
Contrôle partiel du 3 mars 2026 : éléments de correction

Exercice 1. Soit X, Y deux espaces de Banach, et $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'applications linéaires continues de X vers Y . On suppose que, pour tout $x \in X$, la suite $(T_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers une limite que l'on note $T(x)$.

Montrer que T est linéaire et continue.

Cet exercice a été traité en TD. Commençons par montrer que T est linéaire : soit $\lambda \in \mathbf{R}$ et $x, x' \in X$. En utilisant que la limite d'une combinaison linéaire de suites convergentes est combinaison linéaire de leurs limites, on obtient :

$$\begin{aligned} T(x + \lambda x') &= \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x + \lambda x') = \lim_{n \rightarrow +\infty} (T_n(x) + \lambda T_n(x')) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) + \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x') \\ &= T(x) + \lambda T(x'). \end{aligned}$$

Notons ensuite que, pour tout x , la suite $(T_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite convergente et donc bornée. Le théorème de Banach–Steinhaus nous assure donc l'existence d'une constante $M \geq 0$ telle que pour tout $x \in X$ et tout $n \in \mathbf{N}$ on ait $\|T_n(x)\| \leq M\|x\|$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans cette inégalité, on conclut que $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ pour tout x ; comme T est linéaire cela entraîne que T est continue.

Exercice 2. Dans cet exercice, on note E l'espace $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$ des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$. On voit E comme un sous-espace vectoriel de $L^2([0, 1])$.

Soit $T: (L^2([0, 1]), \|\cdot\|_2) \rightarrow (L^2([0, 1]), \|\cdot\|_2)$ une application linéaire continue. On suppose que pour tout $f \in E$ on a $T(f) \in E$.

À l'aide du théorème du graphe fermé, montrer que $T: (E, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (E, \|\cdot\|_\infty)$ est continue.

Puisque $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est complet, on peut appliquer le théorème du graphe fermé ; soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E telle que $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers f dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et $(T(f_n))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers g dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Puisque, pour toute $h \in E$, on a $\|h\|_2 \leq \|h\|_\infty$, on a aussi que $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers f en $\|\cdot\|_2$, et de même $(T(f_n))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers g dans $(L^2([0, 1]), \|\cdot\|_2)$. Par hypothèse sur T , on en déduit que $T(f) = g$ dans $(L^2([0, 1]), \|\cdot\|_2)$; comme g et $T(f)$ sont continues cela signifie que $T(f) = g$. On conclut grâce au théorème du graphe fermé que $T: (E, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (E, \|\cdot\|_\infty)$ est continue.

Exercice 3. Soit X, Y deux espaces de Banach. Dans tout l'exercice T est une application linéaire continue de X vers Y .

Pour $\varphi \in Y^*$, on pose $T^*(\varphi) = \varphi \circ T$. On définit ainsi une application linéaire $T^*: Y^* \rightarrow X^*$.

1. Montrer que $T^*: Y^* \rightarrow X^*$ est continue et que $\|T^*\| \leq \|T\|$. Soit $\varphi \in Y^*$. On a, pour tout $x \in X$:

$$|T^*(\varphi)(x)| = |\varphi(T(x))| \leq \|\varphi\| \|T(x)\|.$$

Ceci entraîne que $\|T^*(\varphi)\| \leq \|T\| \|\varphi\|$; ceci étant vrai pour tout $\varphi \in Y^*$ on conclut que T^* est continue et que $\|T^*\| \leq \|T\|$.

2. Soit $x \in X \setminus \{0\}$. À l'aide du théorème de Hahn–Banach, montrer qu'il existe une forme linéaire φ de norme 1 telle que $\varphi(T(x)) = \|T(x)\|$, et utiliser cela pour montrer que $\|T^*\| = \|T\|$.

Ici on remarque que l'énoncé est en fait faux si $Y = \{0\}$, puisque dans ce cas là il n'existe pas de forme linéaire de norme 1 sur Y . Bien sûr dans ce cas-là les différents résultats sont immédiats puisque T est nécessairement l'application nulle, et on l'exclut (en fait je voulais supposer $T(x) \neq 0$ plutôt que $x \neq 0$).

Si $\varphi(x) = 0$ alors n'importe quelle forme linéaire de norme 1 convient (voir remarque au paragraphe précédent). Supposons donc $y = \varphi(x) \neq 0$. L'application $\varphi: \mathbf{R}y \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $\varphi(\lambda y) = \lambda\|y\|$ est linéaire, continue et de norme 1 ; grâce au théorème de Hahn–Banach on peut l'étendre en une application $\varphi \in Y^*$ de norme 1.

On a bien comme attendu $\varphi(T(x)) = \|T(x)\|$, autrement dit $T^*(\varphi)(x) = \|T(x)\|$.

Soit $\varepsilon > 0$, et x de norme 1 tel que $\|T(x)\| \geq \|T\| - \varepsilon$. En appliquant ce qu'on vient de démontrer, on conclut qu'il existe φ de norme 1 telle que $T^*(\varphi)(x) \geq \|T\| - \varepsilon$, ce qui entraîne que $\|T^*(\varphi)\| \geq \|T\| - \varepsilon$, donc aussi $\|T^*\| \geq \|T\|$.

3. Soit $S: Y \rightarrow X$ une application linéaire continue. Montrer que $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$.

Pour tout $\varphi \in Y^*$ et tout $x \in X$ on a

$$(T \circ S)^*(\varphi)(x) = \varphi(T(S(x))) = T^*(\varphi)(S(x)) = (S^* \circ T^*)(\varphi)(x).$$

On obtient comme attendu $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$.

4. On suppose que $T: X \rightarrow Y$ est une bijection linéaire continue. Montrer que $T^*: Y^* \rightarrow X^*$ est une bijection linéaire continue.

Par le théorème d'isomorphisme de Banach, l'inverse de T , qu'on note S , est une application linéaire continue de Y vers X . À l'aide du résultat de la question précédente on conclut que $S^* \circ T^* = \text{Id}_{Y^*}$ et $T^* \circ S^* = \text{Id}_{X^*}$, donc T^* est une bijection linéaire continue (d'inverse S^*).

5. Réciproquement, supposons que $T^*: Y^* \rightarrow X^*$ est une bijection linéaire continue.

- (a) Montrer que l'image de T est dense dans Y (on pourra envisager d'utiliser le théorème de Hahn–Banach pour montrer que si $\overline{\text{Im}(T)} \neq Y$ alors T^* n'est pas injective).

Soit $F = \overline{\text{Im}(T)}$. Si $F \neq Y$ alors il existe $y \in Y \setminus F$, et on peut considérer une forme linéaire $\varphi: \mathbf{R}y \oplus F \rightarrow \mathbf{R}$ en posant $\varphi(\lambda y + f) = \lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et tout $f \in F$.

Puisque $\|\lambda y + f\| \geq \lambda d(y, F)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et tout $f \in F$, on obtient que $\|\varphi(\lambda y + f)\| \leq \frac{1}{d(y, F)} \|\lambda y + f\|$ (rappelons que $d(y, F) > 0$ puisque $y \notin F$ et F est fermé). Il suit de cela que φ est continue sur $\mathbf{R}y \oplus F$.

À l'aide du théorème de Hahn–Banach, on étend φ en une forme linéaire continue sur Y tout entier ; par définition φ est non nulle, pourtant $T^*(\varphi)(x) = \varphi(T(x)) = 0$ pour tout $x \in X$. Donc $\varphi \in \ker T^*$, ce qui prouve que T^* n'est pas injective, une contradiction.

- (b) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $\varphi \in X^*$ on ait

$$(\|\varphi\| \leq r) \Rightarrow (\exists \psi \in Y^*, \|\psi\| \leq 1 \text{ et } T^*(\psi) = \varphi).$$

Comme X^* et Y^* sont des espaces de Banach, on peut appliquer le théorème d'isomorphisme de Banach à la bijection linéaire continue T^* , ce qui nous garantit l'existence de $r > 0$ tel que la boule fermée $B_{X^*}(0, r)$ soit contenue dans l'image par T^* de la boule fermée $B_{Y^*}(0, 1)$.

On fixe un tel r .

- (c) Montrer que pour tout $x \in X$ on a $\|T(x)\| \geq r\|x\|$.

On sait (par un corollaire du théorème de Hahn–Banach qu'on a revu plus haut) que

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(T(x))| : \varphi \in X^* \text{ et } \|\varphi\| \leq 1\}.$$

Il suit de cela, et du résultat de la question précédente, que

$$\begin{aligned} \|x\| &= \frac{1}{r} \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in X^* \text{ et } \|\varphi\| \leq r\} \\ &\leq \frac{1}{r} \sup\{|T^*(\psi)(x)| : \psi \in Y^* \text{ et } \|\psi\| \leq 1\} \\ &= \frac{1}{r} \sup\{|\psi(T(x))| : \psi \in Y^* \text{ et } \|\psi\| \leq 1\} \\ &= \frac{1}{r} \|T(x)\|. \end{aligned}$$

(d) *Prouver que T est bijective.*

Comme on l'a vu en TD, il suit de l'inégalité obtenue à la question précédente que T est injective et d'image fermée ; comme on a déjà établi que $\text{Im}(T)$ est dense on conclut que T est bijective.

Rappelons pourquoi T est injective et d'image fermée : déjà, il est clair que si $x \in \ker(T)$ alors $\|T(x)\| = 0$ donc $\|x\| = 0$, ce qui prouve que T est injective. Ensuite, si $(T(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $y \in Y$ alors $(T(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy donc (à cause de l'inégalité obtenue à la question précédente) $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy, et donc converge vers $x \in X$ puisque X est un espace de Banach. Alors $y = T(x)$ par continuité de T ; donc $y \in \text{Im}(T)$, et $\text{Im}(T)$ est fermé.

Exercice 4. On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbf{R})$. Pour $f, g \in E$ on pose

$$d(f, g) = \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-i} \min(1, \|f^{(i)} - g^{(i)}\|_\infty).$$

(On rappelle que $f^{(0)} = f$, et que pour tout $i \geq 1$ $f^{(i)}$ désigne la dérivée i -ème de f)

1. Montrer que d est une distance sur E , et qu'une suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers f dans (E, d) si, et seulement si, pour tout $i \in \mathbf{N}$ la suite $(f_n^{(i)})_n$ converge uniformément vers $f^{(i)}$ sur $[0, 1]$.

Il est clair que d est à valeurs réelles positives, que $d(f, g) = d(g, f)$ pour tout $f, g \in E$ et que $d(f, g) = 0$ si, et seulement si, $f = g$. L'inégalité triangulaire suit aussi directement du fait que chaque fonction $\min(1, \|f^{(i)} - g^{(i)}\|_\infty)$ satisfait l'inégalité triangulaire (si d est une distance alors $\min(1, d)$ est encore une distance).

Supposons maintenant que $(f_n^{(i)})_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers $f^{(i)}$ sur $[0, 1]$ pour tout i . Fixons $\varepsilon > 0$, puis choisissons I tel que $\sum_{i=I+1}^{+\infty} 2^{-i} \leq \varepsilon$. Puisque $\sum_{i=0}^I 2^{-i} \min(1, \|f_n^{(i)} - f^{(i)}\|_\infty)$ converge vers 0, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que cette somme soit majorée par ε pour tout $n \geq N$. On a alors $d(f_n, f) \leq 2\varepsilon$ pour tout $n \geq N$.

Réciproquement, il est clair que si $d(f_n, f)$ tend vers 0 alors chaque $\|f_n^{(i)} - f^{(i)}\|_\infty$ tend vers 0, autrement dit chaque $f_n^{(i)}$ converge uniformément vers $f^{(i)}$ sur $[0, 1]$.

2. Montrer que (E, d) est complet.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de Cauchy dans E . Alors chaque suite $(f_n^{(i)})_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathcal{C}^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$, et converge donc vers une fonction continue g_i . Montrons par récurrence sur i que g_0 est de classe $\mathcal{C}^i$ et que $g_k = g_0^{(k)}$ pour tout $k \leq i$.

Pour $i = 0$ c'est immédiat ; supposons le résultat établi au rang i pour toute suite de Cauchy $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans (E, d) . D'une part, le théorème de dérivation des suites de fonctions nous garantit que $g'_0 = g_1$; d'autre part, l'hypothèse de récurrence appliquée à la suite $(f'_n)_{n \in \mathbf{N}}$, qui est elle aussi de Cauchy dans (E, d) , nous dit que g_1 est de classe $\mathcal{C}^i$ et que $g_1^{(k)} = g_{k+1}$ pour tout $k \leq i$. Par conséquent, g_0 est de classe $\mathcal{C}^{i+1}$ et $g_0^{(k)} = g_{k+1}$ pour tout $k \leq i + 1$.

On vient de prouver que chaque $(f_n^{(i)})_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers $g_0^{(i)}$ pour tout i , donc $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers g_0 dans (E, d) .

Pour $x \in]0, 1[$ et $f \in E$ on dit que f est analytique sur un voisinage de x s'il existe un intervalle ouvert centré I en x sur lequel f est égale à la somme de sa série de Taylor en x . On rappelle qu'alors f est analytique sur un voisinage de y pour tout $y \in I$, et qu'on a

$$\sup_{k \in \mathbf{N}} \left| \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \right|^{1/k} < +\infty.$$

Pour $a \in]0, 1[$ et $N \in \mathbf{N}$ on note

$$T(a, N) = \left\{ f \in E : \forall k \in \mathbf{N} \ |f^{(k)}(a)| \leq k! N^k \right\}.$$

3. Montrer que chaque $T(a, N)$ est fermé dans E .

Soit $a \in]0, 1[$. Si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers f dans (E, d) alors chaque $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers $f^{(k)}$, en particulier $f \mapsto f^{(k)}(a)$ est continue. Donc $T(a, N)$ est fermé en tant qu'intersection de fermés de (E, d) .

4. On admet dans un premier temps que chaque $T(a, N)$ est d'intérieur vide. Montrer qu'il existe des fonctions de classe C^∞ sur $[0, 1]$ qui ne sont analytiques au voisinage d'aucun point de $]0, 1[$.

Notons Ω l'ensemble des fonctions qui sont analytiques au voisinage d'un point de $]0, 1[$.

Si f est analytique au voisinage de $x \in]0, 1[$, alors f est analytique au voisinage de a pour tout a suffisamment proche de x , en particulier f est analytique au voisinage d'un élément a de $\mathbf{Q} \cap]0, 1[$.

Il existe donc $a \in \mathbf{Q} \cap]0, 1[$ tel que $M = \sup_{k \in \mathbf{N}} \left| \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \right|^{1/k} < +\infty$. En choisissant un entier $N \geq M$, on obtient que $f \in T(a, N)$. On vient de prouver que

$$\Omega \subseteq \bigcup_{a \in \mathbf{Q} \cap]0, 1[, N \in \mathbf{N}} T(a, N),$$

qui est maigre dans (E, d) en tant que réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide de (E, d) .

Comme (E, d) est complet, $\Omega \neq E$, ce dont on conclut qu'il existe des éléments de E qui ne sont analytiques au voisinage d'aucun point de $]0, 1[$.

5. Montrer que chaque $T(a, N)$ est d'intérieur vide dans E .

Soit $f \in T(a, N)$ et $\varepsilon > 0$. Choisissons tout d'abord I tel que $\sum_{i=I+1}^{+\infty} 2^{-i} \leq \varepsilon$, puis choisissons $b > 1$

tel que $\varepsilon b^I > 2(2I)!N^{2I}$. Pour $x \in [0, 1]$ posons

$$g(x) = f(x) + \varepsilon b^{-I} \cos(b(x - a)).$$

Alors g appartient à E , et pour tout $i \leq I$ on a $\|f^{(i)} - g^{(i)}\|_\infty \leq \varepsilon b^{i-I} \leq \varepsilon$.

Il s'ensuit que $d(f, g) \leq \sum_{i=0}^I \varepsilon 2^{-i} + \sum_{i=I+1}^{+\infty} 2^{-i} \leq 3\varepsilon$.

Pourtant, $|g^{(2I)}(a) - f^{(2I)}(a)| = \varepsilon b^I > 2(2I)!N^{2I}$, ce qui n'est possible, puisque $f \in T(a, N)$, que si $|g^{(2I)}(a)| > (2I)!N^{2I}$.

Par conséquent $g \notin T(a, N)$ alors que $d(f, g) \leq 3\varepsilon$. Puisque $\varepsilon > 0$ était quelconque, on vient de prouver que $T(a, N)$ est d'intérieur vide.