Université Claude Bernard Lyon 1
Mesure et intégration

Licence de mathématiques 3$^{\text{e}}$ année
Année 2019-2020

Auto-contrôle #1
–le 1er octobre 2019–
–durée 35 minutes–

Exercice 1. Soient A, B, C, D des parties de l'ensemble X. Si $A \subset C$ et $B \subset D$, montrer que $A \setminus D \subset C \setminus B$.

Exercice 2. Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable. Prouver ou réfuter les affirmations suivantes.
a) Si $A \subset X$, alors χ_{A^c} est étagée.
b) Si $f, g : X \to \mathbb{R}$ sont mesurables, alors $\{x \in X\,;\, f(x) < g(x)\}$ est mesurable.

Exercice 3. Calculer $\liminf\limits_{n\to\infty} (1 + \cos(n\,\pi))\, n$.

Exercice 4. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $B \in \mathscr{T}$. Soit $\nu : \mathscr{T} \to [0, \infty]$, $\nu(A) := \mu(A \cap B)$, $\forall\, A \in \mathscr{T}$. Montrer que ν est une mesure.

Exercice 5. Nous travaillons dans $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue ν_1. Soit $f = \chi_{[0,1]}$.

1. Montrer que f est borélienne.
2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f = g$ ν_1-p. p.