

Contrôle partiel du 3 mars 2026 (durée 2h30)

L'emploi de documents, calculatrices, etc. n'est pas autorisé. Lors de la correction une grande attention sera portée à la qualité de la rédaction. Le sujet comporte 4 exercices indépendants.

Dans ce sujet on ne considère que des $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels.

Exercice 1. Soit X, Y deux espaces de Banach, et $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'applications linéaires continues de X vers Y . On suppose que, pour tout $x \in X$, la suite $(T_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers une limite que l'on note $T(x)$.

Montrer que T est linéaire et continue.

Exercice 2. Dans cet exercice, on note E l'espace $\mathcal{C}^0([0, 1])$ des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$. On voit E comme un sous-espace vectoriel de $L^2([0, 1])$.

Soit $T: (L^2([0, 1]), \|\cdot\|_2) \rightarrow (L^2([0, 1]), \|\cdot\|_2)$ une application linéaire continue. On suppose que pour tout $f \in E$ on a $T(f) \in E$.

À l'aide du théorème du graphe fermé, montrer que $T: (E, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (E, \|\cdot\|_\infty)$ est continue.

Exercice 3. Soit X, Y deux espaces de Banach. Dans tout l'exercice T est une application linéaire continue de X vers Y .

Pour $\varphi \in Y^*$, on pose $T^*(\varphi) = \varphi \circ T$. On définit ainsi une application linéaire $T^*: Y^* \rightarrow X^*$.

1. Montrer que $T^*: Y^* \rightarrow X^*$ est continue et que $\|T^*\| \leq \|T\|$.
2. Soit $x \in X \setminus \{0\}$. À l'aide du théorème de Hahn–Banach, montrer qu'il existe une forme linéaire φ de norme 1 telle que $\varphi(T(x)) = \|T(x)\|$, et utiliser cela pour montrer que $\|T^*\| = \|T\|$.
3. Soit $S: Y \rightarrow X$ une application linéaire continue. Montrer que $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$.
4. On suppose que $T: X \rightarrow Y$ est une bijection linéaire continue. Montrer que $T^*: Y^* \rightarrow X^*$ est une bijection linéaire continue.
5. Réciproquement, supposons que $T^*: Y^* \rightarrow X^*$ est une bijection linéaire continue.
 - (a) Montrer que l'image de T est dense dans Y (on pourra envisager d'utiliser le théorème de Hahn–Banach pour montrer que si $\overline{\text{Im}(T)} \neq Y$ alors T^* n'est pas injective).
 - (b) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $\varphi \in X^*$ on ait

$$(\|\varphi\| \leq r) \Rightarrow (\exists \psi \in Y^*, \|\psi\| \leq 1 \text{ et } T^*(\psi) = \varphi).$$

On fixe un tel r .

- (c) Montrer que pour tout $x \in X$ on a $\|T(x)\| \geq r\|x\|$.
- (d) Prouver que T est bijective.

Exercice 4. On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbf{R})$. Pour $f, g \in E$ on pose

$$d(f, g) = \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-i} \min(1, \|f^{(i)} - g^{(i)}\|_\infty).$$

(On rappelle que $f^{(0)} = f$, et que pour tout $i \geq 1$ $f^{(i)}$ désigne la dérivée i -ème de f)

1. Montrer que d est une distance sur E , et qu'une suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers f dans (E, d) si, et seulement si, pour tout $i \in \mathbf{N}$ la suite $(f_n^{(i)})_n$ converge uniformément vers $f^{(i)}$ sur $[0, 1]$.
2. Montrer que (E, d) est complet.

Pour $x \in]0, 1[$ et $f \in E$ on dit que f est *analytique sur un voisinage de x* s'il existe un intervalle ouvert I centré en x sur lequel f est égale à la somme de sa série de Taylor en x . On rappelle qu'alors f est analytique sur un voisinage de y pour tout $y \in I$, et qu'on a

$$\sup_{k \in \mathbf{N}} \left| \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \right|^{1/k} < +\infty.$$

Pour $a \in]0, 1[$ et $N \in \mathbf{N}$ on note

$$T(a, N) = \left\{ f \in E : \forall k \in \mathbf{N} \ |f^{(k)}(a)| \leq k! N^k \right\}.$$

3. Montrer que chaque $T(a, N)$ est fermé dans E .
4. On admet dans un premier temps que chaque $T(a, N)$ est d'intérieur vide. Montrer qu'il existe des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$ qui ne sont analytiques au voisinage d'aucun point de $]0, 1[$.
5. (difficile - ne traiter que si tout le reste du sujet a été fait) Montrer que chaque $T(a, N)$ est d'intérieur vide dans E .