Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 3e année
Mesure et intégration — Année 2019–2020

**Devoir surveillé** #2
–le 4 novembre 2019–
–durée 90 minutes–

**Consignes.** Pour chaque intégrale de la forme $\int_a^b f(x)\,dx$, préciser s'il s'agit d'une intégrale de Riemann, généralisée et/ou par rapport à la mesure de Lebesgue ; justifier son existence et préciser si les résultats utilisés concernent les intégrales de Riemann, généralisées ou par rapport à la mesure de Lebesgue.

**Question de cours** #1 **(2 p.).** Énoncer et prouver le lemme de Fatou.

**Question de cours** #2 **(4 p.).** Soient $(X,\mathscr{T})$ un espace mesuré et $(Y,\mathscr{S},\nu)$ un espace mesuré, avec $\nu(Y)<\infty$.

Montrer que, pour tout $E\in\mathscr{T}\otimes\mathscr{S}$, l'application $X\ni x\mapsto \nu(E_x)$ est $\mathscr{T}$-mesurable.

**Exercice** #1 **(8 p.)** Nous admettons la convergence de l'intégrale généralisée $I=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Pour tout $t>0$, posons $S(t)=\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{x}\sin x\,dx$.

a) Montrer que $S$ est de classe $C^1$ sur $]0,\infty[$ et calculer $S'(t)$ pour $t>0$.

b) Déterminer $\lim\limits_{t\to\infty} S(t)$ et calculer $S(t)$ pour tout $t>0$.

c) Soit $A>0$.

(i) Montrer que $\left|\int_A^\infty \frac{\mathrm{e}^{-tx}\sin x}{x}\,dx\right|\leqslant \frac{2}{A}$, $\forall\, t\geq 0$.

(ii) Prouver que $\lim\limits_{t\to 0+}\int_0^A \frac{\mathrm{e}^{-tx}\sin x}{x}\,dx=\int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx$.

d) En déduire la valeur de $I=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$.

**Exercice** #2 **(3 p.)** Soit $f:[0,\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Pour $s>0$, soit

$$\mathscr{L}(s)=\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx.$$

Montrer que $\mathscr{L}$ est bien définie et calculer $\lim\limits_{s\to\infty}\mathscr{L}(s)$.

**Exercice** #3 **(5 p.)** Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ une fonction borélienne. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1\left[\exp\left(\frac{f(x)}{n}\right)-1\right]dx.$$

Indication : On pourra utiliser le développement en série entière de l'exponentielle pour montrer que la fonction $y\mapsto \frac{e^y-1}{y}$, avec $y>0$, est croissante.