

Cours #3
– le 14 février 2022 –

Première partie. Espaces normés

Chapitre #2. Topologie

Le cadre est celui d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$.

8. Unions et intersections, finies ou quelconques, d'ouverts ou fermés.
9. Exercice de cours. En reprenant la preuve dans \mathbb{R} , montrer que :

$$[U \subset E \text{ est ouvert}] \iff [U^c \text{ est fermé}].$$

10. Fonction continue $f : A \rightarrow G$ (avec $(G, \|\cdot\|_G)$ normé et $A \subset E$).
11. Exercice de cours. En reprenant la preuve dans \mathbb{R} , montrer que :

$$\begin{aligned}[f \text{ est continue}] &\iff [\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que} \\ &[y \in A, \|y - x\| < \delta] \implies [\|f(y) - f(x)\| < \varepsilon]].\end{aligned}$$

12. Fonction $(k\text{-})$ lipschitzienne.
13. Exemples de fonctions lipschitziennes :
 - (a) $E \ni x \mapsto \|x - x_0\|$ (avec $x_0 \in E$ fixé).
 - (b) $\sin, \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
14. Continuité des fonctions lipschitziennes.
15. Caractérisation des applications linéaires continues $f : E \rightarrow G$:

$$\begin{aligned}[f \text{ continue}] &\iff [f \text{ lipschitzienne}] \\ &\iff [\exists C \geq 0 \text{ tel que } \|f(x)\|_G \leq C\|x\|, \forall x \in E].\end{aligned}$$

16. Exercice de cours. Soit $f : E \rightarrow G$ une application linéaire et continue.

(a) Montrer que, parmi toutes les constantes $C \in [0, \infty[$ telles que

$$\|f(x)\|_G \leq \|x\|_E, \forall x \in E,$$

il en existe une plus petite. Elle est notée $\|\|f\|\|$ (la « norme triple » ou « norme subordonnée » de f).

(b) Montrer que

$$\begin{aligned}\|\|f\|\| &= \sup\{\|f(x)\|_G ; x \in E, \|x\|_E = 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|f(x)\|_G}{\|x\|_E} ; x \in E, x \neq 0_E\right\}.\end{aligned}$$

17. Compact.
18. Théorème des bornes atteintes.
19. Normes équivalentes.
20. Deux normes équivalentes donnent les mêmes objets fondamentaux (suites convergentes, ouverts, fermés, compacts, fonctions continues).
21. Petit exercice. Montrer que l'équivalence des normes est une relation d'équivalence.