Université Claude Bernard Lyon 1 | Licence de mathématiques 3^e année
Mesure et intégration | Année 2019-2020

Auto-contrôle #2
–le 22 octobre 2019–
–durée 60 minutes–

Exercice #1.

1. Montrer que $\arctan y \geq \dfrac{y}{1+y^2}$, $\forall\, y \geq 0$.
2. Montrer que $y \mapsto \dfrac{\arctan y}{y}$ est décroissante sur $]0,\infty[$.
3. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : X \to [0,\infty[$ une fonction mesurable. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} n \int \arctan\left(\frac{f}{n}\right).$$

Exercice #2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$ nous avons $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n e^{-x} \leq 1$.
2. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-ax}\, dx, \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ paramètre.}$$

On distinguera les cas $a > 1$ et $a \leq 1$.

Exercice #3. Pour $t \in \mathbb{R}$, nous considérons l'intégrale généralisée

$$f(t) = \int_0^\infty \frac{[\sin x]^2}{x} e^{-tx}\, dx \in [0,\infty].$$

1. Peut-on réécrire $f(t)$ comme une intégrale par rapport à une mesure ?
2. Montrer que la fonction $]0,\infty[\ni t \xmapsto{f} f(t) \in \mathbb{R}$ est continue.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0,\infty[$ et que

$$f'(t) = \frac{1}{2}\frac{t}{t^2+4} - \frac{1}{2}\frac{1}{t}, \ \forall\, t > 0.$$

4. Calculer $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$.
5. Déterminer une formule explicite de $f(t)$ pour $t > 0$.
6. Calculer, à partir de cette formule explicite, $\lim\limits_{t\searrow 0} f(t)$.