Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 3^e année
Mesure et intégration — Année 2020–2021

Contrôle continu
– le vendredi 13 novembre 2020 –
– Corrigé des exercices # 1 et 2 –

Exercice # 1. (6 p.) Pour $x > 0$ et $t > 0$, soit $f(t,x) := \dfrac{\exp(-x) - \exp(-tx)}{x}$.

a) Montrer que pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $t > 0$, soit $F(t) := \displaystyle\int_0^\infty f(t,x)\,dx$.

b) Montrer que F est continue sur $]0,\infty[$.

c) Montrer que F est dérivable sur $]0,\infty[$.

d) Calculer $F'(t)$ et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t > 0$.

Solution (TT).

a) Soit $t > 0$ fixé. Remarquons d'abord que $\lim_{x\to 0} f(t,x) = t-1$. En particulier la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est prolongeable par continuité en 0 et en utilisant le critère de Riemann et le fait que $\lim\limits_{x\to\infty} x^2|f(t,x)| = 0$, on conclut que cette fonction est absolument intégrable dans le sens généralisé et donc Lebesgue intégrable sur $]0,\infty[$.

b) Remarquons d'abord que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue pour tout $x > 0$. Pour appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètre, il suffit de trouver, pour tous $0 < a < 1 < b$, une fonction $g_{a,b} \colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ qui est intégrable et telle que $|f(t,x)| \le g_{a,b}(x)$ pour tout $t \in [a,b]$. Posons $g_{a,b}(x) := \dfrac{\exp(-ax) - \exp(-bx)}{x}$. L'inégalité $|f(t,x)| \le g_{a,b}(x)$ est une conséquence du fait que la fonction $t \mapsto \exp(-tx)$ est monotone et g est ingégrable par le même argument que dans a) (sauf que la limite en 0 est $b-a$).

c) d) On a que $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \exp(-tx)$. Soit $a > 0$. Pour tout $t \in [a,\infty[$, $|\exp(-tx)| \le \exp(-ax)$, et la fonction $x \mapsto \exp(-ax)$ est intégrable sur $[0,\infty[$ (son intégrale vaut $1/a$) ; on peut donc appliquer le théorème de la dérivée d'une intégrale à paramètre et conclure que $F'(t)$ existe pour tout $t > 0$ et

$$F'(t) = \int_0^\infty \exp(-tx)\,dx = \frac{1}{t}.$$

La fonction $1/t$ étant continue, on peut appliquer le théorème de Leibniz–Newton et obtenir pour tout $t > 0$:

$$F(t) = F(1) + \int_1^t \frac{1}{s}\,ds = 0 + \ln t = \ln t.$$

(Attention : l'intégrale ci-dessus est une intégrale orientée, c'est-à-dire de Riemann.) □

Exercice # 2. (6 p.) Pour $y > 0$, soit $f_y(x,t) := \dfrac{1}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)}$, avec $x, t \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que f_y est λ_2-intégrable sur $[0,1] \times \mathbb{R}_+$.

b) Soit $g(y,t) := \displaystyle\int_0^1 f_y(x,t)\,dx$. Montrer que g est λ_2-intégrable sur $]0,1] \times \mathbb{R}_+$.

c) Trouver la valeur de l'intégrale $I := \int_0^\infty \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt$.

On admettra l'identité

$$\frac{1}{x^2-y^2}\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{1}{x^2-y^2}\frac{y^2}{1+y^2t^2} = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)},\ \forall\, x,y>0 \text{ tels que } x\neq y,\ \forall\, t\in\mathbb{R}.$$

Solution (JK).

a) Pour $y > 0$, $(x,t) \mapsto f_y(x,t)$ est continue, donc mesurable et $0 \le f_y(x,t) \le h(x,t) := \dfrac{1}{1+y^2t^2}$. Par Tonelli [1]

$$\int_{[0.1]\times\mathbb{R}_+} h(x,t)d\lambda_2(x,t) = \int_{\mathbb{R}_+}\int_{[0,1]} h(x,t)dxdt = \int_{\mathbb{R}_+}\frac{1}{1+y^2t^2}dt < +\infty$$

par le critère de Riemann. Donc f_y est λ_2-intégrable.

b) $x \mapsto f_y(x,t)$ est continue sur $[0,1]$ donc l'intégrale suivante est bien définie dans le sens de Riemann :

$$g(y,t) = \int_0^1 f_y(x,t)dx = \frac{1}{1+y^2t^2}\int_0^1\frac{1}{1+x^2t^2}dx \overset{z=xt}{=} \frac{1}{1+y^2t^2}\int_0^t\frac{1}{1+z^2}\frac{dz}{t} = \frac{\arctan(t)}{(1+y^2t^2)t}.$$

g est continue sur $[0,1]\times\mathbb{R}$, donc mesurable, et positive. Par Tonelli[1] l'intégrale de Lebesgue de g est

$$\int_{[0,1]\times\mathbb{R}_+} g(y,t)d\lambda_2(y,t) = \int_0^\infty\frac{\arctan(t)}{t}\int_0^1\frac{1}{1+y^2t^2}dydt = \int_0^\infty\left(\frac{\arctan(t)}{t}\right)^2 dt.$$

Comme $t \mapsto \left(\dfrac{\arctan(t)}{t}\right)^2$ est continue et positive, son intégrale de Lebesgue coïncide avec son intégrale généralisée. De plus, $\left(\dfrac{\arctan(t)}{t}\right)^2$ est équivalente en $0+$ à 1 et équivalente en $+\infty$ à $\dfrac{\pi^2}{4t^2}$. Son intégrale est alors convergente (critère de Riemann), donc g est λ_2-intégrable.

c) Nous avons, pour $x \neq y$,

$$\int_0^\infty\frac{1}{x^2-y^2}\frac{x^2}{1+x^2t^2}dt \overset{z=xt}{=} \frac{x^2}{x^2-y^2}\int_0^\infty\frac{1}{1+z^2}\frac{dz}{x} = \frac{x}{x^2-y^2}\frac{\pi}{2}$$

et, avec l'indication et en utilisant la linéarité de l'intégrale (pour $x \neq y$),

$$\int_0^\infty\frac{1}{1+y^2t^2}\frac{1}{1+x^2t^2}dt = \frac{x-y}{x^2-y^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{x+y}. \tag{1}$$

$(x,y,t) \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)}$ est positive et continue sur $[0,1]\times[0,1]\times\mathbb{R}_+$, donc mesurable. Par Tonelli (global ou local, voir la note dessous), nous pouvons calculer I en échangeant l'ordre des intégrations dans l'intégrale triple :

$$I = \int_{[0,1]\times[0,1]\times\mathbb{R}_+}\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)}d\lambda_3 = \frac{\pi}{2}\int_{[0,1]\times[0,1]}\frac{d\lambda_2}{x+y}.$$

Le fait qu'on a dérivé (1) seulement pour $x \neq y$ ne joue pas de rôle, car $\{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]; x = y\}$ est de mesure 0. Finalement, en vue de la continuité de l'intégrande, on peut calculer l'intégrale comme une intégrale de Riemann :

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]\times[0,1]}\frac{d\lambda_2}{x+y} &= \int_0^1\int_0^1\frac{dy}{x+y}\,dx = \int_0^1(\ln(1+x)-\ln(x))dx\\ &= [(1+x)\ln(1+x) - x\ln(x)]_0^1 = 2\ln 2.\end{aligned}$$

D'où $I = \pi\ln 2$. □

1. global, sur $[0,1]\times\mathbb{R}$ muni de la tribu et mesure de Lebesgue, ou local car $[0,1]\times\mathbb{R}$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$