Familles sommables

Préparation à l'écrit d'Analyse et Probabilités 2013-2014

Université Lyon 1

8 septembre 2013

Somme d'une famille

On se donne

* $(x_i)_{i \in I} \subset E$ (E normé)
* $S \in E$

Définition

$$\sum_{i \in I} x_i = S \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists J \subset I \textit{ finie t. q.}$$

$$\left\| \sum_{i \in K} x_i - S \right\| < \varepsilon,\ \forall K \supset J \textit{ finie}$$

Somme d'une famille

Proposition

* *La somme d'une série est unique*
* *Si* $I = \mathbb{N}$ *et* E *est de dimension finie, alors* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = S$ *(au sens des familles sommables)* $\Longleftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$ *et alors* $S = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *(au sens des séries)*

Sommation par paquets

Proposition

On se donne une famille $(x_i)_{i\in I}$ *de somme* S

- *Si* $\varphi : J \to I$ *est une bijection, alors* $\displaystyle\sum_{j\in J} x_{\varphi(j)} = S$
- *Si* $I = \sqcup_{j\in J} I_j$ *et si* $\varphi_j : J_j \to I_j$ *est une bijection,* $\forall\, j \in J$*, alors*
  - (a) *Pour tout* $j \in J$, $(x_{\varphi_j(i)})_{i\in I_j}$ *est sommable*
  - (b) *La famille* $\left(\sum_{i\in J_j} x_{\varphi_j(i)}\right)_{j\in J}$ *est sommable*
  - (c) $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in J}\sum_{i\in J_j} x_{\varphi_j(i)}$

Somme d'une famille positive

Définition

Si $(x_i)_{i \in I} \subset \mathbb{R}_+$, *alors*

$$\sum_{i \in I} x_i = \sup_{J \subset I \text{ finie}} \sum_{j \in J} x_j$$

Proposition

* *Si* $(x_i)_{i \in I} \subset \mathbb{R}_+$ *et* $\sum_{i \in I} x_i \in \mathbb{R}$, *alors les deux définitions coïncident*

Sommation par paquets des familles positives

Proposition

En cas de positivité (sans supposer la sommabilité) on a

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in J} \sum_{i\in J_j} x_{\varphi_j(i)}$$

Lien avec l'intégration

Cadre

- $X = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage $\mu(A) = \#A$, $\forall A \subset \mathbb{N}$
- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x_n := f(n)$

Alors $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{n \geq 0} x_n$ sous la c. n. s. de l'existence de $\displaystyle\sum_{n \geq 0} (x_n)^+ - \sum_{n \geq 0} (x_n)^-$

Interprétation de la sommation par paquets

- La sommation par paquets des familles positives : généralisation aux familles du théorème de Tonnelli
- La sommation par paquets des familles sommables : généralisation aux familles du théorème de Fubini