Université Claude Bernard Lyon 1 | Licence de mathématiques 3e année
Mesure et intégration | Année 2020–2021

Exercices d'auto-contrôle

Dans les exercices suivants, préciser le cadre si nécessaire (par exemple, si X apparaît dans l'énoncé, préciser s'il s'agit d'un ensemble sans structure, d'un espace mesurable, mesuré, ou métrique).

Exercice # 1. Si $A \subset B$ et $C \subset D$, montrer que $A \backslash D \subset B \backslash C$.

Exercice # 2. Montrer que $A \triangle B = A^c \triangle B^c$.

Exercice # 3. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes.

1. $A \cup C \subset B \cup C, \forall C$.
2. $A \subset B$.

Exercice # 4. Déterminer les ensembles suivants :

$$\sin^{-1}(0)\ ;\ \sin([0,1[)\ ;\ \sin^{-1}([a,b]),\ \text{avec } a, b \in \mathbb{R}.$$

Exercice # 5. Dans un espace normé, écrire les boules (ouvertes, fermées) comme des images réciproques de fonctions numériques.

Exercice # 6. Soit $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ une suite. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes.

1. $(x_n)_n$ est bornée.
2. $\limsup_n x_n \in \mathbb{R}$ et $\liminf_n x_n \in \mathbb{R}$.

Exercice # 7. Calculer $\sup\limits_{n\geqslant 1} x_n$ et $\liminf_n x_n$, où $x_n := \ln\left(n^{10}\, e^{-n}\right)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice # 8. Proposer et montrer une formule pour $\liminf\limits_n (A_n \cup B)$.

Exercice # 9. Rappelons qu'un nombre réel est rationnel si et seulement si son écriture décimale est périodique. En utilisant cette propriété, proposer une fonction injective $f : \mathbb{Q} \cap]0,1[\to \mathbb{N}^2$. (Indication : prendre comme l'une des deux composantes de $f(x)$ la partie périodique de l'écriture décimale.)

Exercice # 10. Montrer que si $\mathscr{C}$ est un clan et $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{C}$, alors $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathscr{C}$. De même si on remplace clan par tribu.

Exercice # 11. Si $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles $\mathscr{A}_i \subset \mathscr{P}(X)$ telle que chaque $\mathscr{A}_i$ soit un clan (ou tribu, ou classe monotone), alors $\cap_{i\in I}\mathscr{A}_i$ est un clan (ou tribu, ou classe monotone).

Exercice # 12.

a) Si $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$, alors $\mathscr{C}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{C}(\mathscr{B})$, $\mathscr{M}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{M}(\mathscr{B})$ et $\mathscr{T}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{T}(\mathscr{B})$.

b) On a $\mathscr{C}(\mathscr{C}(\mathscr{A})) = \mathscr{C}(\mathscr{A})$. Propriété analogue pour la classe monotone et la tribu engendrées.

Exercice # 13. Dans cet exercice, nous considérons un espace mesurable $(X, \mathscr{T})$. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs est étagée.

b) Si $f : X \to \mathbb{R}^n$ est mesurable, et si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est borélienne étagée, alors $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ est étagée.

c) Si $f : X \to \mathbb{R}$ est telle que $f^{-1}(F) \in \mathscr{T}$ pour tout $F \subset \mathbb{R}$ fermé, alors f est mesurable.

d) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est borélienne et ne s'annule pas, alors $1/f$ est borélienne.

e) Si $A \subset X$, alors $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si $A \in \mathscr{T}$.

f) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} x+1, & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$, est borélienne.

g) La fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable $\iff$ $|f|$ est mesurable.

Exercice # 14. Soient $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable et $g : X \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } f(x) \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

Montrer que g est mesurable.

Exercice # 15. Soit $A \subset X$. Alors χ_A est mesurable si et seulement si A l'est.

Exercice # 16. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) Si $A \in \mathscr{T}$, alors $\mu(X) = \mu(A) + \mu(A^c)$.

b) Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathscr{T}$ et $\mu(A_2) < \infty$, alors

$$\mu\left(\cap_{n\geqslant 0} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n).$$

c) Si $A, B \in \mathscr{T}$ et $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, alors A et B sont disjoints.

d) Il existe un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$ tel que $\{\mu(A) ; A \in \mathscr{T}\} = \{0, 1, 2\}$.

e) Il existe un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$ tel que $\{\mu(A) ; A \in \mathscr{T}\} = \{0, 1, 3\}$.

f) La mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ est finie, respectivement σ-finie.

g) Soient $\mathscr{A}$ une famille qui engendre $\mathscr{T}$ et μ_1, μ_2 deux mesures sur $\mathscr{T}$. On suppose que pour tout A dans $\mathscr{A}$ on a $\mu_1(A) = \mu_2(A)$. Alors pour tout T dans $\mathscr{T}$ on a $\mu_1(T) = \mu_2(T)$.
Pour cette dernière question : y a-t-il des hypothèses raisonnables à ajouter ou enlever ?

Exercice # 17. (Mesure image) Soient $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable et $f : X \to \mathbb{R}^n$ une fonction mesurable. Soit μ une mesure sur $\mathscr{T}$. Nous définissons $f_*\mu : \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ par $f_*\mu(A) := \mu(f^{-1}(A))$, $\forall\, A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$. Rappelons que $f_*\mu$ est une mesure sur $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$. C'est la *mesure image* de μ par f.

a) Déterminer $f_*\delta_a$, avec $a \in X$.

b) Soit μ une probabilité sur X (donc $\mu(X) = 1$). Nous prenons $n = 1$. Si $B \in \mathscr{T}$, déterminer $(\chi_B)_*\mu$.

Exercice # 18. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) Une partie d'un ensemble négligeable est négligeable.

b) Une union a. p. d. d'ensembles négligeables est négligeable.

c) Une union d'ensembles négligeables est négligeable.

Exercice # 19. Prouver ou réfuter. Une partie d'un ensemble Lebesgue mesurable de $\mathbb{R}^n$ est Lebesgue mesurable.

Exercice # 20. Écrire de manière plus simple la quantité $\displaystyle\int f$ lorsque :

a) μ est une mesure de Dirac.

b) μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.

Exercice # 21. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) Si $f = \chi_A$ avec $A \in \mathscr{T}$, alors $\displaystyle\int f = \mu(A)$.

b) Si $f = a\,\chi_A + b\,\chi_B$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $A, B \in \mathscr{T}$, alors $\displaystyle\int f = a\,\mu(A) + b\,\mu(B)$.

c) Si $f : X \to [0, \infty]$ est intégrable, alors $\mu(f^{-1}(\infty)) = 0$.

d) Si $f : X \to [0, \infty]$ est mesurable et satisfait $\mu(f^{-1}(\infty)) = 0$, alors f est intégrable.

e) Si $f : X \to [0, \infty]$ est mesurable et satisfait $\displaystyle\int f = 0$, alors $f = 0$.

f) Si $f : X \to [0, \infty]$ est mesurable et satisfait $\displaystyle\int f = 0$, alors $f = 0$ μ-p. p.

g) Si $f : X \to [0, \infty]$ est mesurable et satisfait $f = 0$ μ-p. p., alors $\displaystyle\int f = 0$.

h) Le produit de deux fonctions intégrables est intégrable.

Exercice # 22. Dans cet exercice, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

a) Soit $I :=]0, 1[$. Soit $0 < \alpha < \infty$. À quelle condition la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est-elle intégrable sur I ?

b) Même question avec $I := [1, \infty[$ et $I :=]0, \infty[$.

Exercice # 23.

a) On considère la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Montrer que f est Lebesgue intégrable sur $[0, 1]$ et calculer son intégrale.

b) Mêmes questions pour la fonction $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} \sin x, & \text{si } \cos x \in \mathbb{Q} \\ \sin^2 x, & \text{si } \cos x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Exercice # 24. Soit P une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_\mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n := \displaystyle\int_\mathbb{R} (\cos \pi t)^{2n}\, dP(t)$.

a) Montrer que $I_n < \infty$, $\forall\, n$.

b) Montrer que la suite $(I_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante.

c) Déterminer $\lim\limits_n I_n$.

Exercice # 25. Nous munissons l'intervalle $[0, 1]$ de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ. Soit $(f_n)_{n \geqslant 2}$ une suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2 x, & \text{si } 0 \le x < 1/n \\ -n^2(x - 2/n), & \text{si } 1/n < x \le 2/n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

a) Tracer le graphique de f_n.

b) Calculer et comparer $\liminf\limits_n \displaystyle\int f_n\, d\lambda$, $\displaystyle\int \liminf_n f_n\, d\lambda$, $\limsup\limits_n \displaystyle\int f_n\, d\lambda$ et $\displaystyle\int \limsup_n f_n\, d\lambda$.

c) Mêmes questions avec la suite de fonctions $(g_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $g_{2p} := \chi_{[0, 1/(2p)]}$, $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, $g_{2p+1} := \chi_{[1/(2p+1), 1]}$, $\forall\, p \in \mathbb{N}$.

Exercice # 26. Soient $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0, \infty[$ une fonction mesurable. Posons

$$F_f(t) := \mu(f^{-1}(]t, \infty[)) = \mu([f > t]),\ \forall\, t \geqslant 0.$$

Pour traiter les questions suivantes, on pourra commencer par le cas où f est une fonction étagée.

a) Montrer que F_f est borélienne.

b) Montrer que $\int_X f\, d\mu = \int_0^\infty F_f(t)\, dt$.

c) Plus généralement, soit $\Phi : [0, \infty[\to [0, \infty[$ une fonction croissante de classe C^1 avec $\Phi(0) = 0$. Montrer que $\int_X \Phi(f)\, d\mu = \int_0^\infty \Phi'(t) F_f(t)\, dt$.

Exercice # 27. (L'exercice précédent, vue probabiliste) En théorie des probabilités, μ est une probabilité, et on travaille plutôt avec la *fonction de répartition* $G_f(t) := \mu([f \leq t])$, $\forall\, t \geqslant 0$. « Traduire » l'exercice précédent en fonction de G_f.

Exercice # 28.

a) Écrire l'inégalité de Jensen dans les cas suivants :

(i) $I := \mathbb{R}$, $\Phi(t) := e^t$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

(ii) $I :=]0, \infty[$, $\Phi(t) := \ln t$, $\forall\, t \in]0, \infty[$.

(iii) $I := \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$, $\Phi(t) := |t|^p$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

b) Obtenir, à partir de l'inégalité de Jensen appliquée à un espace probabilisé et à une fonction convexe convenables, l'inégalité

$$n \sum_{j=1}^n (a_j)^2 \geqslant \left(\sum_{j=1}^n a_j \right)^2, \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \ \forall\, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}.$$

Exercice # 29. En considérant, sur $\mathbb{R}$, les fonctions $f_n(x) := -(x+n)_-$, montrer que l'hypothèse $f_n \geqslant 0$ est essentielle pour avoir la conclusion du lemme de Fatou.

Exercice # 30. En considérant, dans $\mathbb{R}$, la suite $f_n := \chi_{[n,n+1[}$, montrer que l'hypothèse de domination est essentielle pour la validité du théorème de convergence dominée.

Exercice # 31. (Transformée de Laplace) Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction boréliennn et bornée. Montrer que la transformée de Laplace de f, définie par $\mathscr{L} f(a) := \int_0^\infty e^{-ax} f(x)\, dx$, $\forall\, a > 0$, est une fonction continue sur $]0, \infty[$.

Exercice # 32. Soit $f(x) := \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que f est finie si et seulement si $x > 0$.

b) Montrer que f est continue sur $]0, \infty[$.

c) Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$. En déduire la valeur de $\lim_{x \searrow 0} x\, f(x)$.

Exercice # 33.

a) Calculer $\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n\, x^n$, $|x| < 1$.

b) Calculer $\sum_{n \geqslant 1} (-1)^n\, n\, x^{n-1}$, $|x| < 1$.

Exercice # 34. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) := \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \mathrm{e}^{-tx}\, dx$.

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Calculer f'' et les limites à l'infini de f et f'.

c) En déduire une expression simple de f.

Exercice # 35. Pour $x > 0$ et $t > 0$, soit $f(t, x) := \dfrac{\exp(-x) - \exp(-tx)}{x}$.

a) Montrer que pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(t, x)$ est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Pour $t > 0$, soit $F(t) := \displaystyle\int_0^\infty f(t, x)\, dx$.

c) Montrer que F est continue sur $]0, \infty[$.

d) Montrer que F est dérivable sur $]0, \infty[$.

e) Calculer $F'(t)$ et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t > 0$.

Exercice # 36.

a) Si X et Y sont a. p. d., alors $\mathscr{P}(X) \otimes \mathscr{P}(Y) = \mathscr{P}(X \times Y)$.

b) De plus, si μ et ν sont les mesures de comptage sur X et Y respectivement, alors $\mu \otimes \nu$ est la mesure de comptage sur $X \times Y$.

Exercice # 37. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) $\mathscr{T} \otimes \mathscr{S} = \{A \times B\,;\, A \in \mathscr{T}, B \in \mathscr{S}\}$.

b) $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m} = \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$.

c) $\mathscr{L}_n \otimes \mathscr{L}_m = \mathscr{L}_{n+m}$.

d) $\nu_n \otimes \nu_m = \nu_{n+m}$.

e) $\lambda_n \otimes \lambda_m = \lambda_{n+m}$.

f) Soient $(X, \mathscr{T}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{S}, \nu)$ des espaces mesurés, avec μ et ν σ-finies. Soit $E \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$. Si $\nu(E_x) = 0$ pour (presque) tout $x \in X$, alors $\mu \otimes \nu(E) = 0$.

g) Si μ et ν sont des mesures σ-finies, alors $\mu \otimes \nu$ est σ-finie.

Exercice # 38.

a) Calculer $\displaystyle\int_{[0,1]^2} x e^{xy}\, dxdy$.

b) Calculer $\displaystyle\int_\Delta \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dxdy$, où $\Delta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 \le x, y \le 1, 0 < x^2 + y^2 \le 1\}$.

Exercice # 39. Calculer l'aire d'un disque.

Exercice # 40. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, soit

$$f(x, y) := \begin{cases} 1/(x+1)^2, & \text{si } x > 0 \text{ et } x < y < 2x \\ -1/(x+1)^2, & \text{si } x > 0 \text{ et } 2x < y < 3x \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

a) Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est borélienne.

b) Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(\cdot, y)$ est Lebesgue intégrable.

c) Soit $\varphi(y) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dx$, $y \in \mathbb{R}$. Montrer que φ est Lebesgue intégrable et calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, dy$.

d) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x, \cdot)$ est Lebesgue intégrable.

e) Soit $\psi(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dy$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que ψ est Lebesgue intégrable et calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\, dx$.

f) Qu'en pensez-vous ?

Exercice # 41. Soit U la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$U := \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3\,;\, u > 0, v > 0, w > 0, uv < 1, uw < 1, vw < 1\}.$$

a) Montrer que U est borélien.

b) Calculer l'intégrale suivante :

$$I := \int_U u\, v\, w\; du dv dw.$$

On pourra, après l'avoir justifié, utiliser le changement de variables suivant :

$$(x, y, z) = \Phi(u, v, w) := (\sqrt{vw}, \sqrt{wu}, \sqrt{uv}).$$

Exercice # 42. Soient $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurables. Montrer les propriétés suivantes.

a) $\|tf\|_{L^p} = |t|\,\|f\|_{L^p}$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ (avec la convention $0 \cdot \infty = 0$).

b) Si $f = g$ p. p., alors $\|f - g\|_{L^p} = 0$ et $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^p}$.

c) $\|f\|_{L^p} = 0$ si et seulement si $f = 0$ p. p.

d) La définition de $\|f\|_{L^\infty}$ est correcte, au sens suivant. Soit $A := \{M \in [0, \infty]\,;\, |f(x)| \le M \text{ p. p.}\}$. Alors A est non vide et A a un plus petit élément, m. Cet m est le plus petit nombre C de $[0, \infty]$ avec la propriété $|f(x)| \le C$ p. p.

e) $\|f + g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$ pour $p = 1$ et $p = \infty$. (Ici, $f, g : X \to \mathbb{R}$.)

Dans les trois exercices suivants, ajouter les hypothèses manquantes et montrer les résultats énoncés.

Exercice # 43. Soient $1 \le p_2, \ldots, p_k \le \infty$ tels que $\sum_{j=1}^k 1/p_j = 1$. Alors

$$\|f_1 f_2 \ldots f_k\|_{L^1} \le \|f_1\|_{L^{p_1}}\, \|f_2\|_{L^{p_2}} \ldots \|f_k\|_{L^{p_k}},\ \forall\, f_1, f_2, \ldots, f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}.$$

Exercice # 44. Nous supposons μ finie. Si $1 \le p \le r \le \infty$, alors $\|f\|_{L^p} \le (\mu(X))^{1/p - 1/r}\, \|f\|_{L^r}$, $\forall\, f$.

Exercice # 45. Soient $1 \le p_0 < p < p_1 \le \infty$.

a) Montrer qu'il existe un unique $\theta \in]0, 1[$ tel que $\dfrac{1}{p} = \dfrac{\theta}{p_0} + \dfrac{1 - \theta}{p_1}$.

b) Montrer que $\|f\|_{L^p} \le \|f\|_{L^{p_0}}^{\theta}\, \|f\|_{L^{p_1}}^{1-\theta}$, $\forall\, f$.

Exercice # 46. Soit ρ un noyau régularisant standard. Alors pour tout $\varepsilon > 0$:

a) $\rho_\varepsilon(x) \geqslant 0$ si $|x| < \varepsilon$.

b) $\rho_\varepsilon(x) = 0$ si $|x| \geqslant \varepsilon$.

c) $\displaystyle\int \rho_\varepsilon = 1$.

Exercice # 47. Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par $f(x) := |x|$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4}$.

Exercice # 48. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par $f(x) := x^2$.

a) Déterminer Sf et $Sf(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) En déduire les valeurs des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4}$.

Exercice # 49. Soit $\alpha \in]0, \pi[$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [-\alpha, \alpha] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

a) Dessiner le graphe f sur $[-2\pi, 2\pi]$.

b) Calculer Sf et $Sf(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)^2}{n^2}$.

Exercice # 50. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, impaire et telle que $f(x) = (\pi - x)/2$ sur $]0, \pi]$.

a) Dessiner le graphe de f sur une période.

b) Calculer Sf et $Sf(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) En déduire la valeur des sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin n}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.

Exercice # 51.

a) Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\varepsilon > 0$. Soit $f_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} f(x/\varepsilon)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

   (i) Montrer que $f_\varepsilon \in L^1$.

   (ii) Montrer que $\widehat{f_\varepsilon}(\xi) = \widehat{f}(\varepsilon\, \xi)$.

   (iii) Montrer que $|\widehat{f_\varepsilon}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1}$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$.

b) Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $h \in \mathbb{R}^n$. Soit $\tau_h f(x) := f(x - h)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

   (i) Montrer que $\tau_h f \in L^1$.

   (ii) Montrer que $\widehat{\tau_h f}(\xi) = e^{-\imath h\cdot\xi}\, \widehat{f}(\xi)$, $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$.

c) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

   (i) Montrer que $\overline{f} \in L^1$.

   (ii) Montrer que $\widehat{\overline{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}}(-\xi)$, $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$.

d) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Soit $\check{f}(x) := f(-x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

   (i) Montrer que $\check{f} \in L^1$.

   (ii) Montrer que $\widehat{\check{f}}(\xi) = \widehat{f}(-\xi) = \check{\widehat{f}}(\xi)$, $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$.

Exercice # 52. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^{-a|x|}$, où $a > 0$.

a) À partir de la transformée de Fourier de $\mathbb{R} \ni x \mapsto 1/(1 + x^2)$ et de l'identité

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_0^\infty e^{-(1+x^2)\,t}\, dt,\ \forall\, x \in \mathbb{R},$$

montrer que

$$e^{-r} = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t^{1/2}}\, e^{-r^2/(4t)}\, dt,\ \forall\, r > 0. \tag{1}$$

b) En utilisant (1) et la transformée de Fourier des fonctions $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^{-ax^2}$, $a > 0$, montrer que

$$\widehat{f}(\xi) = 2^n \pi^{(n-1)/2} \Gamma((n+1)/2)\, \frac{a}{(a^2 + |\xi|^2)^{(n+1)/2}},$$

avec $\Gamma(x) := \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$ la fonction d'Euler.