Feuille de TD # 4
Espaces de Hilbert

Exercice # 1. Soient H un espace de Hilbert et $C \subset H$ un convexe fermé non-vide.

Soit P_C la projection (orthogonale) sur C, c'est-à-dire $P_C(x) :=$ l'unique $y \in H$ tel que $\|x - y\| = d_C(x)$.

1. Soient $x \in H$ et $y \in C$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
   (i) $y = P_C(x)$.
   (ii) $\langle x - y, z - y\rangle \leq 0, \forall\, z \in C$.

   Indication : si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est convexe et dérivable, alors 0 est un point de minimum de f si et seulement si $f'(0) \geq 0$. Si cette condition est satisfaite et f est strictement convexe, alors 0 est le le seul point de minimum de f. Appliquer ces considérations à

$$[0,1] \ni t \mapsto f(t) := \|x - [(1-t)y + tz]\|^2.$$

2. En déduire que P_C est 1-lipschitzienne, et en particulier continue.
3. Soit $C := \overline{B}(0, R)$. Montrer que

$$P_C(x) = \begin{cases} x, & \text{si } \|x\| \leq R \\ \dfrac{R}{\|x\|}x, & \text{si } \|x\| > R \end{cases}.$$

4. Si F est un sous-espace vectoriel fermé de H, $x \in H$ et $y \in F$, montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
   (i) $y = P_F(x)$.
   (ii) $x - y \in F^\perp$.

   En déduire que :
   (a) $H = F \oplus F^\perp$.
   (b) Si $x \in H$ et on écrit $x = y + w$, avec $y \in F$ et $w \in F^\perp$, alors $P_F(x) = y$.
   (c) P_F est linéaire et continue, de norme $= 1$ si F est non-nul.
   (d) En particulier, si F est de dimension finie, alors P_F coïncide avec la projection orthogonale sur F telle que définie en algèbre linéaire.
   De même si $F^\perp$ est de dimension finie.

Exercice # 2. On munit $\mathscr{B}_{]0,1[}$ de la mesure de Lebesgue $\lambda_{]0,1[}$. Soient $H := L^2(]0,1[, \mathscr{B}_{]0,1[}, \lambda_{]0,1[})$,

$$V := \left\{ f \in H\,;\ \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{1/2} f(x)\,dx = 0 \right\}.$$

1. Montrer que V est fermé dans H. Déterminer une base de $V^{\perp}$.
2. Soit $f(x) = x$, $\forall\, x \in]0,1[$. Calculer la projection orthogonale de f sur V, puis $d(f, V)$.

Exercice # 3. Soient E et F deux sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert H. Montrer que $(E+F)^{\perp} = E^{\perp} \cap F^{\perp}$ et $(E \cap F)^{\perp} = \overline{E^{\perp} + F^{\perp}}$.

Exercice # 4. Soient H un espace de Hilbert et $(H_n)_{n\geq 0}$ des sous-espaces mutuellement orthogonaux de H.

1. Soit $x_n \in H_n$, $\forall\, n \geq 0$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} \|x_n\|^2$ converge, et dans ce cas
$$\left\| \sum_{n\geq 0} x_n \right\|^2 = \sum_{n\geq 0} \|x_n\|^2.$$
2. Si chaque H_n est fermé et si $\sum_{n\geq 0} x_n$ converge, montrer que
$$P_{H_m}\left(\sum_{n\geq 0} x_n \right) = x_m,\ \forall\, m \geq 0.$$

Exercice # 5. Soient $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p < \infty$. Soit
$$C := \{ f \in L^p(X, \mathscr{T}, \mu)\,;\ f \geq 0 \}.$$

1. Redéfinir proprement C.
2. Montrer que C est convexe et fermé.
3. Montrer que, si $f \in L^p(X, \mathscr{T}, \mu)$, alors $g := f\,\chi_{[f\geq 0]}$ est le seul élément de C tel que $\|f-g\|_p = d_C(f)$.
4. Pour $p = 2$, retrouver le résultat de la question précédente en utilisant l'exercice 1, question 1.
5. Que se passe-t-il si $p = \infty$?

Exercice # 6. Si E, F sont des espaces de Banach et $T \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $T^* \in \mathscr{L}(F', E')$ est défini par :
$$T^* y'(x) = y'(Tx),\ \forall\, y' \in F',\ \forall\, x \in E.$$

Si H, K sont des espaces de Hilbert de produits scalaires $\langle\ ,\ \rangle$, respectivement $(\ ,\ )$, et $T \in \mathscr{L}(H, K)$, alors $T^* \in \mathscr{L}(K, H)$ est défini par :
$$\langle T^* y, x \rangle = (y, Tx),\ \forall\, y \in K,\ \forall\, x \in H.$$

Montrer que les deux définitions sont compatibles.

Exercice # 7. Calculer T^* si :

1. E est une espace de Hilbert, $F = \mathbb{R}, T \in E'$.
2. $E = F = H$ (espace de Hilbert), T est la projection orthogonale sur un sous-espace fermé V de H.
3. $E = F = \mathbb{K}^n$ muni de la norme $\| \|_2$, et T est de matrice A dans une base orthonormée.
4. $E = F = L^2(X, \mathscr{T}, \mu)$, et $Tf := hf, \forall f \in L^2(X, \mathscr{T}, \mu)$, avec $h : X \to \mathbb{R}$ mesurable bornée fixée.
5. $E = L^2(Y, \mathscr{S}, \nu)$, $F = L^2(X, \mathscr{T}, \mu)$, avec μ et ν mesures σ-finies, et

   $$Tf(x) := \int_Y K(x,y) f(y)\, d\nu(y),\ \forall f \in L^p(Y, \mathscr{S}, \nu),\ \text{pour presque tout } x \in X,$$

   où $K : X \times Y \to \mathbb{R}$ est une fonction $\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$-mesurable, dans l'un des cas suivants :
   (a) $K \in L^2(X \times Y, \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}, \mu \otimes \nu)$.
   (b) $M_1 := \sup_{x \in X} \int_Y |K(x,y)|\, d\nu(y) < \infty$ et $M_2 := \sup_{y \in Y} \int_X |K(x,y)|\, d\mu(x) < \infty$.

   (K est le *noyau intégral de* T.)
   Que devient ce résultat si $E = F = \ell^2$?
6. $E = F = \ell^2$, $T(x_0, x_1, \ldots) := (0, x_0, x_1, \ldots)$. ($T$ est le *shift*.)

Exercice # 8. Soient H, K des espaces de Hilbert. $T \in \mathscr{L}(H, K)$ est une *isométrie partielle* s'il existe $E \subset H$ un sous-espace fermé tel que $U := T_{|E}$ soit une isométrie et $T_{|E^\perp} = 0$. Pour un tel T, calculer T^* en fonction de U.

Exercice # 9. Soit $T \in \mathscr{L}(\ell^2)$. Montrer qu'il existe des réels $b_{m,n}$, $\forall m, n \geq 0$, tels que :

1. $(b_{m,n})_{m \geq 0} \in \ell^2, \forall n \geq 0$.
2. $(b_{m,n})_{n \geq 0} \in \ell^2, \forall m \geq 0$.
3. $Tx = \left(\sum_{m \geq 0} b_{m,n} a_m \right)_{n \geq 0}, \forall x = (a_n)_{n \geq 0} \in \ell^2$.

Déterminer T^*.

Exercice # 10. Soient H un espace de Hilbert, $(f_n)_{n \geq 0} \subset H$ une suite orthonormée, $(a_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{R}$ une suite bornée.

1. Montrer que la relation

   $$Tx := \sum_{n \geq 0} a_n \langle x, f_n \rangle f_n,\ \forall x \in H,$$

   définit un opérateur $T \in \mathscr{L}(H)$.
2. Calculer T^*.

Exercice # 11. Soit H un espace de Hilbert séparable. Montrer que toute famille orthonormée $\mathscr{F} \subset H$ est au plus dénombrable.
Indication : les boules $B(x, \sqrt{2}/2)$, $x \in \mathscr{F}$, sont mutuellement disjointes.

Exercice # 12. On désigne par H l'espace vectoriel complexe engendré par les fonctions de la forme $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{\imath wt} \in \mathbb{C}$, où w parcourt $\mathbb{R}$.

Soit

$$\langle f, g \rangle := \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\overline{g(t)}\, dt, \ \forall\, f, g \in H.$$

1. Montrer que $\langle \, , \rangle$ définit un produit scalaire sur H.
2. Vérifier que la famille $\{e^{\imath wt}\}_{w \in \mathbb{R}}$ est orthonormée.
3. H est-il un espace de Hilbert ?

Exercice # 13. Cet exercice prépare aux questions 3 et 4 de l'exercice suivant. Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $g \in L^p([0, \infty[, \mathscr{B}_{[0,\infty[}, \lambda_{[0,\infty[})$.

1. Soit $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \,;\ \mathrm{Re}\, z > 0\}$. Montrer que la fonction

$$\mathbb{H} \ni z \mapsto F(z) := \int_0^\infty g(t)\, e^{-zt}\, dt \in \mathbb{C}$$

est holomorphe.

2. Soit $a > 0$. On suppose que

$$\int_0^\infty t^n\, g(t)\, e^{-at}\, dt = 0, \ \forall\, n \geq 0. \tag{1}$$

   (a) Montrer que

$$\int_0^\infty g(t)\, e^{-bt}\, dt = 0, \ \forall\, b \in]0, a].$$

   (b) En déduire que $F(z) = 0, \forall\, z \in \mathbb{H}$.

   (c) En utilisant le fait que la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}_\mathbb{R}, \lambda)$ est injective, en déduire que $g = 0$.

3. De même, si $g \in L^p(\mathbb{R}, \mathscr{B}_\mathbb{R}, \lambda)$ et on remplace (1) par l'hypothèse

$$\int_\mathbb{R} t^n\, g(t)\, e^{-at^2}\, dt = 0, \ \forall\, n \geq 0,$$

avec $a > 0$, alors $g = 0$.

Exercice # 14. (Bases hilbertiennes de fonctions polynomiales)

1. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non-dégénéré et soit H un espace de Hilbert de (classes d'équivalence de) fonctions sur I tel que l'espace des fonctions polynomiales sur I : (i) s'identifie avec $\mathbb{R}[X]$, (ii) soit contenu dans H, et (iii) soit dense dans H. Si $\{P_n\}_{n \geq 0}$ est une famille orthonormée de fonctions polynomiales, avec $\deg P_n = n, \forall\, n \geq 0$, montrer que $\{P_n\}_{n \geq 0}$ est une base hilbertienne de H.

2. On munit $I := [-1, 1]$ de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue $\lambda_{[-1,1]}$. Soit $H := L^2([-1, 1], \mathscr{T}_{[-1,1]}, \lambda_{[-1,1]})$. Les *polynômes de Legendre* sont définis par :

$$P_n(x) := \alpha_n \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n\right], \forall\, n \geq 0, \forall\, x \in [-1, 1],$$

où les $\alpha_n > 0$ sont des constantes telles que $\|P_n\| = 1, \forall\, n \geq 0$.
Montrer que $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de H.

3. On munit $I := [0, \infty[$ de la tribu borélienne et de la mesure μ de densité e^{-x} par rapport à la mesure de Lebesgue. Montrer que, dans $L^2([0, \infty[, \mathscr{T}_{[0,\infty[}, \mu)$, les *polynômes de Laguerre* :

$$Q_n(x) := \beta_n e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n\, e^{-x}), \forall\, n \geq 0, \forall\, x \geq 0,$$

(avec $\beta_n > 0$ constantes convenables) forment une base hilbertienne.

4. On munit $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne et de la mesure ν de densité $e^{-x^2/2}$. Montrer que , dans $L^2(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{\mathbb{R}}, \nu)$, les *polynômes d'Hermite*

$$R_n(x) := (-1)^n \gamma_n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n}[e^{-x^2/2}], \forall\, n \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{R},$$

(avec $\gamma_n > 0$ constantes convenables) forment une base hilbertienne.

Exercice # 15. Cet exercice prépare aux questions 3 et 4 de l'exercice suivant.

Soit $(E_n)_{n\geq 0}$ une suite de sous-espaces de l'espace de Hilbert H telle que :

(i) E_n est de dimension finie, $\forall\, n \geq 0$.

(ii) $E_n \subset E_{n+1}, \forall\, n \geq 0$.

(iii) $E_0 \cup E_1 \cup \cdots$ est dense dans H.

On pose $E_{-1} := \{0\}$. Soit $\mathscr{F}_n$ une base orthonormée de $E_n \ominus E_{n-1}$, $n \geq 0$. Montrer que $\mathscr{F}_0 \cup \mathscr{F}_1 \cup \cdots$ est une base hilbertienne de H.

Exercice # 16. Soit $H := L^2([0, 1[, \mathscr{T}_{[0,1[}, \lambda_{[0,1[})$. Pour $n \geq 0$, soit

$$E_n := \{f : [0, 1[\to \mathbb{R}\, ;\ f \text{ est constante sur } [j/2^n, (j + 1)/2^n[, \forall\, j = 0, 1, \ldots, 2^n - 1\}.$$

1. Montrer que les E_n vérifient les hypothèses de l'exercice précédent.
Indication pour (iii) : si $f \in C_c(]0, 1[)$ et

$$f_n(x) := f(j/2^n), \forall\, n \geq 0, \forall\, 0 \leq j \leq 2^n - 1, \forall\, x \in [j/2^n, (j + 1)/2^n[,$$

alors $f_n \to f$ uniformément sur $[0, 1[$.

2. Calculer $\dim E_n$, $n \geq 0$.

3. Soit E la fonction partie entière. Montrer que les fonctions

$$\begin{aligned} w_I(x) := (-1)^{E(2^{n_1}x)}(-1)^{E(2^{n_2}x)} \cdots (-1)^{E(2^{n_k}x)}, \\ \forall\, k \geq 0, \forall\, I = \{n_1 < n_2 < \ldots < n_k\} \subset \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

(avec la convention $w_\emptyset = 1$), forment une base hilbertienne de H. C'est la *base de Walsh*.
Indication : si $n \geq 1$, montrer que $\{w_I\, ;\ \max I = n\}$ est une famille orthonormée contenue dans $E_n \ominus E_{n-1}$.

4. Si $H_0 := 1$ et, pour $n \geq 0$ et $0 \leq j \leq 2^n - 1$,

$$H_{j+2^n}(x) := \begin{cases} 2^{n/2}, & \text{si } 2j/2^{n+1} \leq x < (2j+1)/2^{n+1} \\ -2^{n/2}, & \text{si } (2j+1)/2^{n+1} \leq x < (2j+2)/2^{n+1} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases},$$

montrer que $\{H_k\}_{k\geq 0}$ est une base hilbertienne de H. C'est la *base de Haar*.

Exercice # 17. Si $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : Y \to \mathbb{R}$, on pose

$$X \times Y \ni (x, y) \mapsto f \otimes g(x, y) := f(x)\, g(y).$$

Soient $H := L^2(X, \mathscr{T}, \mu)$ et $K := L^2(Y, \mathscr{S}, \nu)$, avec μ, ν σ-finies. Si H, K sont séparables, de bases hilbertiennes $\{e_m\}_{m\geq 0}$, respectivement $\{f_n\}_{n\geq 0}$, montrer que $\{e_m \otimes f_n\}_{m,n\geq 0}$ est une base hilbertienne de $L^2(X \times Y, \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}, \mu \otimes \nu)$.

Indication : montrer que

$$\|h\|_2^2 = \sum_{m,n\geq 0} \langle h, e_m \otimes f_n\rangle^2, \ \forall\, h \in L^2(X \times Y, \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}, \mu \otimes \nu).$$

Exercice # 18. Soit H un espace de Hilbert séparable, et soient $\{e_n\}$, $\{f_n\}$ deux bases hilbertiennes de H. Montrer que

$$S := \sum_n \|Te_n\|^2 = \sum_n \|T^* f_n\|^2 = \sum_n \|Tf_n\|^2 \in [0, \infty].$$

Si H est de dimension finie, $S^{1/2} < \infty$ est la *norme de Frobenius* de T. Si H est de dimension infinie, $S^{1/2} \in [0, \infty]$ est la *norme de Hilbert-Schmidt* de T.

Exercice # 19. Soient H un espace de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(H)$ tel que $\langle Tx, x\rangle \geq 0, \forall\, x \in H$. Montrer que $\mathrm{Id} + T$ est bijectif.

Indication : considérer

$$a(x, y) := \langle x, y\rangle + \langle Tx, y\rangle, \ \forall\, x, y \in H.$$

Exercice # 20. Soient H un espace de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(H)$. Montrer que $\mathrm{Id} + T^*T$ est bijectif.

Exercice # 21. On munit $]0, 1[$ de la tribu borélienne $\mathscr{T}_{]0,1[}$ et de la mesure de Lebesgue $\lambda_{]0,1[}$. Soit $H := L^2(]0, 1[, \mathscr{T}_{]0,1[}, \lambda_{]0,1[})$.

1. Si $f \in H$, on pose

$$Tf(x) := \int_0^x f(t)\, dt, \forall\, x \in [0, 1].$$

Montrer que la définition est correcte et que Tf est une fonction continue.

2. Montrer que, pour tout $g \in H$, il existe un unique $f \in H$ tel que

$$\int_0^1 f(x)\, h(x)\, dx + \int_0^1 Tf(x)\, Th(x)\, dx = \int_0^1 g(x)\, h(x)\, dx, \ \forall\, h \in H.$$