

Devoir surveillé #1

–le 9 octobre 2018–

–durée 45 minutes–

Sujet #1

Question de cours (3 p.). Soit (X, \mathcal{F}, μ) un espace mesuré. Soit $(A_n) \subset \mathcal{F}$ telle que $A_n \nearrow A$.
Montrer que $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$.

Exercice 1 (2 p.). Soient A, B, C, D des parties de l'ensemble X . Si $A \subset C$ et $B \subset D$, montrer
que $A \cap B \subset C \cap D$.

Exercice 2 (4 p.). Soit (X, \mathcal{F}) un espace mesurable. Prouver ou réfuter les affirmations suivantes.

a) Si $A \subset X$, alors χ_A est mesurable.

b) Si $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $\{x \in X ; \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) > 0\}$ est mesurable.

Exercice 3 (4 p.). Calculer $\liminf_{n \rightarrow \infty} (1 + \cos(n\pi)) n$.

Exercice 4 (9 p.). Nous travaillons dans \mathbb{R} , avec la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ et la mesure de Lebesgue ν_1 .

a) Si I est un intervalle compact de \mathbb{R} , alors nous notons \tilde{I} l'union des deux intervalles obtenus en enlevant de I l'intervalle ouvert qui a le même centre que I et dont la longueur est un tiers de celle de I . Exemple : si $I = [-3, 3]$ (de centre 0), alors l'intervalle ouvert qui est enlevé est $] - 1, 1[$, et donc $\tilde{I} = [-3, -1] \cup [1, 3]$.

De manière équivalente, si $I = [a, b]$ alors $\tilde{I} = [a, a + (b - a)/3] \sqcup [a + 2(b - a)/3, b]$.

(i) Dessiner \tilde{I} si $I = [0, 1]$ et si $I = [0, 1/3]$.

(ii) Montrer que \tilde{I} est un borélien, et calculer $\nu_1(\tilde{I})$ en fonction de $\nu_1(I)$.

b) Nous construisons par récurrence une suite $(C_j)_{j \geq 0}$ décroissante d'ensembles de la manière suivante :

1. $C_0 = [0, 1]$.

2. Si C_j s'écrit comme une union finie d'intervalles fermés d. d. d. : $C_j = \sqcup_{\ell=1}^m I_{\ell}$, alors C_{j+1} est défini comme $C_{j+1} = \sqcup_{\ell=1}^m \tilde{I}_{\ell}$.

(i) Dessiner C_0, C_1, C_2 .

(ii) Montrer que C_j est un borélien, $\forall j$.

(iii) Calculer $\nu_1(C_j)$, $j = 0, 1, 2$.

(iv) Proposer et montrer une formule pour $\nu_1(C_j)$.

(v) Posons $C = \bigcap_{j \geq 0} C_j$. Calculer $\nu_1(C)$.

