Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 3$^{\text{e}}$ année

Mesure et intégration — Année 2020–2021

Contrôle continu

– le vendredi 13 novembre 2020 –

– barème –

Exercice # 1. (6 p.) Pour $x > 0$ et $t > 0$, soit $f(t, x) := \dfrac{\exp(-x) - \exp(-tx)}{x}$.

a) Montrer que pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(t, x)$ est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $t > 0$, soit $F(t) := \displaystyle\int_0^\infty f(t, x)\, dx$.

Étude de l'intégrale généralisée correspondante : 1,5 p. Conclusion : 0,5 p.

b) Montrer que F est continue sur $]0, \infty[$.

Majoration : 1 p. Intégrabilité de la majorante : 0,5 p. Les autres conditions : 0,5 p.

c) Montrer que F est dérivable sur $]0, \infty[$.

Majoration et intégrabilité de la majorante : 0,5 p. Les autres conditions : 0,5 p.

d) Calculer $F'(t)$ et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t > 0$.

Calcul de $F'(t)$: 0,5 p. Calcul de $F(t)$: 0,5 p.

Exercice # 2. (6 p.) Pour $y > 0$, soit $f_y(x, t) := \dfrac{1}{(1 + x^2t^2)(1 + y^2t^2)}$, avec $x, t \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que f_y est λ_2-intégrable sur $[0, 1] \times \mathbb{R}_+$.

Application justifiée du théorème de Tonelli local : 0,5 p. Conclusion : 1 p.

b) Soit $g(y, t) := \displaystyle\int_0^1 f_y(x, t)\, dx$. Montrer que g est λ_2-intégrable sur $]0, 1] \times \mathbb{R}_+$.

Application justifiée du théorème de Tonelli local : 1 p. Conclusion : 2 p.

c) Trouver la valeur de l'intégrale $I := \displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt$.

Application justifiée du théorème de Tonelli local : 0,5 p. Conclusion : 1 p.

On admettra l'identité

$$\frac{1}{x^2 - y^2}\frac{x^2}{1 + x^2t^2} - \frac{1}{x^2 - y^2}\frac{y^2}{1 + y^2t^2} = \frac{1}{(1 + x^2t^2)(1 + y^2t^2)},\ \forall\, x, y > 0 \text{ tels que } x \neq y,\ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice # 3. (4 p.) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty[$ une fonction borélienne. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \to [0, \infty]$,

$$g(t) := \int_{[t, t+t^2]} f(t, x + e^t)\, d\nu_1(x), \forall\, t \in \mathbb{R},$$

est borélienne.

La fonction $(t, x) \mapsto f(t, x + e^t)\, \chi_{[t,t^2]}(x)$ est borélienne : 2,5 p. Conclusion via le théorème de Tonelli : 1,5 p.

Variante : la fonction $(t, x) \mapsto f(t, x + e^t)$ est borélienne : 2 p. L'ensemble $\{(t, x)\,;\ t \leq x \leq t^2\}$ est borélien : 0, 5 p. Conclusion via le théorème de Tonelli local : 1,5 p.

Exercice # 4. (4 p.) Soit $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $|f(x)| \leq \dfrac{1}{x^2}, \forall\, x \geq 1$. Montrer que

$$\int_1^\infty \left(e^{-f(x)} - 1\right)\, dx = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n!} \int_1^\infty f^n(x)\, dx.$$

Développement en série de l'intégrande à gauche : 0,5 p.

Étude de l'intégrale de Lebesgue $\displaystyle\int_{[1,\infty[} f^n\, d\nu_1$, $n \geq 1$: 2 p.

Application correcte du théorème 7.22 : 1,5 p.