégalité triangulaire.
   Par définition de la norme quotient on a $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in X$ (parce que $0 \in Y$) et π est linéaire par définition, donc elle est continue.

   (b) *On suppose que X est un espace de Banach. Soit $(z_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ une suite dans X/Y telle que $\sum \|z_n\|$ converge. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ dans X telle que $\pi(x_n) = z_n$ pour tout $n \in \boldsymbol{N}$ et $\sum \|x_n\|$ converge.*
   Pour tout $n \in \mathbf{N}$ il existe $u_n \in X$ tel que $z_n = \pi(u_n)$. Par définition d'une borne inférieure, pour tout $n \in \mathbf{N}$ on peut trouver $y_n \in Y$ tel que $\|u_n + y_n\| \leq \|z_n\| + 2^{-n}$. Posons $x_n = u_n + y_n$. Alors $\pi(x_n) = \pi(u_n) = z_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, et $\|x_n\| \leq \|z_n\| + 2^{-n}$ donc $\sum \|x_n\|$ converge.

   (c) *Montrer que $(X/Y, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.*
   Soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X/Y telle que $\sum \|z_n\|$ converge. D'après le résultat qu'on vient d'établir, on peut trouver $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $\pi(x_n) = z_n$ pour tout n et $\sum \|x_n\|$ soit convergente.
   Comme X est complet, on sait que $\sum x_n$ est convergente ; comme π est linéaire et continue cela entraîne que $\sum \pi(x_n) = \sum z_n$ est convergente. Cela prouve que X/Y, muni de la norme quotient, est un espace de Banach.

2. *Soit E, F deux espaces de Banach et $T \colon E \to F$ une application linéaire continue et surjective. On considère l'espace quotient $X = E/\ker(T)$, muni de la norme quotient définie à la question précédente. Comme précédemment on note $[e] = e + \ker(T)$ la classe d'équivalence de $e \in E$, et $\pi(e) = [e]$.*

(a) *Montrer qu'il existe une unique application linéaire continue* $\tilde{T} \colon X \to F$ *telle que*

$$\forall e \in E \quad \tilde{T}(\pi(e)) = T(e) \ .$$

Par définition, $\pi(e_1) = \pi(e_2)$ si, et seulement si, $e_1 - e_2 \in \ker(T)$, autrement dit si, et seulement si, $T(e_1) = T(e_2)$. On peut donc bien poser $\tilde{T}(\pi(e)) = T(e)$ pour tout $e \in E$; reste à montrer que $\tilde{T}$ est linéaire et continue.

À nouveau, la linéarité est claire : soit $x_1, x_2 \in X$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors il existe $e_1, e_2 \in E$ tel que $x_1 = \pi(e_1)$, $x_2 = \pi(e_2)$ donc $\lambda x_1 + x_2 = \pi(\lambda e_1 + e_2)$ et

$$\tilde{T}(\lambda x_1 + x_2) = T(\lambda e_1 + e_2) = \lambda T(e_1) + T(e_2) = \lambda \tilde{T}(x_1) + \tilde{T}(x_2) \ .$$

Pour vérifier la continuité de $\tilde{T}$, notons que $\|T(e)\| \leq \|T\| \|e\|$ pour tout $e \in E$; par conséquent $\|\tilde{T}(x)\| \leq \|T\| \|e\|$ pour tout e tel que $\pi(e) = x$. Puisque $\|x\| = \inf\{\|e\| \colon \pi(e) = x\}$ on obtient $\|\tilde{T}(x)\| \leq \|T\| \|x\|$. Comme $\tilde{T}$ est linéaire, cela établit sa linéarité.

(b) *Montrer que* $\tilde{T}$ *est bijective et que son inverse est continu.*

Soit $f \in F$. Puisque T est surjective, il existe $e \in E$ tel que $T(e) = f$, donc $\tilde{T}(\pi(e)) = f$. Ceci prouve que $\tilde{T}$ est surjective.

Soit $x \in \ker(\tilde{T})$; soit e tel que $\pi(e) = x$. Alors $\tilde{T}(x) = 0 = T(e)$ donc $e \in \ker(T)$, d'où $x = \pi(e) = 0$. Donc $\tilde{T}$ est injective.

Finalement, $\tilde{T}$ est une bijection linéaire continue de X sur F ; comme X et F sont tous les deux des espaces de Banach, on peut appliquer le théorème d'isomorphisme de Banach pour conclure que l'inverse de $\tilde{T}$ est continu.