Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 3e année
Mesure et intégration — Année 2020–2021

Contrôle continu
– le vendredi 13 novembre 2020 –
– durée 90 minutes –

Consignes

1. Le seul document accepté est le support complet de cours, sous forme papier. Il ne doit pas contenir des éléments de correction des exercices.
2. Pas d'ordinateur, tablette, téléphone, calculatrice, montre connectée, ou autre objet connecté.
3. Pour chaque intégrale de la forme $\int_a^b f(x)\,dx$, préciser s'il s'agit d'une intégrale de Riemann, généralisée et/ou par rapport à la mesure de Lebesgue; justifier son existence et préciser si les résultats utilisés concernent les intégrales de Riemann, généralisées ou par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice # 1. (6 p.) Pour $x > 0$ et $t > 0$, soit $f(t,x) := \dfrac{\exp(-x) - \exp(-tx)}{x}$.

a) Montrer que pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $t > 0$, soit $F(t) := \displaystyle\int_0^\infty f(t,x)\,dx$.

b) Montrer que F est continue sur $]0,\infty[$.

c) Montrer que F est dérivable sur $]0,\infty[$.

d) Calculer $F'(t)$ et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t > 0$.

Exercice # 2. (6 p.) Pour $y > 0$, soit $f_y(x,t) := \dfrac{1}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)}$, avec $x, t \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que f_y est λ_2-intégrable sur $[0,1] \times \mathbb{R}_+$.

b) Soit $g(y,t) := \displaystyle\int_0^1 f_y(x,t)\,dx$. Montrer que g est λ_2-intégrable sur $]0,1] \times \mathbb{R}_+$.

c) Trouver la valeur de l'intégrale $I := \displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt$.

On admettra l'identité

$$\frac{1}{x^2-y^2}\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{1}{x^2-y^2}\frac{y^2}{1+y^2t^2} = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)},\ \forall\, x, y > 0 \text{ tels que } x \neq y,\ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice # 3. (4 p.) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty[$ une fonction borélienne. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \to [0,\infty]$,

$$g(t) := \int_{[t,t+t^2]} f(t, x + e^t)\,d\nu_1(x), \forall\, t \in \mathbb{R},$$

est borélienne.

Exercice # 4. (4 p.) Soit $f : [1,\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $|f(x)| \leq \dfrac{1}{x^2}$, $\forall\, x \geq 1$. Montrer que

$$\int_1^\infty \left(e^{-f(x)} - 1\right)\,dx = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n!} \int_1^\infty f^n(x)\,dx.$$