Université Claude Bernard Lyon 1
Mesure et intégration

Licence de mathématiques 3^{e} année
Année 2019-2020

Devoir surveillé #1
–le 7 octobre 2019–
–durée 45 minutes–

Question de cours (4 p.). Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable. Soit $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
1. $f_i : X \to \mathbb{R}$ est mesurable, $i = 1, \ldots, n$;
2. pour tout $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$, $f^{-1}(B) \in \mathscr{T}$.

Exercice 1 (3 p.). Prouver ou réfuter les affirmations suivantes.
a) Un borélien est un ouvert ou un fermé.
b) Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Si $A \in \mathscr{T}$, alors $\mu(X) = \mu(A) + \mu(A^c)$.

Exercice 2 (3 p.). Calculer $\liminf\limits_{n\to\infty} (n+1)^{(-1)^n}$.

Exercice 3 (4 p.). Nous travaillons dans $\mathbb{R}$, avec la tribu borélienne $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ et la mesure de Lebesgue ν_1.
a) Calculer $\nu_1(\mathbb{Q})$.
b) Soit $f = \chi_{\mathbb{Q}}$. Existe-t-il une fonction continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f = g$ ν_1-p.p. ?

Exercice 4 (5 p.). Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et soit $g : X \to \mathbb{R}$, $g := \exp(f)$. Montrer que

$$[f \text{ est mesurable}] \iff [g \text{ est mesurable}].$$

Exercice 5 (3 p.). Soient A_1, A_2, B_1, B_2 des parties de l'ensemble X. Montrer que

$$(A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2).$$