Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 3^{e} année
Mesure et intégration — Année 2018-2019

Devoir surveillé #4
–le 10 décembre 2018, durée 60 minutes–

Consignes. a) Préciser la nature des intégrales qui interviennent dans les calculs.
b) Justifier l'utilisation des résultats théoriques (continuité des intégrales à paramètre, théorème de Fubini, etc.) et préciser à quel type d'intégrale s'applique le résultat utilisé.

Définitions, formules et résultats utiles. a) $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}$, $\forall a \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} a > 0$.
c) La fonction Γ d'Euler est définie par la formule $\displaystyle\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$, $\forall x > 0$.
d) L'intégrale généralisée $\displaystyle I(y) = \int_0^y \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$ est convergente, $\forall y > 0$. (Ceci servira dans l'exercice 3.)

Exercice 1 (7 p.). En calculant, à l'aide du théorème de Fubini, de deux façons différentes l'intégrale $\displaystyle I = \int_{]0,\infty[\times[0,1]} e^{-x}\sin(2xy)\,dx\,dy$, déterminer *la valeur numérique* de $\displaystyle J = \int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin^2(x)}{x}\,dx$. (La réponse attendue ne consiste pas à réécrire J comme une autre intégrale.)

Exercice 2 (9 p.). Pour $\alpha > 0$, on pose

$$J(\alpha) = \int_{]0,\infty[\times]0,\infty[} e^{-(xy^2+x/y^2)}x^{\alpha-1/2}\,dx\,dy.$$

On considère l'application

$$\Psi :]0,\infty[\times]0,\infty[\to]0,\infty[\times]0,\infty[,\ \Psi(x,y) = (u,v),\ \text{avec } u = xy^2, v = x/y^2,$$

On admet que Ψ est bijective.
a) Trouver la fonction réciproque $\Phi = \Psi^{-1}$.
b) Montrer que $\Phi :]0,\infty[\times]0,\infty[\to]0,\infty[\times]0,\infty[$ est un C^1-difféomorphisme.
c) En utilisant le changement de variables Φ, montrer que

$$J(\alpha) = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right);\ \text{ici, } \Gamma \text{ est la fonction d'Euler.}$$

Exercice 3 (14 p.). Pour $y \geq 0$, soit $\displaystyle F(y) = \int_0^\infty \frac{\exp(-(x^2+1)y)}{1+x^2}\,dx$. Soit $\displaystyle J = \int_0^\infty \exp(-x^2)\,dx$.
a) Montrer que F est continue sur $[0,\infty[$.
b) Calculer $F(0)$.
c) Proposer, *sans justifier du théorème utilisé*, une formule pour calculer $\ell = \lim_{y\to\infty} F(y)$. Déterminer ℓ à partir de cette formule.
d) Proposer, *sans justifier du théorème utilisé*, la formule de $F'(y)$ pour $y \geq 0$. À partir de cette formule, pensez-vous que F est dérivable en 0 ? Pourquoi ?
e) À partir de la formule trouvée au point précédent (que l'on admet comme vraie pour $y > 0$), montrer que $\displaystyle F'(y) = -e^{-y}\frac{J}{\sqrt{y}}$, $\forall y > 0$.
f) En utilisant les questions a), b) et e) et la convergence de $I(y)$ (voir le résultat utile d)), montrer que

$$F(y) = \frac{\pi}{2} - J\int_0^y \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt,\ \forall y > 0.$$

g) Pour finir, retrouver, à partir des questions c) et f), la valeur de J.