

Topologie-Analyse fonctionnelle

Agreg Maths

Références

Gourdon (Analyse)
Li (Analyse fonctionnelle)
Sonntag (Topologie et Analyse fonctionnelle)
Zuily-Queffelec.

Notations

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}
ev=espace vectoriel
evn=espace vectoriel normé
sev=sous-ev

1 Normes et distances

1.1 Normes

Définition 1.1.1. Soit E un \mathbb{K} -ev. Une *norme* sur E est une application $\|\cdot\| : E \rightarrow [0, \infty[$ telle que

- (séparation) $\|x\| > 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$,
- (homogénéité) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ pour tous $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$,
- (inégalité triangulaire) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tout $(x, y) \in E \times E$.

Le couple $(E, \|\cdot\|)$ est un \mathbb{K} -evn.

Définition 1.1.2. Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur E sont dites *équivalentes* si il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que

$$\|x\|_1 \leq c_1 \|x\|_2, \quad \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1 \quad \forall x \in E.$$

Exemple 1.1.3. $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ est un \mathbb{K} -evn.

Exemple 1.1.4. Pour $p \in [1, \infty[$ on définit sur \mathbb{K}^n la norme

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } p < \infty, \quad \text{et } \|x\|_\infty = \max_{j=1, \dots, n} |x_j|.$$

L'inégalité triangulaire est appelée inégalité de Minkowski, et non-triviale pour $p < \infty$. Elle découle de la convexité de $t \mapsto t^p$ pour $p \in [1, \infty[$, et peut se montrer aussi comme conséquence de l'inégalité de Hölder. Toutes ces normes sont équivalentes.

Exemple 1.1.5. Si X est un ensemble et E un evn, l'ensemble $\mathcal{B}(X, E)$ des applications bornées $f : X \rightarrow E$ est un evn muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_E.$$

Exemple 1.1.6. Si (X, μ) est un espace mesuré et $p \in [1, \infty]$, l'espace $L^p(\mu)$ des fonctions $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ mesurables (modulo égalité μ -p.p.) telles que

$$\infty > \|f\|_{L^p} := \begin{cases} \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } p < \infty, \\ \inf\{M > 0: \mu(|f| > M) = 0\} & \text{si } p = \infty, \end{cases}$$

est un evn. L'inégalité triangulaire est appelée inégalité de Minkowski, et non-triviale pour $p < \infty$. Elle découle de la convexité de $t \mapsto t^p$ pour $p \in [1, \infty[$, et peut se montrer aussi comme conséquence de l'inégalité de Hölder. On rencontrera souvent les cas particuliers où $X \subset \mathbb{R}^n$ est muni de la mesure de Lebesgue $\mu = dx$, ou d'une mesure à densité $\mu = w(x)dx$. A noter aussi le cas $X = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage, on note ℓ^p l'espace L^p correspondant : il s'agit de l'espace des suites $u = (u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\infty > \|u\|_{\ell^p} = \begin{cases} \left(\sum_{n \geq 0} |u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } p < \infty, \\ \sup_{n \geq 0} |u_n| & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Exemple 1.1.7. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert, on munit l'espace $C_b^k(U)$ des fonctions k fois différentiables à dérivées (jusqu'à l'ordre k) continues et bornées, de la norme

$$\|f\|_{C_b^k(U)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_U |\partial^\alpha f|.$$

Exemple 1.1.8. Pour $U \subset \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in (0, 1)$, on munit l'espace $C^{0,\alpha}(U)$ des fonctions continues α -Hölderiennes bornées, de la norme

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(U)} = \sup_U |f| + \sup_{x \neq y \in U} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Exemple 1.1.9. Si E est un evn et F un sev, l'application $\|\cdot\|_E$ restreinte à F définit une norme sur F , appelée norme induite. Par exemple, on peut munir $\mathbb{K}[X]$, identifié aux suites nulles à partir d'un certain rang, de la norme induite par celle de ℓ^p pour tout $p \in [1, \infty]$.

1.2 Distances

Définition 1.2.1. Une *distance* sur un ensemble X est une application $d: X \times X \rightarrow [0, \infty[$ telle que

(séparation) pour tout $(x, y) \in X \times X$, $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$,

(symétrie) $d(x, y) = d(y, x)$ pour tout $(x, y) \in X \times X$,

(inégalité triangulaire) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in X \times X \times X$.

Le couple (X, d) est un *espace métrique*.

Exemple 1.2.2. Si E est un evn, alors $d(x, y) = \|x - y\|_E$ définit une distance sur E .

Exemple 1.2.3. *Distance induite.* Si X est un espace métrique et $A \subset X$ une partie de X , la distance d_X restreinte à $A \times A$ définit une distance sur A .

En particulier, si E est un evn et $X \subset E$ un sous-ensemble (pas nécessairement sev), alors $d(x, y) = \|x - y\|_E$ définit une distance sur X .

Exemple 1.2.4. *Distance transportée par une application injective.* Si Y est un espace métrique et $f: X \rightarrow Y$ est injective, alors

$$d_f(x, x') = d_Y(f(x), f(x')),$$

définit une distance sur Y . La distance induite sur $A \subset X$ est un cas particulier correspondant à $f: A \rightarrow Y, x \mapsto f(x)$.

Exemple 1.2.5. Sur $X = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$,

$$d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|,$$

définit une distance, avec la convention $\arctan(\pm\infty) = \pm\pi/2$. (Cette distance permet de définir de manière unifiée les notions de limite finie ou infinie d'une suite réelle.)

Exemple 1.2.6. *Distance produit.* Si X_1, X_2 sont des espaces métriques, sur $X = X_1 \times X_2$ on définit la distance

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)).$$

Plus généralement on définit ainsi une distance sur tout produit fini d'espaces métriques. On pourrait remplacer $\max(d_1, d_2)$ par $\|(d_1, d_2)\|$ pour n'importe quelle norme sur \mathbb{R}^2 (ou sur \mathbb{R}^n pour un produit de n espaces métriques).

Exemple 1.2.7. *Distance discrète.* Sur un ensemble X on peut toujours définir la distance

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Elle peut s'avérer très utile pour chercher des contre-exemples, ou pour tester un énoncé sur les espaces métriques.

Exemple 1.2.8. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $X = C^0(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur Ω (non nécessairement bornées). Etant donnée une suite de compacts $K_j \subset \Omega$ telle que $\Omega = \bigcup K_j$ (par exemple $K_j = \{x \in \Omega : \|x\|_2 \leq j, \text{dist}(x, \partial\Omega) \leq j^{-1}\}$ pour $j \geq 1$), on définit les semi-normes

$$p_j(f) = \sup_{K_j} |f|,$$

qui vérifient les axiomes de norme, sauf celui de séparation, et on pose

$$d(f, g) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \min(p_j(f - g), 1) \quad \forall f, g \in X,$$

qui définit une distance sur X , correspondant à la notion de convergence uniforme sur tout compact.

Exemple 1.2.9. *Suite de semi-normes.* On peut généraliser l'exemple précédent : si X est un espace vectoriel muni d'une suite de semi-normes p_j (i.e. des applications vérifiant la définition de norme, sauf l'axiome de séparation) telles que pour tout $x \in X$,

$$(p_j(x) = 0 \forall j \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x = 0),$$

alors

$$d(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \min(p_j(x - y), 1) \quad \forall x, y \in X,$$

définit une distance sur X . On définit ainsi des distances sur $C^\infty(\Omega)$, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $L_{loc}^p(\Omega)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, etc. On a $d(x_n, x) \rightarrow 0$ si et seulement si $p_j(x_n - x) \rightarrow 0$ pour tout j (mais la vitesse de convergence n'est pas nécessairement uniforme en j).

2 Topologie des espaces métriques

Soit (X, d) un espace métrique.

2.1 Ouverts et fermés

Définition 2.1.1. Pour $x \in X$ et $r > 0$ on définit la *boule ouverte* de centre x et de rayon r comme l'ensemble

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\},$$

et la *boule fermée* de centre x et de rayon r comme l'ensemble

$$B_f(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}.$$

Remarque 2.1.2. Attention : une boule de rayon plus grand peut être strictement incluse dans une boule de rayon plus petit (si on s'autorise à changer le centre, bien sûr), par exemple dans $X = \{-2\} \cup [0, \infty[\subset \mathbb{R}$ muni de la distance induite, on a $B(-2, 4) \subsetneq B(0, 3)$.

Remarque 2.1.3. Attention : une boule fermée peut être égale à la boule ouverte correspondante. Par exemple, dans tout ensemble non vide muni de la distance discrète, on a $B(x, r) = B_f(x, r)$ pour tout $r \in]0, 1[$.

Définition 2.1.4. Un sous-ensemble $U \subset X$ est dit *ouvert* si pour tout $x \in U$ il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$.

Un sous-ensemble $F \subset X$ est dit *fermé* si $X \setminus F$ est ouvert.

Un sous-ensemble $V \subset X$ est un *voisinage* de $x \in X$ si il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset V$.

Remarque 2.1.5. Un sous-ensemble est ouvert si et seulement si il est voisinage de tous ses points, si et seulement si il est une union (quelconque) de boules ouvertes.

Exemple 2.1.6. Les boules ouvertes sont des ouverts.

Les boules fermées sont des fermés.

Les sous-ensembles triviaux X et \emptyset sont à la fois ouvert et fermé.

Exemple 2.1.7. Dans \mathbb{R} , $]0, 1[$ est ouvert, $[0, 1]$ est fermé, $[0, 1[$ n'est ni ouvert, ni fermé.

Exemple 2.1.8. *Topologie induite.* Si $A \subset X$ est muni de la distance induite, $U \subset A$ est ouvert dans A si et seulement si il existe $V \subset X$ ouvert dans X tel que $U = A \cap V$. Par exemple, $[0, 1[$ est ouvert dans $[0, \infty[$ muni de la distance induite par celle de \mathbb{R} .

Exemple 2.1.9. *Topologie produit.* Si $X \times Y$ est muni de la distance produit, $U \subset X \times Y$ est ouvert si et seulement si pour tout $(x, y) \in U$ il existe $r > 0$ tel que

$$B^X(x, r) \times B^Y(y, r) \subset U.$$

Proposition 2.1.10. Une union (quelconque) d'ouverts est un ouvert.

Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Démonstration. Exercice □

Remarque 2.1.11. On peut énoncer des propriétés analogues pour les fermés (exercice).

Remarque 2.1.12. Attention : une intersection quelconque d'ouverts n'est pas nécessairement ouverte. Par exemple $\bigcap_{n \geq 1}]-1/n, 1/n[= \{0\}$ dans \mathbb{R} .

2.2 Intérieur, adhérence et densité

Le fait que la notion d'ouvert soit stable par union quelconque, et de fermé stable par intersection quelconque, permet de définir les notions d'intérieur et d'adhérence.

Définition 2.2.1. Soit $A \subset X$. L'intérieur de A , noté $\overset{\circ}{A}$ ou $\text{int } A$, est le plus grand ouvert inclus dans A (de manière équivalente, l'union de tous les ouverts inclus dans A).

L'adhérence de A , notée \bar{A} ou $\text{adh } A$, est le plus petit fermé contenant A (l'intersection de tous les fermés contenant A).

La frontière de A , notée ∂A , est l'ensemble $\bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Remarque 2.2.2. Un sous-ensemble A est ouvert si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$, et fermé si et seulement si $A = \bar{A}$.

Remarque 2.2.3. Attention : ces notions dépendent de l'espace ambiant. L'adhérence de $]0, 1[$ dans \mathbb{R} n'est pas la même que l'adhérence de $]0, 1[$ dans $]0, +\infty[$.

Exemple 2.2.4. Dans un evn E , on a $\text{adh } B(x, r) = B_f(x, r)$ et $\text{int } B_f(x, r) = B(x, r)$ pour tous $x \in E$ et $r > 0$. Dans un espace métrique, ce n'est pas nécessairement le cas, par exemple dans $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ on a $\text{adh } B(0, 1) = \{0\}$ mais $B_f(0, 1) = \{0, \pm 1\}$.

Exercice 2.2.5. Soit $A \subset X$ et $x \in X$. On a les équivalences

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow (\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset) \Leftrightarrow 0 = d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a).$$

(On pourra démontrer l'équivalence entre les négations de ces assertions.)

Exercice 2.2.6. Dans un evn, l'adhérence d'un sev est un sev.

Définition 2.2.7. Une partie $A \subset X$ est dite *dense* si $\bar{A} = X$.

Remarque 2.2.8. En générale il est pratique de connaître une partie dense dénombrable, ou une partie dense composée d'éléments ayant des propriétés particulières « sympathiques ».

Exemple 2.2.9. Les nombres rationnels \mathbb{Q} sont denses dans \mathbb{R} .

Exemple 2.2.10. Les matrices inversibles sont denses dans $M_n(\mathbb{K})$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Exemple 2.2.11. Les matrices diagonalisables sont denses dans $M_n(\mathbb{C})$.

Exemple 2.2.12. *Théorème de Stone-Weierstrass.* Les fonctions polynomiales sont denses dans $C^0(K)$ pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$.

Exemple 2.2.13. *Théorème de Féjèr.* Les polynômes trigonométriques sont denses dans $C_{2\pi, per}^0(\mathbb{R})$.

Exemple 2.2.14. Pour tout espace mesuré (X, μ) , les fonctions étagées sont denses dans $L^p(\mu)$.

Exemple 2.2.15. Pour tout espace métrique X localement compact, et μ mesure borélienne régulière sur X , par exemple $X \subset \mathbb{R}^n$ et $\mu = |w(x)| dx$ pour un certain poids $w \in L_{loc}^1(X, dx)$, les fonctions continues à support compact sont denses dans $L^p(X, \mu)$ pour $p < \infty$. *Attention* : ce n'est pas vrai pour $p = \infty$.

Exemple 2.2.16. Pour tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et toute mesure borélienne régulière sur U (par exemple $\mu = w(x)dx$ comme dans l'exemple précédent), les fonctions C^∞ à support compact sont denses dans $L^p(U, d\mu)$ pour tout $p < \infty$. *Attention* : formellement, ce résultat implique la densité de $C_c^0(U)$ dans $L^p(U, d\mu)$, mais la preuve de la densité des fonctions lisses utilise la densité des fonctions continues, il ne faut donc pas présenter la deuxième comme un corollaire de la première !

Exercice 2.2.17. Si E est un evn et $H \subset E$ un hyperplan (i.e., il existe $v \in E \setminus H$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}v$), alors H est fermé ou dense.

2.3 Suites

Définition 2.3.1. Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X . On dit que (x_n) converge vers $x \in X$, on note $x_n \rightarrow x$, et on appelle x la *limite* de (x_n) , si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, x_n \in B(x_n, \varepsilon).$$

On dit que $x \in X$ est une *valeur d'adhérence* de (x_n) si

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0 : x_n \in B(x, \varepsilon).$$

Remarque 2.3.2. Un élément $x \in X$ est valeur d'adhérence d'une suite (x_n) si et seulement si il existe une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers x .

Proposition 2.3.3. Caractérisation séquentielle de l'adhérence *Si $A \subset X$ on a*

$$\bar{A} = \left\{ x \in X : \exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}, x_n \rightarrow x \right\}.$$

Démonstration. Exercice. □

Remarque 2.3.4. En particulier, A est fermé si et seulement si toute suite d'éléments de A qui converge dans X a sa limite dans A .

Exemple 2.3.5. *Topologie produit.* Une suite $((x_{1,n}, \dots, x_{k,n}))_{n \geq 0} \in (X_1 \times \dots \times X_k)^{\mathbb{N}}$ converge si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ la suite $(x_{i,n})_{n \geq 0}$ converge dans X_i .

Exemple 2.3.6. *Topologie induite.* Soit $A \subset X$. Une suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ converge dans A si et seulement si elle converge dans X et sa limite est dans A .

Exemple 2.3.7. Dans $C^0(\Omega)$ pour $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, muni de la distance définie précédemment $d(f, g) = \sum_j 2^{-j} \min(1, \sup_{K_j} |f - g|)$ avec (K_j) une suite de compacts dont l'union est Ω , une suite (f_n) converge vers f si et seulement si pour tout compact $K \subset \Omega$ on a $f_n \rightarrow f$ uniformément. On a des propriétés analogues pour les distances définies à partir d'une suite de semi-normes, cf Exemple 1.2.9.

3 Applications continues

3.1 Propriétés générales

Définition 3.1.1. Soient X, Y deux espaces métrique et $f: X \rightarrow Y$. On dit que f est *continue* en $x_0 \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(B^X(x_0, \delta)) \subset B^Y(f(x_0), \varepsilon).$$

On dit que f est continue sur X si et seulement si elle est continue en tout point de X .

Proposition 3.1.2. Caractérisations équivalentes

- Une fonction $f: X \rightarrow Y$ est continue en $x \in X$ si et seulement si l'image réciproque par f de tout voisinage de $f(x)$ dans Y est un voisinage de x dans X .
- Une fonction $f: X \rightarrow Y$ est continue sur X si et seulement si l'image réciproque par f de tout ouvert de Y est un ouvert de X , si et seulement si l'image réciproque de tout fermé de Y est un fermé de X .
- Une fonction $f: X \rightarrow Y$ est continue en $x \in X$ si et seulement si pour toute suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \rightarrow x \in X$ on a $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Démonstration. Exercice. □

Exemple 3.1.3. Les fonctions « usuelles » $I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues : polynômes, fonctions trigonométriques, exponentielle (fonctions analytiques) etc.

Exemple 3.1.4. La distance $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Exemple 3.1.5. Soit $A \subset X$. La fonction $d_A: X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $d_A(x) = \inf_{a \in A} d(x, a)$ est continue.

Exemple 3.1.6. Si $f: X \rightarrow X'$ et $g: X' \rightarrow X''$ sont continues, la composée $g \circ f: X \rightarrow X''$ est continue.

Exemple 3.1.7. *Topologie induite.* Si $A \subset X$, l'inclusion $A \rightarrow X$, $x \mapsto x$ est continue. Si $f: X \rightarrow Y$ est continue, sa restriction $f|_A: A \rightarrow Y$ est donc continue. Attention : toute application continue $A \rightarrow Y$ n'est pas prolongeable à une application continue $X \rightarrow Y$.

Exemple 3.1.8. *Topologie produit.* Dans l'espace produit $X = X_1 \times \dots \times X_N$, chaque projection $\pi_j: X \rightarrow X_j$ est continue.

Exemple 3.1.9. Si E est un \mathbb{K} -evn, les applications $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}$, $+: E \times E \rightarrow E$ et $\cdot: \mathbb{K} \times E \rightarrow E$ sont continues.

Proposition 3.1.10. Si $f, g: X \rightarrow Y$ sont continues et $f = g$ sur $A \subset X$, alors $f = g$ sur \bar{A} . En particulier, deux fonctions continues égales sur une partie dense sont égales.

Exemple 3.1.11. La fonction \det est C^∞ sur $M_n(\mathbb{R})$ car polynomiale. Pour $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $H \in M_n(\mathbb{R})$ et $\varepsilon \rightarrow 0$ on a

$$\begin{aligned} \det(A + \varepsilon H) &= \det A \det(I_n + \varepsilon A^{-1}H) = \det A (1 + \varepsilon \operatorname{tr}(A^{-1}H) + O(\varepsilon^2)) \\ &= \det A + \varepsilon \operatorname{tr}({}^t(\operatorname{com} A)H) + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

où $\operatorname{com} A$ est la comatrice de A . On a donc $\nabla \det(A) = \operatorname{com} A$ pour tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$, et cette identité est vraie sur $M_n(\mathbb{R})$ par densité des matrices inversibles et continuité des applications $\nabla \det$ et com . (Bien sûr cela peut aussi s'obtenir par calcul direct des dérivées partielles sans passer par les matrices inversibles.)

Exemple 3.1.12. La transformée de Fourier $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ vérifie $\mathcal{F}\mathcal{F}f(x) = f(-x)$ pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (à un facteur de renormalisation près, selon la définition choisie pour \mathcal{F}) donc cette identité est vraie sur L^2 par densité et continuité.

Définition 3.1.13. *Cas particuliers importants d'applications continues.*

— Une fonction $f: X \rightarrow Y$ est *uniformément continue* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x \in X, f(B^X(x, \delta)) \subset B^Y(f(x), \varepsilon),$$

i.e. le choix de δ dans la définition de la continuité est indépendant du point $x \in X$.

— Une fonction $f: X \rightarrow Y$ est *Lipschitzienne* de constante $K \geq 0$ si

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq K d_X(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Remarque 3.1.14. On a les implications

$$\text{Lipschitzienne} \Rightarrow \text{uniformément continue} \Rightarrow \text{continue},$$

mais elles sont toutes strictes.

Remarque 3.1.15. Les notions de fonction Lipschitzienne et uniformément continue sont spécifiques aux espaces métriques, alors que la continuité est une notion topologique (qui ne nécessite que de définir une famille d'ouverts, pas nécessairement liés à une distance).

Exercice 3.1.16. Parmi les exemples d'applications continues ci-dessus, déterminer lesquelles sont uniformément continues ou Lipschitziennes.

Définition 3.1.17. Un *homéomorphisme* est une application $f: X \rightarrow Y$ continue, bijective, et telle que $f^{-1}: Y \rightarrow X$ soit continue.

Exemple 3.1.18. Les fonctions $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow]-\pi/2, \pi/2[$ et $\arctan: \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ sont des homéomorphismes.

Exemple 3.1.19. Soit E un \mathbb{K} -evn. Les translations et homothéties

$$\tau_x: y \mapsto y + x, \quad h_\lambda: y \mapsto \lambda \cdot y,$$

pour $x \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, sont des homéomorphismes.

Exemple 3.1.20. *Décomposition polaire* L'application $O(n) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R}), (Q, S) \mapsto QS$ est un homéomorphisme.

Remarque 3.1.21. Si X et Y sont homéomorphes, l'application

$$\{\text{ouverts de } X\} \rightarrow \{\text{ouverts de } Y\}, U \mapsto f(U),$$

est une bijection.

Exercice 3.1.22. L'espace métrique \mathbb{R} muni de la distance usuelle $|\cdot|$ n'est pas homéomorphe à \mathbb{R} muni de la distance discrète.

Exercice 3.1.23. On note $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$, et pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_\alpha: [\alpha, \alpha + 2\pi[\rightarrow \mathbb{S}^1, \quad \theta \mapsto e^{i\theta}.$$

Cette fonction est continue et bijective. Est-ce un homéomorphisme ? Montrer que sa restriction à $]\alpha, \alpha + 2\pi[$ est un homéomorphisme sur son image.

3.2 Cas des applications linéaires dans un evn

Théorème 3.2.1. Soient E, F des \mathbb{K} -evn et $f: E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors f est continue si et seulement si

$$\exists M > 0: \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E \quad \forall x \in E.$$

Démonstration. Exercice. □

Remarque 3.2.2. On a en fait les assertions équivalentes suivantes :

- (i) f continue
- (ii) f continue en 0
- (iii) f bornée sur la boule unité fermée $B_f(0, 1)$
- (iv) f bornée sur la sphère unité $S(0, 1) = \{x \in E: \|x\|_E = 1\}$
- (v) $\exists M > 0$ t.q. $\|f(x)\| \leq M \|x\|$ pour tout $x \in E$
- (vi) f est Lipschitzienne
- (vii) f est uniformément continue.

Remarque 3.2.3. On a des résultats similaires pour les applications multilinéaires. Par exemple, $B: E \times F \rightarrow G$ bilinéaire est continue si et seulement si

$$\|B(x, y)\|_G \leq M \|x\|_E \|y\|_F \quad \forall (x, y) \in E \times F.$$

Définition 3.2.4. On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F . Il s'agit d'un espace vectoriel, qu'on munit de la *norme subordonnée*

$$\|f\| = \|f\|_{\mathcal{L}_c(E, F)} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F.$$

Remarque 3.2.5. La norme $\|f\|$ est le plus petit réel M tel que $\|f(x)\| \leq M \|x\|$ pour tout $x \in E$.

Proposition 3.2.6. Pour toutes $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ linéaires continues, on a

$$\|g \circ f\| \leq \|g\| \cdot \|f\|.$$

Démonstration. Exercice. □

Exemple 3.2.7. Soit $f: (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_\infty)$ linéaire de matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ dans les bases canoniques, i.e.

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right) e_i \quad \forall x \in \mathbb{K}^n.$$

Pour tout $x \in \mathbb{K}^n$ on a

$$\|f(x)\|_\infty = \max_{i=1 \dots m} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \max_{i=1 \dots m} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \|x\|_\infty,$$

donc f est continue. On peut montrer que

$$\|f\| = \max_{i=1 \dots m} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right).$$

Remarque 3.2.8. Si on munit \mathbb{K}^n de $\|\cdot\|_p$ et \mathbb{K}^m de $\|\cdot\|_q$ pour des exposants $p, q \geq 1$, l'application f reste continue car ces normes sont équivalentes à $\|\cdot\|_\infty$ (en fait toutes les normes sont équivalentes en dimension finie comme on le verra plus bas) mais la valeur de la norme subordonnée change.

Exemple 3.2.9. Si $A \in S_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique et $f: (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ l'application linéaire correspondante, alors

$$\|f\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Exemple 3.2.10. On munit $\mathbb{K}[X]$ de la norme induite par ℓ^∞ . L'application linéaire

$$D: \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X], P \mapsto P',$$

n'est alors pas continue, car pour $n \in \mathbb{N}$ on a $\|X^n\|_\infty = 1$ mais $\|D(X^n)\|_\infty = n \rightarrow \infty$.

Exemple 3.2.11. Soit $p \in [1, \infty]$ et p' l'exposant conjugué. Soit (X, μ) un espace mesuré. Pour $g \in L^{p'}(\mu)$ on définit l'application linéaire

$$M_g: L^p(\mu) \rightarrow L^1(\mu), f \mapsto fg.$$

Grâce à l'inégalité de Hölder on a

$$\|M_g(f)\|_{L^1} \leq \|g\|_{L^{p'}} \|f\|_{L^p},$$

donc M_g est continue, et $\|M_g\| \leq \|g\|_{L^{p'}}$. On peut en fait montrer que $\|M_g\| = \|g\|_{L^{p'}}$.

Exemple 3.2.12. Si X est un espace métrique et E un evn, pour tout $x \in X$ l'application linéaire

$$\delta_x: C_b^0(X, E) \rightarrow E, f \mapsto f(x),$$

est continue, de norme subordonnée $\|\delta_x\| = 1$.

4 Espaces complets

4.1 Généralités

Définition 4.1.1. Une suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ est dite *de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n, m \geq n_0, d(x_n, x_m) \leq \varepsilon,$$

(c'est-à-dire $\sup_{n, m \geq N} d(x_n, x_m) \rightarrow 0$ lorsque $N \rightarrow \infty$). L'espace métrique (X, d) est dit *complet* si toute suite de Cauchy converge. Un evn complet est appelé espace de *Banach*.

Remarque 4.1.2. *Quelques propriétés des suites de Cauchy*

- Si une suite est convergente, alors elle est de Cauchy.
- Si une suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence, alors elle converge. Cette propriété peut s'avérer utile pour démontrer la complétude d'un espace métrique.
- Si $d(x_n, x_{n+1}) < a_n$ et $\sum_n a_n < \infty$, alors (x_n) est de Cauchy.

Exercice 4.1.3. Un evn E est de Banach si et seulement si toute série absolument convergente est convergente :

$$\sum_{n \geq 0} \|x_n\|_E < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n \geq 0} x_n \text{ converge dans } E.$$

Pour montrer que c'est une condition suffisante, on pourra, étant donnée une suite de Cauchy (x_n) , trouver une sous-suite telle que $\sum_k (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ soit absolument convergente.

Exemple 4.1.4. L'espace $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est un Banach. En effet, si une suite (u_n) est de Cauchy dans \mathbb{R} , on montre qu'elle est bornée. On obtient alors une valeur d'adhérence, par exemple en considérant

$$\ell = \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} u_k \right),$$

qui est bien définie car la suite $v_n = \sup_{k \geq n} u_k$ est décroissante et minorée. On en déduit alors que (u_n) converge vers ℓ .

Exemple 4.1.5. L'espace $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$ est un Banach pour tout $p \in [1, \infty)$, car chaque composante d'une suite de Cauchy est de Cauchy dans \mathbb{R} .

Exemple 4.1.6. L'espace $(\mathbb{C}^d, \|\cdot\|_p)$ est un Banach pour tout $p \in [1, \infty]$.

Exemple 4.1.7. Soit X un ensemble (quelconque) et Y un espace métrique complet. L'espace métrique $\mathcal{B}(X, Y)$ des applications bornées (i.e. d'image contenue dans une boule fixée de Y), muni de la distance $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$, est complet. En effet, si (f_n) est de Cauchy, alors pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy dans l'espace complet Y , et converge donc vers un élément $f(x) \in Y$. Ceci définit une application $f: X \rightarrow Y$, qui vérifie, en passant à la limite $m \rightarrow \infty$ dans la définition d'une suite de Cauchy,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0, \forall x \in X \ d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon, \quad \text{donc } d_\infty(f_n, f) \leq \varepsilon.$$

En particulier f est bornée, et $f_n \rightarrow f$ dans $\mathcal{B}(X, Y)$.

Exemple 4.1.8. Si X, Y sont des espaces métriques, et Y est complet, alors l'espace $C_b^0(X, Y)$ des applications continues et bornées, muni de d_∞ , est complet. Cela résulte de l'exemple précédent, et du fait qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue (exercice).

Exemple 4.1.9. Soient E, F des evn. Si F est un Banach, alors l'evn $\mathcal{L}_c(E, F)$ des applications linéaires continues $E \rightarrow F$, muni de la norme subordonnée, est un Banach. En effet, si (F_n) est de Cauchy alors $(F_n x)$ est de Cauchy dans F pour tout $x \in E$, et admet donc une limite $F(x)$. On obtient facilement en passant à la limite simple que $x \mapsto F(x)$ est une application linéaire. D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, m \geq n_0$ on ait

$$\|F_n x - F_m x\|_E \leq \|F_n - F_m\| \|x\|_E \leq \varepsilon \|x\|_E,$$

et en faisant tendre $m \rightarrow \infty$ on en déduit que F est continue et $F_n \rightarrow F$ dans $\mathcal{L}_c(E, F)$.

Remarque 4.1.10. Une conséquence importante de l'exemple ci-dessus est la suivante : si E est un espace de Banach et $u \in \mathcal{L}_c(E)$ est une application linéaire continue de E dans lui-même, telle que $\|u\| < 1$, alors $\text{id}_E - u$ est inversible dans $\mathcal{L}_c(E)$. En effet pour tout $n \geq 0$ on a $\|u^n\| \leq \|u\|^n$, donc la série $\sum u^n$ est absolument convergente dans $\mathcal{L}_c(E)$, donc convergente, et on vérifie que sa limite v vérifie $(\text{id}_E - u)v = v(\text{id}_E - u) = \text{id}_E$ (exercice). Ceci implique que l'ensemble des applications linéaires continues inversibles est un ouvert.

Théorème 4.1.11. Soit E, F des evn, $U \subset E$ un ouvert, et $X = \mathcal{D}_b(U, F)$ l'evn des applications $f: U \rightarrow F$ différentiables, bornées et à différentielle bornée, muni de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{D}_b} = \sup_U \|f\|_F + \sup_U \|Df\|.$$

Si F est un Banach, alors X est un Banach.

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans X . Alors les suites (f_n) et (Df_n) sont de Cauchy dans $\mathcal{B}(U, F)$ et $\mathcal{B}(U, \mathcal{L}_c(E, F))$, donc d'après l'exemple 4.1.7 convergent uniformément vers des applications

$$f: U \rightarrow F, \quad G: U \rightarrow \mathcal{L}_c(E, F).$$

Il reste à montrer que $f \in X$ et $Df = G$. Soient $x \in U$ et $r > 0$ tel que $B^E(x, r) \subset U$. Rappelons que f est différentiable en x de différentielle $G(x)$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta \in (0, r)$ tel que pour tout $h \in B^E(0, \delta)$ on ait

$$\|f(x+h) - f(x) - G(x)h\|_F \leq \varepsilon \|h\|_E. \quad (1)$$

Soient donc $\varepsilon > 0$ et $h \in B^E(0, r)$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|f(x+h) - f(x) - G(x)h\| &\leq \|(f - f_n)(x+h) - (f - f_n)(x)\| \\ &\quad + \|f_n(x+h) - f_n(x) - Df_n(x)h\| \\ &\quad + \|Df_n(x)h - G(x)h\|. \end{aligned}$$

On estime le premier terme grâce au théorème des accroissements finis : pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ on a

$$\|(f_n - f_m)(x+h) - (f_n - f_m)(x)\| \leq \sup_{[x, x+h]} \|D(f_n - f_m)\| \|h\| \leq \|f_n - f_m\|_{\mathcal{D}_b} \|h\|$$

Puisque f_n est de Cauchy, en passant à la limite $m \rightarrow \infty$ dans le membre de gauche on en déduit l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|(f - f_n)(x+h) - (f - f_n)(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \|h\| \quad \forall n \geq n_0.$$

On a donc, pour $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \|f(x+h) - f(x) - G(x)h\| &\leq \frac{\varepsilon}{3} \|h\| + (\sup_U \|Df_n - G\|) \|h\| \\ &\quad + \|f_n(x+h) - f_n(x) - Df_n(x)h\|. \end{aligned}$$

Puisque Df_n converge uniformément vers G , il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_U \|Df_n - G\| \leq \varepsilon/3$, et pour $n \geq \max(n_0, n_1)$ on a alors

$$\|f(x+h) - f(x) - G(x)h\| \leq \frac{2\varepsilon}{3} \|h\| + \|f_n(x+h) - f_n(x) - Df_n(x)h\|.$$

En appliquant la définition de la différentiabilité de f_n pour un tel n fixé, on obtient donc bien l'existence de $\delta \in (0, r)$ tel que (1) soit vérifiée pour tout $h \in B^E(0, \delta)$. \square

Exemple 4.1.12. On obtient facilement comme conséquence du théorème 4.1.11, et du fait que la convergence uniforme préserve la continuité, que si $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'evn $C_b^k(U)$ est un Banach.

Théorème 4.1.13. Soit (X, μ) un espace mesuré et $p \in [1, \infty]$. L'espace $L^p(\mu)$ est complet.

Démonstration pour $p < \infty$. Soit (f_n) une suite de Cauchy. On construit par récurrence une sous-suite (f_{n_k}) telle que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \leq \frac{1}{2^{k+1}} \quad \forall k \geq 0.$$

Pour $x \in X$ on définit

$$g_N(x) = \sum_{k=0}^N |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|, \quad g(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} g_N(x).$$

La fonction $g: X \rightarrow \infty$ est bien définie car $(g_N(x))$ est croissante pour tout $x \in X$, et est mesurable comme limite simple de fonctions mesurables. D'après le théorème de convergence monotone on a

$$\int g^p d\mu = \lim \int (g_N)^p d\mu.$$

Or l'inégalité de Minkowski implique

$$\int (g_N)^p d\mu = \|g_N\|_{L^p}^p \leq \left(\sum_{k=0}^N \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} \right)^p \leq \left(\sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^{k+1}} \right)^p = 1.$$

On en déduit donc que $g \in L^p(\mu)$. En particulier, l'ensemble $Z = \{g = \infty\}$ est de mesure nulle. Pour tout $x \in X \setminus Z$, la série $\sum (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$ est absolument convergente dans \mathbb{C} qui est complet, donc convergente. Ainsi la suite $(f_{n_k}(x))$ est convergente, on note $f(x)$ sa limite. Ceci est étant vrai pour tout $x \in X \setminus Z$, on a donc $f_n \rightarrow f$ au sens de la convergence presque partout, et f est mesurable. Il reste à montrer que $f \in L^p$ et que la convergence a bien lieu en norme L^p . Sur $X \setminus Z$ on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|f_{n_k} - f| = \left| \sum_{\ell=k}^{\infty} (f_{n_{\ell+1}} - f_{n_\ell}) \right| \leq \sum_{\ell=k}^{\infty} |f_{n_{\ell+1}} - f_{n_\ell}| \leq g \in L^p.$$

On en déduit en particulier que $f \in L^p$ puis, par convergence dominée, que $\|f_{n_k} - f\|_{L^p} \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$. La suite de Cauchy (f_n) admet donc une valeur d'adhérence, ce qui implique qu'elle converge. \square

Remarque 4.1.14. Comme corollaire de la preuve, on obtient que toute suite qui converge dans $L^p(\mu)$ admet une sous-suite qui converge presque partout, et qui est dominée par une fonction dans L^p .

Exercice 4.1.15. A l'aide de la remarque ci-dessus, montrer que si $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue et vérifie $|F(z)| \leq C|z|^p$ pour un certain $p \in [1, \infty[$ et $C > 0$, alors l'application $f \mapsto F \circ f$ est continue de $L^p(\mu)$ dans $L^1(\mu)$.

Exemple 4.1.16. Distance induite. Si (X, d) est un espace métrique complet, tout fermé $F \subset X$ est complet muni de la distance induite. (Réciproquement, si $A \subset X$ est complet pour la distance induite, alors A est fermé.) Par exemple, pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et tous $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, l'espace métrique $C^0(I, B_f(y_0, r)) \subset C_b^0(I, \mathbb{R}^n)$ est complet (ceci est utilisé dans la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz).

Exemple 4.1.17. Distance produit. Si X_1, \dots, X_n sont complets, alors $X_1 \times \dots \times X_n$ est complet.

Remarque 4.1.18. Attention : la complétude est une notion métrique, pas topologique. Deux espaces métriques peuvent être homéomorphes (et donc avoir les mêmes suites convergentes), l'un complet et l'autre non. ainsi, $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow]-\pi/2, \pi/2[$ est un homéomorphisme, mais $] - \pi/2, \pi/2[\subset \mathbb{R}$ n'est pas complet, car pas fermé.

Exercice 4.1.19. Si $f: X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme bi-uniformément continu (i.e. f et f^{-1} sont uniformément continues), alors X est complet si et seulement si Y est complet.

4.2 Applications de la complétude

On voit ici les applications liées au théorème de point fixe, et au théorème de prolongement des applications uniformément continues.

Théorème 4.2.1. Point fixe. Soit $f: X \rightarrow X$ une application contractante : il existe $k \in [0, 1[$ tel que

$$d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Alors f admet un unique point fixe : l'équation $x = f(x)$ admet une unique solution $x \in X$.

Démonstration. Unicité. si x_0, x_1 sont deux points fixes, alors

$$d(x_0, x_1) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq k d(x_0, x_1),$$

donc $d(x_0, x_1) = 0$ car $k \in [0, 1[$.

Existence. On obtient un point fixe comme limite de la suite récurrente définie par

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_0 \in X \text{ quelconque.}$$

En effet, on a

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) = d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq k d(x_{n+1}, x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

donc par récurrence $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$. Puisque la série $\sum k^n$ est convergente, la suite (x_n) est donc de Cauchy et converge vers un certain $x \in X$ car X est complet. Puisque f est Lipschitzienne donc continue on a $f(x_n) \rightarrow f(x)$, et donc $x = \lim x_{n+1} = \lim f(x_n) = f(x)$. \square

Exercice 4.2.2. *Point fixe à paramètre.* Si $f: \Lambda \times X \rightarrow X, (\lambda, x) \mapsto f_\lambda(x)$ est continue et il existe $k \in [0, 1[$ tel que f_λ soit k -contractante pour tout $\lambda \in \Lambda$, alors f_λ admet un point fixe x_λ . Montrer que $\lambda \mapsto x_\lambda$ est une application continue.

Exercice 4.2.3. *Une variante du théorème de point fixe.* Si f^{or} est contractante pour un certain $r \in \mathbb{N}^*$, alors f admet un unique point fixe.

Le théorème de point fixe sert à résoudre des équations non linéaires.

Exemple 4.2.4. *Théorème d'inversion locale* Si E, F sont des espaces de Banach, U un ouvert de E , $f: U \rightarrow F$ une application C^1 , et si $Df(x_0)$ est inversible dans $\mathcal{L}_c(E, F)$ pour un certain $x_0 \in U$, alors f est localement inversible. Pour démontrer ce théorème, on peut sans perte de généralité supposer $x_0 = 0$ et $f(x_0) = 0$. Inverser localement f revient à montrer que, pour $y \in F$ fixé proche de 0, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x \in E$ proche de 0. Si f était linéaire, on aurait $f(x) = Df(0)x$ et il suffirait de poser $y = Df(0)^{-1}x$. L'idée est donc de *linéariser* l'équation, en considérant le reste non-linéaire comme une erreur de taille négligeable :

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow Df(0)x = y - (f(x) - Df(0)x) \\ x &= Df(0)^{-1} [y - (f(x) - Df(0)x)] =: F_y(x). \end{aligned}$$

On a ainsi réécrit l'équation comme un problème de point fixe, et puisque f est C^1 on a

$$DF_y(x) = Df(0)^{-1} [Df(0) - Df(x)] \approx 0 \text{ pour } x \approx 0.$$

Grâce au théorème des accroissements finis, F_y est donc contractante sur un voisinage de 0. De plus, pour y assez proche de 0, on peut choisir une petite boule fermée $X = B_f(0, \varepsilon)$ telle que $F_y(X) \subset X$, et on est donc en situation d'appliquer le théorème de point fixe, ce qui permet d'inverser f localement. On peut ensuite démontrer que f^{-1} ainsi obtenue est de classe C^1 .

Exemple 4.2.5. Le théorème des fonctions implicites peut se démontrer de manière similaire.

Exemple 4.2.6. *Théorème de Cauchy-Lipschitz* Si E est un espace de Banach, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et $f: I \times E \rightarrow E$ est continue et localement Lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable, pour tous $(t_0, y_0) \in I \times E$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que le problème de Cauchy

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

admet une unique solution sur le segment $J_\varepsilon = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. Pour démontrer ce théorème, on réécrit l'équation comme une équation de point fixe

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds =: \Phi(y)(t).$$

Les hypothèses permettent de choisir $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tels que l'espace complet $X = C^0(J_\varepsilon; B(y_0, \delta))$ soit stable par Φ , et que Φ y soit contractante. (Il faut ensuite vérifier que l'unicité est valable même sans restriction sur les valeurs de y .)

Théorème 4.2.7. Prolongement des applications uniformément continues. *Soit X un espace métrique (pas nécessairement complet), $D \subset X$ une partie dense, et Y un espace métrique complet. Si $f: D \rightarrow Y$ est uniformément continue, elle admet un unique prolongement continu $\bar{f}: X \rightarrow Y$, et \bar{f} est uniformément continue.*

Démonstration. L'unicité est claire par densité de D et continuité de \bar{f} . Démontrons l'existence. Pour tout $x \in X$ et toute suite $(x_n) \in D^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \rightarrow x$, l'uniforme continuité de f implique que la suite $(f(x_n))$ est de Cauchy dans Y , et admet donc une limite, qu'on note $\bar{f}(x, (x_n))$, et qui dépend a priori du choix de la suite $(x_n) \in D^{\mathbb{N}}$. Toutefois, si $(y_n) \in D^{\mathbb{N}}$ converge vers x , on peut définir une suite $(z_n) \in D^{\mathbb{N}}$ par $z_{2n} = x_n$ et $z_{2n+1} = y_n$, qui converge aussi vers x , et on a alors

$$\bar{f}(x, (x_n)) = \lim f(x_n) = \lim f(z_n) = \lim f(y_n) = \bar{f}(x, (y_n)),$$

la valeur de \bar{f} ne dépend donc que de x , et on a donc définie $\bar{f}: X \rightarrow Y$ telle que $\bar{f} = f$ sur D . Il reste à montrer que \bar{f} est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Par uniforme continuité de f il existe $\delta > 0$ tel que

$$d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon \forall x, y \in D \text{ t.q. } d(x, y) \leq 2\delta.$$

Soit maintenant $x, y \in X$ tels que $d(x, y) \leq \delta$. Par densité de D il existe des suites $(x_n), (y_n) \in D^{\mathbb{N}}$ telles que $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ et $d(x_n, y_n) \leq 2\delta$. On a donc $d(f(x_n), f(y_n)) \leq \varepsilon$, et par passage à la limite on obtient $d(\bar{f}(x), \bar{f}(y)) \leq \varepsilon$. \square

Corollaire 4.2.8. *Si E est un evn, $D \subset E$ un sev dense, et F un Banach, toute application linéaire continue $f: D \rightarrow F$ admet un unique prolongement linéaire continu $\bar{f}: E \rightarrow F$.*

Exemple 4.2.9. Pour toute $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a l'identité de Parseval

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

On peut donc étendre de manière unique la transformation de Fourier à une application $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$.

Exemple 4.2.10. Soit $H \subset \mathbb{R}^n$ l'hyperplan $\{x_n = 0\} = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, et $\mathbb{R}_+^n = \{x_n > 0\}$ le demi-espace associé. On munit H de la mesure de Lebesgue $(n-1)$ -dimensionnelle et on fixe $p \in [1, \infty[$. On peut montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support dans $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$, on a

$$\|f|_H\|_{L^p(H)} \leq C \left(\|f\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)} + \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)} \right).$$

Grâce au théorème d'extension, ceci permet de définir, pour des fonctions $f \in L^p$ dont les dérivées distributionnelles $\partial_j f$ sont dans L^p , la « restriction » $f|_H \in L^p(H)$, alors que f n'est définie a priori que presque partout. Il s'agit d'un théorème de « trace » dans les espaces de Sobolev.

Exemple 4.2.11. Le théorème de prolongement permet de montrer qu'une solution maximale non globale d'une équation différentielle ordinaire $y' = f(t, y)$ sort de tout compact : sinon, l'équation implique que y est Lipschitzienne, donc uniformément continue, donc prolongeable à une extrémité de son intervalle de définition, contredisant la maximalité.

Exemple 4.2.12. Si $f:]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et telle que f' admette une limite finie en a^+ , alors f est prolongeable en une fonction uniformément continue sur $[a, b]$. On peut de plus montrer que ce prolongement admet une dérivée (à droite) en a , égale à $\lim_{a^+} f'$.

5 Compacité

5.1 Définition et premières propriétés

Définition 5.1.1. Un espace métrique (X, d) est *compact* si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un recouvrement fini (propriété de Borel-Lebesgue) :

$$X = \bigcup_{i \in I} V_i, V_i \text{ ouverts} \quad \Rightarrow \quad \exists \{i_1, \dots, i_N\} \subset I, X = \bigcup_{k=1}^N V_{i_k}.$$

Exemple 5.1.2. Tout espace métrique fini est compact.

Exemple 5.1.3. L'espace \mathbb{R} muni de $|\cdot|$ n'est pas compact : on ne peut pas extraire de recouvrement fini de $\mathbb{R} = \bigcup_{n \geq 1}]-n, n[$.

Exemple 5.1.4. *Topologie produit.* Tout produit (fini) de compacts est compact. Ceci découle du fait que la projection d'un ouvert sur l'un des espaces du produit est un ouvert de cet espace.

Exemple 5.1.5. *Topologie induite.* Une partie $A \subset X$ est compacte si et seulement si de tout recouvrement de A par des ouverts de X on peut extraire un recouvrement fini :

$$A \subset \bigcup_{i \in I} V_i, V_i \text{ ouverts de } X \quad \Rightarrow \quad \exists \{i_1, \dots, i_N\} \subset I, A \subset \bigcup_{k=1}^N V_{i_k}.$$

Exercice 5.1.6. Si une suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ converge vers $x \in X$, le sous-ensemble $K = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{x\}$ est une partie compacte de X .

Les parties compactes d'un espace métriques sont nécessairement fermées :

Proposition 5.1.7. *Soit X un espace métrique. Toute partie compacte $K \subset X$ est fermée.*

Démonstration. On montre que $X \setminus K$ est ouvert : soit $y \in X \setminus K$. Pour tout $x \in K$, posons $r_x = \frac{1}{2}d(x, y)$, de sorte que les boules ouvertes $B(x, r_x)$ et $B(y, r_x)$ sont disjointes. Puisque $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, r_x)$ et K est compact, il existe un sous-ensemble fini $J \subset K$ tel que $K \subset \bigcup_{x \in J} B(x, r_x)$. Pour $r = \min_{x \in J} r_x > 0$, la boule ouverte $B(y, r)$ est alors incluse dans $X \setminus K$. \square

La réciproque n'est bien sûr pas vraie (X est fermé dans lui-même), mais les fermés d'un espace compact sont compacts :

Proposition 5.1.8. *Soit X un espace métrique compact. Si $F \subset X$ est un fermé, alors F est compact.*

Démonstration. Si $F \subset \bigcup_{i \in I} V_i$ avec V_i des ouverts de X , alors $X = \bigcup_{i \in I} V_i \cup (X \setminus F)$ est un recouvrement ouvert de X , donc il existe $\{i_1, \dots, i_N\}$ tels que $X = \bigcup_{k=1}^N V_{i_k} \cup (X \setminus F)$, et on a alors $F \subset \bigcup_{k=1}^N V_{i_k}$. \square

Remarque 5.1.9. Tout compact $K \subset X$ est nécessairement borné (i.e. inclus dans une boule), car pour tout $x \in X$, du recouvrement ouvert $K \subset \bigcup_{r>0} B(x, r)$ on peut extraire un recouvrement fini, et on a donc $K \subset B(x, R)$ pour un certain $R > 0$.

Remarque 5.1.10. En passant au complémentaire dans la définition, on voit que X est compact si et seulement si de toute intersection vide de fermés, on peut extraire une intersection vide finie. Cela implique en particulier que toute intersection décroissante de fermés non vides est non vide :

$$F_{n+1} \subset F_n \text{ fermés non vides } \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset.$$

Etant donnée une suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$, on peut appliquer ceci à la suite de fermés

$$F_n = \text{adh} \{x_k : k \geq n\},$$

et on en déduit que leur intersection, qui est exactement l'ensemble des valeurs d'adhérences de (x_n) est non vide : toute suite de X admet donc une valeur d'adhérence.

En fait on a le

Théorème 5.1.11. Bolzano-Weierstrass. *Un espace métrique X est compact si et seulement si toute suite de X admet une valeur d'adhérence.*

On a démontré dans la remarque précédente qu'il s'agit bien d'une condition nécessaire. Le fait que cette condition est suffisante est une conséquence des deux lemmes suivants :

Lemme 5.1.12. Nombre de Lebesgue. *On suppose que toute suite de X admet une valeur d'adhérence. Alors, pour tout recouvrement ouvert $X = \bigcup_{i \in I} V_i$, il existe $\varepsilon > 0$ (nombre de Lebesgue du recouvrement ouvert) tel que*

$$\forall x \in X, \exists i \in I : B(x, \varepsilon) \subset V_i.$$

Lemme 5.1.13. Précompacité. *On suppose que toute suite de X admet une valeur d'adhérence. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots, x_N \in X$ tels que*

$$X = \bigcup_{i=1}^N B(x_i, \varepsilon).$$

Démonstration du Lemme 5.1.12. Supposons par l'absurde qu'il existe un recouvrement ouvert $X = \bigcup V_i$ n'admettant pas de nombre de Lebesgue. Il existe alors une suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la boule ouverte $B(x_n, 2^{-n})$ ne soit incluse dans aucun des V_i . L'hypothèse sur X permet d'extraire une sous-suite convergente $x_{n_k} \rightarrow x \in X$. Puisque les V_i recouvrent X il existe $i \in I$ tel que $x \in V_i$, et puisque V_i est ouvert il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset V_i$. D'autre part, pour k assez grand, on a $d(x_{n_k}, x) < r/2$ et $2^{-n_k} < r/2$, donc $B(x_{n_k}, 2^{-n_k}) \subset V_i$, ce qui contredit la définition de la suite (x_n) . \square

Démonstration du Lemme 5.1.13. Supposons par l'absurde que la conclusion ne soit pas vérifiée. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel qu'aucune union finie de boules ouvertes de rayon ε ne recouvre X . Ceci permet de construire par récurrence une suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $d(x_n, x_k) \geq \varepsilon$ pour tous $n \neq k$. Aucune sous-suite de (x_n) ne peut donc être de Cauchy, ce qui contredit le fait que (x_n) admette une valeur d'adhérence. \square

Remarque 5.1.14. De la caractérisation de la compacité en terme de valeurs d'adhérences, on peut déduire les résultats suivants :

- Tout espace métrique complet et précompact (c'est-à-dire, qui vérifie la conclusion du Lemme 5.1.13) est compact. En effet la précompacité permet d'extraire de toute suite une sous-suite qui est de Cauchy, grâce au fait qu'une suite incluse dans une union finie d'ensembles a une infinité de terme dans au moins un de ces ensembles.
- Tout espace métrique compact est complet.
- Dans X compact, si $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence, alors (x_n) converge.

Proposition 5.1.15. *Les compacts de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ sont les parties fermées et bornées.*

Démonstration. On a déjà vu que toute partie compacte d'un espace métrique est nécessairement fermée et bornée. Dans \mathbb{K}^n la réciproque est vraie car toute suite bornée admet une valeur d'adhérence (obtenue par exemple en prenant la limite supérieure ou inférieure de chaque composante). \square

5.2 Applications continues sur un compact

Théorème 5.2.1. *Si X est compact et $f: X \rightarrow Y$ continue, alors $f(X) \subset Y$ est compact.*

Démonstration. Si $f(X) \subset \bigcup_{i \in I} V_i$ où les V_i sont des ouverts de Y , alors X , qui est égal à l'image réciproque de $f(X)$, s'écrit comme l'union $X = \bigcup f^{-1}(V_i)$, et chaque $f^{-1}(V_i)$ est ouvert dans X par continuité de f . Puisque X est compact, il existe donc i_1, \dots, i_N tels que $X = \bigcup f^{-1}(V_{i_k})$, ce qui implique

$$f(X) = \bigcup_{k=1}^N f(f^{-1}(V_{i_k})) \subset \bigcup_{k=1}^N V_{i_k}.$$

On a donc bien démontré que $f(X)$ est compact. (Ce fait se démontre aussi facilement en utilisant le critère de Bolzano-Weierstrass.) \square

Exemple 5.2.2. Si $f: X \rightarrow Y$ est continue et bijective, et X est compact, le théorème précédent montre que l'image d'un fermé est un fermé, et on en déduit que f^{-1} est automatiquement continue.

La compacité est un outil essentiel pour démontrer l'existence d'extrema :

Exemple 5.2.3. Si X est compact, toute fonction continue $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes (car les compacts de \mathbb{R} sont les fermés bornés). Par exemple, si K_1, K_2 sont des compacts de X , il existe $x_1 \in K_1, x_2 \in K_2$ tels que $d(K_1, K_2) = d(x_1, x_2)$.

Enfin la compacité permet de rendre *uniforme* une propriété *locale*. Par exemple on a le

Théorème 5.2.4. Heine. *Si X est compact et $f: X \rightarrow Y$ est continue, alors f est uniformément continue.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue, pour tout $x \in X$ il existe $r_x > 0$ tel que $f(B(x, r_x)) \subset B(f(x), \varepsilon/2)$. Du recouvrement ouvert $X = \bigcup_{x \in X} B(x, r_x/2)$ on peut extraire un recouvrement fini : il existe $x_1, \dots, x_N \in X$ tels que

$$X = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r_{x_i}/2).$$

Posons $\delta = \min r_{x_i}/2 > 0$. Alors pour tout $x \in X$ il existe x_i tel que $x \in B(x_i, r_{x_i}/2)$, donc $B(x, \delta) \subset B(x_i, r_{x_i})$, donc par définition de r_{x_i} on a $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x_i), \varepsilon/2)$, donc en particulier $d(f(x), f(x_i)) < \varepsilon/2$, et par inégalité triangulaire $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$. \square

Remarque 5.2.5. La démonstration ci-dessus permet de démontrer que si X est compact, alors toute famille de fonctions $\mathcal{F} \subset Y^X$ équicontinue :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in X, \exists \delta > 0, \text{ t.q. } \forall f \in \mathcal{F}, \quad f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon),$$

est *uniformément* équicontinue :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ t.q. } \forall x \in X, \forall f \in \mathcal{F}, \quad f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon).$$

Le théorème de Heine permet d'approximer par convolution les fonctions continues et support compact dans \mathbb{R}^n :

Exemple 5.2.6. *Approximation de l'unité.* Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact, et $\rho_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions avec les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \int \rho_k \, dx &= 1, \\ \int |\rho_k| \, dx &\leq M \text{ pour un certain } M > 0, \\ \int_{|x| \geq \delta} |\rho_k| \, dx &\longrightarrow 0 \quad \forall \delta > 0. \end{aligned}$$

On peut alors démontrer que pour tout $\delta > 0$, on a l'inégalité

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|\rho_k \star f - f\|_\infty \leq M \sup_{|x-x'| \leq \delta} |f(x) - f(x')|.$$

Puisque f est à support compact, le théorème de Heine implique donc que cette quantité tend vers 0 lorsque $\delta \rightarrow 0$, et donc $\rho_k \star f$ converge uniformément vers f lorsque $k \rightarrow \infty$.

Exemple 5.2.7. On peut obtenir un énoncé similaire pour les fonctions continues périodiques sur \mathbb{R} , la convolution étant définie en intégrant sur une période. Ceci permet par exemple de démontrer le théorème de Féjer (les polynômes trigonométriques sont denses dans les fonctions continues périodiques).

Une autre application du théorème de Heine est le relèvement d'applications à valeurs dans le cercle unité $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$.

Exemple 5.2.8. Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$ est continue, alors il existe $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f = e^{i\varphi}$. Ce résultat est une conséquence de l'exercice 3.1.23 si f n'est pas surjective, et dans le cas général, le théorème de Heine permet de découper $[a, b]$ en un nombre fini d'intervalles sur lesquels f n'est pas surjective.

5.3 Procédé diagonal et théorème d'Ascoli

Théorème 5.3.1. Procédé diagonal.

Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, un espace compact X_k , et une suite $(u_{k,n})_{n \in \mathbb{N}} \in (X_k)^\mathbb{N}$. Alors il existe $u_k \in X_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et une extraction $n \mapsto \varphi(n)$, tels que

$$u_{k, \varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u_k \quad \text{dans } X_k$$

Remarque 5.3.2. Ce théorème implique que si (X_k, d_k) est une suite d'espaces métriques compacts, alors l'espace produit $X = \prod_{k \in \mathbb{N}} X_k = \{(x_k)_{k \in \mathbb{N}}: x_k \in X_k\}$, muni de la distance

$$d((x_k), (y_k)) = \sum_k 2^{-k} \min(1, d_k(x_k, y_k)),$$

est compact. En effet, une suite d'éléments de X converge pour cette distance, si et seulement si chacune de ses composantes converge dans X_k .

Démonstration du Théorème 5.3.1. Puisque X_0 est compact il existe une extraction φ_0 telle que

$$u_{0,\varphi_0(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u_0 \text{ dans } X_0.$$

Par récurrence on construit ainsi des extractions $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ telles que l'extraction $\psi_k = \varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_k$ vérifie

$$u_{k,\psi_k(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u_k \text{ dans } X_k.$$

Enfin on pose $\varphi(n) = \psi_n(n)$. On vérifie alors aisément que φ est strictement croissante, et que $u_{k,\varphi(n)}$ converge vers u_k dans X_k lorsque $n \rightarrow \infty$. \square

Théorème 5.3.3. Arzela-Ascoli. *Soit X et Y des espaces métriques compacts. Soit (f_n) une suite de fonctions $f_n: X \rightarrow Y$ uniformément équicontinue :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}, f_n(B(x, \delta)) \subset B(f_n(x), \varepsilon)$$

Alors il existe une sous-suite (f_{n_k}) et $f: X \rightarrow Y$ telles que f_{n_k} converge uniformément vers f .

Remarque 5.3.4. Il suffit de supposer (f_n) équicontinue, l'uniformité étant une conséquence automatique de la compacité de X . De plus, l'hypothèse de compacité de Y peut être remplacée par une hypothèse plus faible : dans la preuve ci-dessous on n'utilise que le fait que pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$ est incluse dans un compact de Y .

Démonstration du Théorème 5.3.3. Etape 1. La compacité de X implique que X est séparable : il existe une partie $D \subset X$ dense et dénombrable. En effet, pour tout $n \geq 1$ on peut trouver $x_{1,n}, \dots, x_{N(n),n}$ tels que $X = \bigcup_i B(x_{i,n}, 2^{-n})$, et l'ensemble $D = \{x_{i,n}: n \geq 1, 1 \leq i \leq N(n)\}$ est alors dense et dénombrable.

Etape 2. Quitte à ré-indexer, on note $D = \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Puisque Y est compact, on peut appliquer le procédé diagonale aux suites $y_{k,n} = f_n(x_k)$ pour obtenir une extraction φ telle que

$$f_{\varphi(n)}(x_k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} y_k =: f(x_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Etape 3. On utilise de nouveau la compacité de X pour obtenir que la suite $f_{\varphi(n)}$ est de Cauchy, uniformément en x . Soit $\varepsilon > 0$. L'uniforme équicontinuité de la suite (f_n) implique l'existence de $\delta > 0$ tel que

$$d(f_{\varphi(n)}(x), f_{\varphi(n)}(y)) \leq \varepsilon \quad \forall x, y \text{ t.q. } d(x, y) \leq \delta, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puisque $D = \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est dense dans X et que X est compact, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que

$$X = \bigcup_{k=0}^K B(x_k, \delta).$$

La convergence des suites $(f_{\varphi(n)}(x_k))_{n \geq 0}$ pour $k = 0, \dots, K$ implique l'existence d'un rang N tel que

$$d(f_{\varphi(n)}(x_k), f_{\varphi(m)}(x_k)) \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq N, \quad \forall k \in \{0, \dots, K\}.$$

Pour tous $n, m \geq N$, pour tout x dans X , on a alors, en choisissant $k \in \{0, \dots, K\}$ tel que $x \in B(x_k, \delta)$,

$$\begin{aligned} d(f_{\varphi(n)}(x), f_{\varphi(m)}(x)) &\leq d(f_{\varphi(n)}(x), f_{\varphi(n)}(x_k)) + d(f_{\varphi(n)}(x_k), f_{\varphi(m)}(x_k)) + d(f_{\varphi(m)}(x_k), f_{\varphi(m)}(x)) \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

On a donc bien montré que la suite $f_{\varphi(n)}$ est de Cauchy pour la distance uniforme, elle converge donc uniformément. \square

Exemple 5.3.5. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné, et (f_n) est une suite bornée dans $C_b^1(U)$, alors il existe une sous-suite convergeant uniformément. En effet le théorème des accroissements finis assure que (f_n) est uniformément Lipschitzienne, et en particulier prolongeable au compact $X = \bar{U}$. D'autre part $\sup |f_n|$ est borné, donc à valeurs dans le compact $Y = [-M, M]$ pour un certain $M > 0$, et on peut donc appliquer le théorème d'Arzela-Ascoli.

Exemple 5.3.6. *Théorème de Rellich.* Le théorème d'Arzela-Ascoli permet de démontrer le résultat suivant. Si $f_n \in C^1(\mathbb{R}^d)$ sont telles que

$$\text{supp}(f_n) \subset B(0, 1) \quad \text{et} \quad \|f_n\|_{L^p} + \|\nabla f_n\|_{L^p} \leq C_0,$$

alors il existe une sous suite (f_{n_k}) qui converge dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Exemple 5.3.7. *Théorème de Montel.* Une suite de fonctions holomorphes uniformément bornée sur tout compact admet une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact. En effet pour une fonction holomorphe f on a $\sup_{K_1} |f'| \leq C \sup_{K_2} |f|$ si $K_1 \subset K_2$ sont tels que $d(K_1, \mathbb{C} \setminus K_2) > 0$, ce qui permet de montrer que la suite en question est uniformément Lipschitzienne sur tout compact et d'appliquer le théorème d'Arzela-Ascoli.

Exemple 5.3.8. Une démonstration possible du théorème de Cauchy-Peano, qui assure l'existence locale d'une solution au problème de Cauchy

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

si f est continue (mais pas nécessairement Lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable), consiste à construire une suite de solutions approchées, et à en faire converger une sous-suite grâce au théorème d'Arzela-Ascoli. [La suite de solutions approchées peut être construite en appliquant un schéma numérique (par exemple la méthode d'Euler explicite) ou en régularisant f pour pouvoir lui appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz.]

5.4 Le cas des evn de dimension finie

Rappelons que dans \mathbb{K}^n muni d'une norme $\|\cdot\|_p$ ($1 \leq p \leq \infty$), les fermés bornés sont compacts. Une conséquence de ce fait est le

Théorème 5.4.1. *Si E est un \mathbb{K} -evn de dimension n , de base $\{e_1, \dots, e_n\}$, alors l'isomorphisme linéaire*

$$\varphi: (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow E, \quad x \mapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i,$$

est un homéomorphisme.

Démonstration. L'application φ est continue car pour tout $x \in \mathbb{K}^n$ on a

$$\|\varphi(x)\|_E \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\|_E \leq M \|x\|_\infty, \quad M = \sum_{i=1}^n \|e_i\|_E.$$

D'autre part, puisque la sphère unité $S = \{x \in \mathbb{K}^n : \|x\|_\infty = 1\}$ est fermé et bornée, donc compacte dans \mathbb{K}^n , la fonction continue $x \mapsto \|\varphi(x)\|_E$ y est bornée et atteint ses bornes. En particulier il existe $x_0 \in S$ tel que

$$m = \inf_{x \in S} \|\varphi(x)\|_E = \|\varphi(x_0)\|_E,$$

et on a donc $m > 0$ car $x_0 \notin \ker \varphi = \{0\}$. Pour tout $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ on a alors $z = \|x\|_\infty^{-1} x \in S$ et

$$\|\varphi(x)\|_E = \|\varphi(\|x\|_\infty z)\|_E = \|x\|_\infty \|\varphi(z)\|_E \geq m \|x\|_\infty,$$

donc $\|\varphi^{-1}(y)\|_\infty \leq m^{-1} \|y\|_E$ pour tout $y \in E$, et φ^{-1} est donc continue. □

Ce théorème a de nombreuses conséquences sur les propriétés des evn de dimension finie :

Proposition 5.4.2. *Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie. Alors :*

- *Toutes les normes sur E sont équivalentes.*
- *Les compacts de E (muni de n'importe quelle norme) sont les fermés bornés.*
- *Pour tout \mathbb{K} -evn F , les applications linéaires $E \rightarrow F$ sont toutes continues.*
- *Tout sev de E est fermé.*

Démonstration. Exercice. □

Remarque 5.4.3. Si E est un evn, tout sev de dimension finie est automatiquement complet, car les compacts (pour la norme induite par E) y sont les fermés bornés, donc toute suite de Cauchy y admet une valeur d'adhérence, et converge alors. En particulier, tout sev de dimension finie est fermé.

Exemple 5.4.4. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors l'ensemble $\mathbb{K}[A]$ des polynômes en A est un sev de $M_n(\mathbb{K})$, et donc automatiquement fermé.

Exemple 5.4.5. D'après l'exemple précédent, si $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors $\exp(\mathbb{K}[A]) \subset \mathbb{K}[A]$, puisqu'une limite de polynôme en A est un polynôme en A .

Le fait que les fermés bornés soient compacts caractérise en fait la dimension finie :

Théorème 5.4.6. Riesz. *Soit E un evn. La dimension de E est finie si et seulement si la boule unité fermée $B_f(0, 1) \subset E$ est compacte.*

Démonstration. Si $B_f(0, 1)$ est compacte, il existe $x_1, \dots, x_N \in E$ tels que

$$B_f(0, 1) \subset \bigcup_{j=1}^N B(x_j, 1).$$

Montrer que $E = \text{vect}(x_1, \dots, x_N) =: F$. En effet, si il existe $y \in E \setminus F$, alors puisque les fermés bornés de F sont compacts on peut trouver $x \in F$ tel que $d := \text{dist}(y, F) = \|y - x\|$. Alors $z := (y - x)/d \in B_f(0, 1)$ mais pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$ on a $\|z - x_j\| = \|y - x - dx_j\|/d \geq 1$, ce qui contredit la propriété définissant les x_j . □

6 Connexité

6.1 Définition et exemples

Définition 6.1.1. Un espace métrique (X, d) est *connexe* si il n'existe pas de partition de X en deux ouverts disjoints non vides :

$$(X = V_1 \sqcup V_2, \quad V_1, V_2 \text{ ouverts disjoints}) \quad \Rightarrow \quad (V_1 = \emptyset \text{ ou } V_2 = \emptyset).$$

On a en fait plusieurs caractérisations équivalentes de la connexité d'un espace métrique :

Proposition 6.1.2. *Un espace métrique (X, d) est connexe si et seulement si l'une des assertions suivantes est vérifiée :*

- *il n'existe pas de partition de X en deux fermés disjoints non vides*
- *les seules parties ouvertes et fermées de X sont \emptyset et X*
- *toute application continue $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ est constante.*

Remarque 6.1.3. Ici $Y = \{0, 1\}$ est muni de la distance induite par \mathbb{R} , qui coïncide avec la distance discrète : les ouverts de Y sont tous ses sous-ensembles, c'est-à-dire $Y, \emptyset, \{0\}, \{1\}$.

Démonstration de la Proposition 6.1.2. On démontre la dernière assertion : X est connexe si et seulement si toute application continue $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ est constante. Les autres assertions sont laissées en exercice.

Supposons tout d'abord que X soit connexe. Si $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ est continue, alors $X = f^{-1}(\{0\}) \sqcup f^{-1}(\{1\})$ partitionne X en deux ouverts disjoints, donc l'un des deux est vide, donc f est constante.

Réciproquement, supposons que toute fonction continue $X \rightarrow \{0, 1\}$ soit constante. Si $X = V_1 \sqcup V_2$ est une partition en deux ouverts disjoints, alors la fonction f égale à 0 sur V_1 et 1 sur V_2 est continue car $f^{-1}(\{0\}) = V_1$ et $f^{-1}(\{1\}) = V_2$ sont ouverts. Elle doit donc être constante, ce qui implique que V_1 ou V_2 est vide. \square

Exemple 6.1.4. Tout intervalle de \mathbb{R} est connexe.

Démonstration. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f: I \rightarrow \{0, 1\}$ une fonction continue. Supposons f non constante : il existe $a, b \in I$ tels que $f(a) = 0$ et $f(b) = 1$. Alors $g(t) = f((1-t)a + tb)$ définit une fonction continue sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\{0, 1\}$, et telle que $g(0) = 0$, $g(1) = 1$. Posons

$$\Gamma = \{t \in [0, 1] : g(t) = 0\}, \quad t_0 = \sup \Gamma.$$

Par continuité de g , on a $g(t_0) = 0$, donc $t_0 < 1$. De nouveau par continuité, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|g(s)| < 1/2$ pour tout $s \in [t_0, t_0 + \varepsilon] \subset [0, 1]$. Donc $[t_0, t_0 + \varepsilon] \subset \Gamma$ puisque g ne prend que les valeurs 0 et 1, et ceci contredit la définition de t_0 . Ainsi f est nécessairement constante. \square

Remarque 6.1.5. Réciproquement, toute partie connexe $A \subset \mathbb{R}$ est un intervalle : sinon, il existe $x < a < y$ tels que $x, y \in A$ et $a \notin A$, donc $A \subset]-\infty, a[\sqcup]a, +\infty[$ fournit, après intersection avec A , une partition de A en deux ouverts disjoints non vides.

Exemple 6.1.6. Soit X un espace métrique *connexe par arcs* : pour tous $x, y \in X$ il existe un chemin continu $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ tel que $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$. Alors X est connexe. En effet, si $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ est continue, alors pour tous $x, y \in X$ reliés par un chemin continu $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$, la fonction $f \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$ est continue, donc constante par connexité de l'intervalle $[0, 1]$, donc $f(x) = f(y)$.

Exemple 6.1.7. Toute partie *convexe* d'un evn est connexe par arcs, donc connexe. Par exemple les boules sont connexes.

Exemple 6.1.8. Si $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^2$, alors $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$ est connexe par arcs, donc connexe.

Exemple 6.1.9. L'espace des matrices inversibles $GL_n(\mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, donc connexe. Pour le démontrer, on peut considérer pour $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$ le polynôme $P(X) = \det((1-X)A + XB) \in \mathbb{C}[X]$, qui est non nul car $P(0), P(1) \neq 0$. Il a un nombre fini de racines, et d'après l'exemple précédent on peut donc trouver un chemin continu $\gamma: [0, 1] \rightarrow \{P \neq 0\} \subset \mathbb{C}$, tel que $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) = 1$. Alors $t \mapsto (1 - \gamma(t))A + \gamma(t)B$ définit un chemin continu de A à B dans $GL_n(\mathbb{C})$.

Exemple 6.1.10. L'espace des matrices inversibles $GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe, car $GL_n(\mathbb{R}) = \{\det > 0\} \sqcup \{\det < 0\}$.

Exemple 6.1.11. L'espace $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{\det > 0\} \subset M_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. En effet l'algorithme du pivot de Gauss permet d'écrire toute matrice inversible A comme un produit de matrices de transvections (qui correspondent à des opérations $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$) et d'une matrice diagonale de diagonale $(1, \dots, 1, \det A)$. Pour chacun de ces facteurs, le segment qui le lie à la matrice identité est contenu dans $GL_n^+(\mathbb{R})$. (On peut aussi utiliser la décomposition polaire, la réduction des matrices orthogonales et le fait que $SO(2)$ est connexe ; ou encore la densité des matrices \mathbb{C} -diagonalisables qui sont donc \mathbb{R} -diagonalisables par blocs de tailles 1 ou 2.)

Exemple 6.1.12. Si $A \subset X$ est une partie connexe, toute partie $B \subset X$ telle que $A \subset B \subset \bar{A}$ est connexe.

Exemple 6.1.13. Une union de parties connexes ayant un point commun est connexe. En effet, si f est continue à valeurs dans $\{0, 1\}$ sur une telle union, elle est constante sur chacune des parties, et chacune de ces constantes doit être égale à la valeur de f au point commun.

Exemple 6.1.14. Une union dénombrable $X = \bigcup_n C_n$ de parties connexes « enchaînées », i.e. $C_n \cap C_{n+1} \neq \emptyset$, est connexe.

Exemple 6.1.15. *Topologie produit.* Un produit fini de connexes est connexe.

Théorème 6.1.16. Si $f: X \rightarrow Y$ est continue et X est connexe, alors $f(X)$ est connexe.

Démonstration. Si $g: f(X) \rightarrow \{0, 1\}$ est continue, alors $g \circ f: X \rightarrow \{0, 1\}$ est continue, donc constante car X est connexe, donc g est constante. \square

Corollaire 6.1.17. théorème de valeurs intermédiaires. Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, l'image d'un intervalle est un intervalle.

Définition 6.1.18. Si X est un espace métrique et $x \in X$, on appelle *composante connexe* de x , notée C_x , la classe d'équivalence de x sous la relation d'équivalence

$$x \sim y \stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists C \subset X \text{ connexe t.q. } x, y \in C).$$

L'espace X est ainsi partitionné par ses composantes connexes.

Remarque 6.1.19. Les composantes connexes de X sont des fermés de X (c'est une conséquence de la stabilité de la connexité par passage à l'adhérence).

Remarque 6.1.20. Si E est un evn et $V \subset E$ est un ouvert, les composantes connexes de V sont des ouverts de E (c'est une conséquence de la connexité des boules ouvertes).

Exemple 6.1.21. Tout ouvert de \mathbb{R} est un union dénombrable d'intervalles ouverts (ses composantes connexes; l'union est dénombrable par densité de \mathbb{Q}).

6.2 Applications

La connexité peut servir à montrer qu'un sous-ensemble de \mathbb{R} est un intervalle :

Exemple 6.2.1. *Théorème de Darboux.* Si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable, alors $f'(I)$ est un intervalle.

Démonstration. L'ensemble

$$\Gamma = \left\{ \frac{f(x) - f(y)}{x - y} : (x, y) \in I \times I, x < y \right\},$$

est connexe, et $f'(I) \subset \bar{\Gamma}$ par définition de la dérivée. D'autre part, d'après le théorème des accroissements finis on a $\Gamma \subset f'(I)$, donc $f'(I)$ est connexe d'après l'exemple 6.1.12. \square

La connexité peut servir à montrer que deux espaces métriques ne sont pas homéomorphes :

Exemple 6.2.2. Les espace \mathbb{R} et \mathbb{R}^2 ne sont pas homéomorphes.

Démonstration. Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un homéomorphisme, l'image de l'espace connexe $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$ par l'application continue f^{-1} doit être connexe. Mais cette image est égale à $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, qui n'est pas un intervalle. \square

Exemple 6.2.3. Les espaces $[0, 1]$ et \mathbb{S}^1 ne sont pas homéomorphes.

La connexité peut servir à montrer qu'une propriété *locale* est en fait *globale* :

Exemple 6.2.4. Soit X un espace connexe, et Y un espace métrique. Si $f: X \rightarrow Y$ est localement constante (i.e., tout point de x admet un voisinage sur lequel f est constante), alors f est constante.

Démonstration. L'application f est en particulier continue. Pour tout point $x_0 \in X$, l'ensemble $\{f = f(x_0)\} \subset X$ est donc fermé et non vide. Il est de plus ouvert puisque f est localement constante. Il est donc nécessairement égal à X . \square

Remarque 6.2.5. Cet exemple généralise le fait que toute application $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ est constante.

Exemple 6.2.6. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert connexe et $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable et vérifie $Df = 0$ sur U , alors f est localement constante d'après le théorème des accroissements finis, et donc constante d'après l'exemple précédent.

Exemple 6.2.7. Unicité du relèvement. Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$ est continue, alors f admet un *unique* relèvement continu $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f = e^{i\varphi}$ et $\varphi(a) \in [0, \pi[$. En effet, si φ et ψ sont deux tels relèvements, alors $\varphi - \psi$ est continue à valeurs dans $2\pi\mathbb{Z}$ donc localement constante, donc constante puisque $[a, b]$ est connexe, et enfin nulle grâce à la contrainte en a .

Exemple 6.2.8. Soit E un evn. Si $V \subset E$ est ouvert et connexe, alors V est connexe par arcs.

Esquisse de preuve. Soit $x \in V$. On définit $\Gamma \subset V$ comme l'ensemble des $y \in V$ tels qu'il existe un chemin continu dans V reliant x à y . En utilisant le fait que les boules sont convexes (donc connexes par arcs), on montre que Γ est ouvert et fermé, donc égal à V . \square

Remarque 6.2.9. Attention : l'hypothèse d'ouverture est nécessaire. Par exemple, l'adhérence de l'ensemble $\{(x, \sin(1/x)) : x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ est connexe, mais pas connexe par arcs.

Exemple 6.2.10. L'application $\exp: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Esquisse de preuve. On montre en fait que pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, l'application

$$\exp: \mathbb{C}[A] \rightarrow \mathbb{C}[A]^* = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C}),$$

(bien définie grâce à l'exemple 5.4.5) est surjective. En particulier, si A est inversible alors il existe $M \in \mathbb{C}[A]$ telle que $A = \exp(M)$.

Pour cela on utilise la structure de groupe additif de $\mathbb{C}[A]$, celle de groupe multiplicatif de $\mathbb{C}[A]^*$, et la propriété de morphisme

$$\exp(A_1 + A_2) = \exp A_1 \cdot \exp A_2,$$

valable si A_1 et A_2 commutent, et donc en particulier si ce sont des polynômes en A .

Etape 1. On montre que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un voisinage de la matrice identité $I = \exp(0)$ dans $\mathbb{C}[A]^*$, grâce au théorème d'inversion locale.

Etape 2. La propriété de morphisme permet ensuite de déduire que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un voisinage de tous ses éléments, donc un ouvert de $\mathbb{C}[A]^*$.

Etape 3. Encore grâce à la propriété de morphisme, $H = \exp(\mathbb{C}[A])$ est un sous-groupe de $G = \mathbb{C}[A]^*$, et il est ouvert d'après ce qui précède. Cela implique automatiquement qu'il est fermé, puisque $G \setminus H = \bigcup_{g \in G \setminus H} gH$ et la multiplication par un élément du groupe est un homéomorphisme.

Etape 4. Ainsi H est ouvert et fermé dans G , et on peut montrer comme dans l'exemple 6.1.9 que G est connexe par arcs, donc $H = G$. \square

7 Espaces de Hilbert

7.1 Produit scalaire

Définition 7.1.1. Soit H un ev sur \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}). Un *produit scalaire* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur H est une application $H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. \mathbb{C})

- bilinéaire (resp. sesquilinéaire)
- symétrique (resp. hermitienne)
- définie positive.

Le couple $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un *espace préhilbertien*.

Exemple 7.1.2. Sur \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{C}^n), $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$ (resp. $\sum_i x_i \bar{y}_i$) définit un produit scalaire.

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ (resp. $M_n(\mathbb{C})$) est symétrique (resp. hermitienne) définie positive, alors $\langle x, y \rangle_A = \langle Ax, y \rangle = \sum_{ij} a_{ij} x_i y_j$ (resp. $\sum_{ij} a_{ij} x_i \bar{y}_j$) définit un produit scalaire.

Exemple 7.1.3. Si (X, μ) est un espace mesuré, sur $L^2(\mu)$ on a le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_X f \bar{g} d\mu.$$

Exemple 7.1.4. Un cas particulier de l'exemple précédent concerne l'ensemble de suites ℓ^2 , muni de $\langle u, v \rangle = \sum_n u_n \bar{v}_n$.

Définition 7.1.5. On note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ pour tout $x \in H$, la *norme hilbertienne* associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Théorème 7.1.6. Cauchy-Schwarz. *Pour tous $x, y \in H$ on a*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

et il y a égalité si et seulement si x et y sont liés.

Démonstration. Si x ou y est le vecteur nul, l'assertion est évidente. On peut donc les supposer tous deux non nuls, et de plus par homogénéité, on peut supposer $\|x\| = \|y\| = 1$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $|\langle x, y \rangle| = e^{i\theta} \langle x, y \rangle$ (dans le cas réel, $\theta = 0$ ou π). On a alors

$$\|x\| \|y\| - |\langle x, y \rangle| = 1 - \langle e^{i\theta} x, y \rangle = \frac{1}{2} \|e^{i\theta} x - y\|^2 \geq 0.$$

De plus l'égalité implique $y = e^{i\theta} x$. □

Corollaire 7.1.7. *La fonction $\|\cdot\|$ est une norme sur H .*

Démonstration. Le seul point non immédiat est l'inégalité triangulaire : d'après Cauchy-Schwarz, pour tous $x, y \in H$ on a

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \Re \langle x, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \|x\| \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

□

A partir de maintenant, un espace préhilbertien sera toujours muni de la norme associée à son produit scalaire, et de la topologie, notion de continuité (etc.) correspondantes.

Remarque 7.1.8. Pour tout $y \in H$, la fonction

$$\Phi_y: H \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto \langle x, y \rangle,$$

est une forme linéaire continue (grâce à Cauchy-Schwarz) de norme subordonnée $\|\Phi_y\| = \|y\|$.

Définition 7.1.9. On dit que deux vecteurs $x, y \in H$ sont *orthogonaux*, noté $x \perp y$, si leur produit scalaire est nul : $\langle x, y \rangle = 0$. Pour $A \subset H$ un ensemble quelconque, l'*orthogonal* de A est l'ensemble

$$A^\perp = \{y \in H : \forall x \in A, y \perp x\}.$$

Remarque 7.1.10. *Pythagore.* Si $x \perp y$, alors $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Remarque 7.1.11. On peut écrire

$$A^\perp = \bigcap_{x \in A} \ker \Phi_x,$$

ce qui montre que, quel que soit l'ensemble A , son orthogonal A^\perp est un *sev fermé* de H .

Remarque 7.1.12. Si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$. En particulier, on a certainement $(\overline{\text{vect } A})^\perp \subset A^\perp$. D'autre part, tout élément $y \in A^\perp$ est, par linéarité et continuité de Φ_y , nécessairement orthogonal à toute limite de combinaisons linéaires d'éléments de A , donc on a en fait

$$A^\perp = (\overline{\text{vect } A})^\perp.$$

Définition 7.1.13. Si un espace préhilbertien H est complet pour sa norme hilbertienne, il est appelé espace de *Hilbert*.

Exemple 7.1.14. — Tout espace euclidien, i.e. préhilbertien de dimension finie, est un Hilbert.

- Pour (X, μ) mesuré, l'espace $L^2(\mu)$ est un Hilbert.
- En particulier, l'espace ℓ^2 est un Hilbert.

7.2 Projection sur un convexe fermé

Dans ce qui suit, l'espace H est un Hilbert.

Théorème 7.2.1. Soit H un Hilbert et $C \subset H$ un sous-ensemble convexe, fermé et non vide. Alors pour tout $x \in H$ il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x - y\| = \text{dist}(x, C)$. On note $y = P_C(x)$ ce projeté de x sur C . Pour tout $y \in H$ on a de plus la caractérisation :

$$y = P_C(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \in C \\ \text{et } \Re \langle x - y, z - y \rangle \leq 0 \quad \forall z \in C. \end{cases}$$

Remarque 7.2.2. La caractérisation est à interpréter en terme d'angles : un produit scalaire négatif est synonyme d'angle obtus. La projection de x sur C est donc caractérisée par le fait qu'à partir de $P_C(x)$, le vecteur pointant vers x forme un angle obtus avec tout vecteur pointant vers un élément de C . (Faire un dessin!)

Démonstration du Théorème 7.2.1. Pour démontrer l'existence, on note $d = \text{dist}(x, C) = \inf_{y \in C} \|y - x\|$, et on choisit une suite $(y_n) \in C^{\mathbb{N}}$ telle que $\|y_n - x\| \rightarrow d$. On applique ensuite l'identité du parallélogramme

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \quad \forall u, v \in H,$$

à $u = x - y_n$ et $v = x - y_m$ pour $n, m \in \mathbb{N}$, ce qui donne

$$\|2x - y_n - y_m\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 = 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2.$$

On remarque que le membre de droite tend vers $4d^2$ lorsque $\min(n, m) \rightarrow \infty$, et que d'autre part on a

$$\|2x - y_n - y_m\|^2 = 4\|x - (y_n + y_m)/2\|^2 \geq 4d^2,$$

puisque par convexité on a $(y_n + y_m)/2 \in C$. On en déduit donc que $\|y_n - y_m\|^2$ tend vers 0 lorsque $\min(n, m) \rightarrow \infty$. La suite (y_n) est donc de Cauchy dans $C \subset H$ qui est complet (en tant que partie fermée d'un espace complet), et converge donc dans C . On note $y \in C$ sa limite, et on a bien, par continuité de la norme, $\|x - y\| = d$.

Pour démontrer l'unicité, on applique encore l'identité du parallélogramme, en remplaçant y_n et y_m ci-dessus par y et y' ayant cette propriété.

Enfin, si $y \in C$ la caractérisation en terme d'angle obtus est une conséquence de l'identité, valable pour tout $z \in C$,

$$\|x - \underbrace{[(1-t)y + tz]}_{\in C}\|^2 = \|x - y\|^2 - 2t \Re \langle x - y, z - y \rangle + t^2 \|x - y\|^2 \quad \forall t \in [0, 1].$$

En effet, si $y = P_C(x)$, alors le membre de gauche atteint son minimum en $t = 0$, donc le coefficient de t est nécessairement ≥ 0 . Réciproquement, si le coefficient de t est ≥ 0 , alors le membre de gauche est minimal en $t = 0$, donc $\|x - z\|^2 \geq \|x - y\|^2$ pour tout $z \in C$. \square

Remarque 7.2.3. La projection $P_C: H \rightarrow C$ est continue. On démontre en fait à l'aide de la caractérisation par angle obtus qu'elle est 1-Lipschitzienne. Cela résulte du fait que, si $x_1, x_2 \in H$ et $y_1, y_2 \in C$ sont leurs projections respectives, les angles entre $x_2 - y_2$ et $y_1 - y_2$ d'une part, entre $x_1 - y_1$ et $y_2 - y_1$ d'autre part, sont obtus (faire un dessin!). Explicitement, on a

$$\begin{aligned} \|y_1 - y_2\|^2 &= \Re \langle y - x_1 + x_1 - x_2 + x_2 - y_2, y_1 - y_2 \rangle \\ &\leq \Re \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \leq \|x_1 - x_2\| \|y_1 - y_2\|, \end{aligned}$$

ce qui implique bien $\|y_1 - y_2\| \leq \|x_1 - x_2\|$.

Le cas où l'ensemble convexe fermé C est un sev est particulièrement intéressant :

Théorème 7.2.4. Si $F \subset H$ est un sev fermé, alors $P_F: H \rightarrow F$ est linéaire continue, et pour tout $x \in H$, le projeté $y = P_F(x)$ est caractérisé par

$$y \in F \quad \text{et} \quad x - y \in F^\perp.$$

Démonstration. On a vu plus haut que la projection est continue. La caractérisation par angles obtus, puisque $z \mapsto y - z$ est un isomorphisme de F , est ici équivalente à

$$\Re \langle x - y, z \rangle \leq 0 \quad \forall z \in F.$$

Mais comme d'autre part F est stable par multiplication par tout scalaire, ceci est bien équivalent à $\langle x - y, z \rangle = 0$ pour tout $z \in F$, i.e. $x - y \in F^\perp$. Cette caractérisation est stable par combinaison linéaire : pour $x_1, x_2 \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $y = P_F(x_1) + \lambda P_F(x_2) \in F$ vérifie

$$x_1 + \lambda x_2 - y \in F^\perp,$$

donc par unicité $y = P_F(x_1 + \lambda x_2)$, ce qui démontre la linéarité. \square

Exercice 7.2.5. Calculer $\|P_F\|$.

Corollaire 7.2.6. Si $F \subset H$ est un sev fermé, on a

$$H = F \oplus F^\perp,$$

et la projection sur F parallèlement à F^\perp est P_F .

Remarque 7.2.7. Attention : si F n'est pas fermé, on a $F \oplus F^\perp \subsetneq H = \overline{F} + F^\perp$. Par exemple, dans ℓ^2 , le sev F des suites nulles à partir d'un certain rang vérifie $F^\perp = \{0\}$.

Corollaire 7.2.8. Soit F un sev de H . Alors

$$(F^\perp)^\perp = \overline{F}.$$

En particulier, F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

Démonstration. On a déjà vu que $\overline{F}^\perp = F^\perp$ donc il suffit de montrer l'assertion pour F fermé. L'inclusion $F \subset (F^\perp)^\perp$ est évidente. Réciproquement, si $x \perp F^\perp$, alors puisque $P_F(x) \in F \subset (F^\perp)^\perp$ on a $x - P_F(x) \perp F^\perp$, mais d'autre part $x - P_F(x) \in F^\perp$, donc $x - P_F(x) \in F \cap F^\perp$, donc $x = P_F(x) \in F$. \square

Exemple 7.2.9. Si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, et $w : I \rightarrow [0, \infty[$ un poids tel que

$$\int_I e^{\alpha|x|} w(x) dx < \infty \quad \text{pour un certain } \alpha > 0,$$

alors les fonctions polynomiales sont denses dans $L^2(I, w(x) dx)$.

Démonstration. D'après le corollaire précédent, il suffit de montrer que l'orthogonal des polynômes est nul. Soit donc $f \in L^2(I, w dx)$ telle que

$$\int_I f(x) x^n w(x) dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Grâce à l'hypothèse d'intégrabilité exponentielle, pour tout $z \in U = \{z \in \mathbb{C} : |\Re z| < \alpha/2\}$ on a $e^{zx} \in L^2(I, w(x) dx)$ et on peut donc définir la fonction

$$F : U \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \int_I e^{zx} f(x) w(x) dx.$$

De plus, pour tout $z \in U$ on a la domination

$$|e^{zx} f(x)| \leq e^{\frac{\alpha}{2}|x|} |f(x)| \in L^1(I, w(x) dx),$$

donc par holomorphie sous l'intégrale la fonction f est holomorphe dans U , et ses dérivées successives en 0 sont données par

$$F^{(n)}(0) = \int_I x^n f(x) w(x) dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

donc par analyticité $F \equiv 0$ sur U . En particulier on a $F(it) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, i.e. la transformée de Fourier de $f w \mathbf{1}_I \in L^1(\mathbb{R})$ est nulle, donc $f w = 0$ dans I . \square

Exemple 7.2.10. Application du théorème de projection : espérance conditionnelle Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé, et $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ une sous-tribu, alors le sev F des fonctions \mathcal{G} -mesurables est fermé dans $H = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour toute variable aléatoire $X \in H$, sa projection $Z = P_F X$ est l'unique variable aléatoire \mathcal{G} -mesurable et de carré intégrable telle que

$$\mathbb{E}[XU] = \mathbb{E}[ZU] \quad \forall U \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}).$$

Cette variable aléatoire est appelée espérance conditionnelle de X sachant \mathcal{G} , notée $Z = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.

7.3 Dualité

On note $H^* = \mathcal{L}_c(H, \mathbb{K})$ l'evn des formes linéaires continues sur H , ou dual de H . Rappelons que pour tout $y \in H$ on peut définir une forme linéaire $\Phi_y = \langle \cdot, y \rangle \in H^*$. Dans un Hilbert, toutes les formes linéaires sont en fait de cette forme :

Théorème 7.3.1. *Riesz. Soit H un Hilbert. Pour toute forme linéaire continue $\varphi \in H^*$ il existe un unique $y \in H$ t.q. $\varphi(x) = \langle x, y \rangle$ pour tout $x \in H$.*

Démonstration. L'unicité découle du fait que si deux vecteurs y_1, y_2 conviennent, alors $y_1 - y_2 \in H^\perp = \{0\}$.

Pour l'existence, si φ est nulle on prend $y = 0$. Soit donc $\varphi \in H^* \setminus \{0\}$. Grâce au théorème de projection sur un sev fermé on a alors $H = \ker \varphi \oplus (\ker \varphi)^\perp$, donc $\dim(\ker \varphi)^\perp = 1$ (c'est un résultat d'algèbre linéaire : tout complémentaire du noyau d'une forme linéaire est de dimension un). Soit $z \in (\ker \varphi)^\perp$ tel que $\|\varphi\| = 1$. Alors tout $x \in H$ s'écrit de manière unique comme $x = k + \lambda z$ avec $k \in \ker \varphi$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, et on a

$$\varphi(x) = \varphi(k + \lambda z) = \lambda \varphi(z) = \langle k + \lambda z, \varphi(z)z \rangle = \langle x, \varphi(z)z \rangle.$$

Il suffit donc de poser $y = \varphi(z)z$. □

Remarque 7.3.2. Ainsi $\Phi: H \rightarrow H^*, y \mapsto \Phi_y$ est une bijection, qui plus est isométrique : $\|\Phi(y)\| = \|y\|$ pour tout $y \in H$.

Remarque 7.3.3. Le vecteur y obtenu dans le Théorème 7.3.1 est l'unique minimiseur de la fonction $J: H \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2} \|x\|^2 - \Re \varphi(x)$.

Exemple 7.3.4. *Application du théorème de dualité au théorème de Radon-Nikodym.* En particulier, si (X, μ) est un espace mesuré, le théorème de représentation s'applique dans $L^2(\mu)$: toute forme linéaire sur $L^2(\mu)$ est de la forme $f \mapsto \int f g d\mu$ pour une certaine fonction $g \in L^2(\mu)$. Utilisons ce résultat pour démontrer le théorème de dérivation de Radon-Nikodym : si μ est une mesure positive finie sur (X, \mathcal{A}) , toute mesure λ positive et finie sur (X, \mathcal{A}) qui est absolument continue par rapport à μ (c'est-à-dire les ensembles μ -négligeables sont nécessairement λ -négligeables) est de la forme $d\lambda = h d\mu$ pour une certaine fonction $h \in L^1(\mu)$. Considérons en effet la mesure positive $\nu = \lambda + \mu$, et la forme linéaire

$$L^2(\nu) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int f d\lambda,$$

qui est bien définie et continue grâce à l'inégalité de Hölder et au fait que $\lambda(X) < \infty$. Il existe donc $g \in L^2(\nu)$ telle que

$$\int f d\lambda = \int f g d\nu \quad \forall f \in L^2(\nu).$$

Puisque $0 \leq \lambda \leq \nu$ on a nécessairement $0 \leq g \leq 1$ ν -p.p. Puisque $\nu = \lambda + \mu$ on peut de plus réécrire la relation définissant g comme

$$\int (1 - g) f d\lambda = \int f g d\mu \quad \forall f \in L^2(\nu).$$

En choisissant $f = \mathbf{1}_{\{g=1\}}$ on en déduit que l'ensemble $\{g = 1\}$ est μ -négligeable, donc par absolue continuité λ -négligeable, et donc

$$0 \leq g < 1 \quad \nu\text{-p.p.}$$

En choisissant $f = f_n \mathbf{1}_E$ avec $f_n \geq 0$ qui converge en croissant vers $1/(1 - g)$ (par exemple $f_n = 1 + g + \dots + g^n$), le théorème de convergence monotone implique que

$$\int_E d\lambda = \int_E \frac{g}{1 - g} d\mu \quad \forall E \in \mathcal{A},$$

ce qui démontre le résultat en posant $h = g/(1 - g)$. On a bien $h \in L^1(\mu)$ car $h \geq 0$ et $\int h d\mu = \lambda(X) < \infty$.

Remarque 7.3.5. Le théorème de Radon-Nykodym, qu'on vient de déduire du théorème de dualité de $L^2(\mu)$, permet à son tour de démontrer le théorème de dualité de $L^p(\mu)$ dans le cas où la mesure μ est finie (ou σ -finie) : si $1 \leq p < \infty$, toute forme linéaire continue φ sur $L^p(\mu)$ est de la forme $\varphi(f) = \int fh d\mu$ pour une certaine fonction $h \in L^{p'}(\mu)$, avec p' l'exposant conjugué de p . On obtient la fonction h en considérant la mesure (à valeurs non positives) $\lambda(E) = \varphi(\mathbf{1}_E)$ qui est absolument continue par rapport à μ .

Remarque 7.3.6. Le théorème de dualité de Riesz fournit une représentation de formes linéaires d'un espace de Hilbert, mais on peut aussi l'appliquer aux formes multilinéaires. Si $B: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire continue, alors pour tout $y \in H$, $B(\cdot, y)$ est une forme linéaire continue, donc il existe $A(y) \in H$ tel que $B(x, y) = \langle x, A(y) \rangle$ pour tout $x \in H$. On vérifie que $y \mapsto A(y)$ est linéaire continue, et on a donc la représentation

$$B(x, y) = \langle x, Ay \rangle \quad \forall x, y \in H,$$

pour un certain $A \in \mathcal{L}_c(H)$.

Exemple 7.3.7. La remarque précédente permet de construire l'adjoint d'un opérateur $T \in \mathcal{L}_c(H)$, qui est l'unique $T^* \in \mathcal{L}_c(H)$ vérifiant

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad \forall x, y \in H,$$

en considérant la forme bilinéaire (ou sesquilinéaire) $B = \langle T\cdot, \cdot \rangle$.

Le théorème de dualité de Riesz permet de représenter toute forme linéaire à l'aide de la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On peut en fait l'appliquer pour représenter toute forme linéaire à l'aide d'une forme bilinéaire autre que le produit scalaire, pourvu qu'elle satisfasse certaines conditions :

Exemple 7.3.8. *Théorème de Lax-Milgram* Soit $a: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. \mathbb{C}) une forme bilinéaire (resp. sesquilinéaire), continue, et coercive ($\exists \alpha > 0$ tel que $a(x, x) \geq \alpha \|x\|^2$ pour tout $x \in H$). Pour tout $\varphi \in H^*$, il existe un unique $y \in H$ t.q.

$$\varphi(x) = a(x, y) \quad \forall x \in H.$$

Si de plus a est symétrique (resp. hermitienne) alors y est l'unique minimiseur de $J: H \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}a(x, x) - \Re \varphi(x)$.

Remarque 7.3.9. Ce théorème, appliqué à $a(f, g) = \int \nabla f \cdot \nabla g$ dans $H = H_0^1(\Omega)$, avec Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n à frontière régulière, permet de résoudre le problème de Dirichlet pour l'équation de Poisson,

$$\Delta f = \varphi \text{ dans } \Omega, \quad f = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Démonstration du théorème de Lax-Milgram. Dans le cas où a est symétrique (resp. hermitienne), alors c'est un produit scalaire sur H . De plus la continuité et la coercivité de a assurent que la norme associée $N(x) = \sqrt{a(x, x)}$ est équivalente à $\|\cdot\|$, donc H est un espace de Hilbert pour ce nouveau produit scalaire, et le théorème de Lax-Milgram est alors exactement le théorème de dualité de Riesz, associé à la remarque 7.3.3.

Dans le cas où a n'est pas nécessairement symétrique, on peut utiliser le théorème de Riesz comme dans la remarque 7.3.6 et obtenir $A \in \mathcal{L}_c(H)$ tel que

$$a(x, y) = \langle x, Ay \rangle \text{ pour tous } x, y \in H.$$

La coercivité de A implique que A est injectif et que $\text{im } A$ est dense, car si $Ax = 0$ ou $x \perp \text{im } A$, alors

$$\|x\|^2 \leq \frac{1}{\alpha} a(x, x) = \langle Ax, x \rangle = 0$$

De plus, pour tout $x \in H$ on a

$$\alpha \|x\|^2 \leq a(x, x) = \langle Ax, x \rangle \leq \|Ax\| \|x\|, \quad \text{donc } \|x\| \leq \frac{1}{\alpha} \|Ax\|.$$

Ceci implique que $\text{im } A$ est fermée : si (Ax_n) est une suite convergente, alors $\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{\alpha} \|Ax_n - Ax_m\|$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ donc (x_n) est de Cauchy, donc convergente vers un certain $x \in H$, et par continuité $\lim Ax_n = Ax \in \text{im } A$. On conclut donc que $\text{im } A = H$. Ainsi A est un isomorphisme.

D'autre part il existe $z \in H$ tel que $\varphi(x) = \langle x, z \rangle$ pour tout $x \in H$. L'assertion à démontrer est alors équivalente à l'existence d'un unique $y \in H$ tel que $Ay = z$, ce qui découle du fait que A est un isomorphisme. \square

Mentionnons enfin que le théorème de Riesz permet d'établir un résultat de compacité faible :

Exemple 7.3.10. Si $(x_n) \in H^{\mathbb{N}}$ est bornée, alors il existe une sous-suite (x_{n_k}) et $x \in H$ tels que

$$\langle x_{n_k}, y \rangle \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \langle x, y \rangle \quad \forall y \in H.$$

(On dit que la suite (x_{n_k}) converge faiblement vers x .)

Démonstration. On suppose $\|x_n\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Etape 1. Pour tout $i \in \mathbb{N}$ la suite $(\langle x_n, x_i \rangle)_{n \geq 0}$ est bornée par $M \|x_i\|$, et par procédé diagonal il existe donc une sous-suite (x_{n_k}) telle que

$$(\langle x_{n_k}, x_i \rangle)_{k \geq 0} \quad \text{converge dans } \mathbb{K} \text{ pour tout } i \geq 0.$$

Par linéarité on en déduit que

$$(\langle x_{n_k}, v \rangle)_{k \geq 0} \quad \text{converge dans } \mathbb{K} \text{ pour tout } v \in V = \text{vect } \{x_i\}.$$

Etape 2. Pour tout $y \in F = \overline{V}$ on a

$$|\langle x_{n_k}, y \rangle - \langle x_{n_\ell}, y \rangle| \leq |\langle x_{n_k}, v \rangle - \langle x_{n_\ell}, v \rangle| + 2M \|u - v\| \quad \forall k, \ell \in \mathbb{N}, v \in V,$$

et on peut donc montrer que $(\langle x_{n_k}, y \rangle)_{k \geq 0}$ est de Cauchy dans \mathbb{K} en choisissant $v \in V$ arbitrairement proche de y . On en déduit donc que pour tout $y \in H$, la suite

$$(\langle x_{n_k}, y \rangle)_{k \geq 0} = (\langle x_{n_k}, P_F(y) \rangle)_{k \geq 0} \quad \text{converge dans } \mathbb{K}.$$

Etape 3. L'application $H \rightarrow \mathbb{K}, y \mapsto \lim \langle x_{n_k}, y \rangle$ est linéaire, et continue car $|\langle x_{n_k}, y \rangle| \leq M \|y\|$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe donc $x \in H$ tel que $\lim \langle x_{n_k}, y \rangle = \langle x, y \rangle$ pour tout $y \in H$. \square

L'exemple précédent constitue un résultat de compacité applicable dans des espaces de dimension infinie (au même titre que le théorème d'Arzela-Ascoli). De la même manière que la compacité permet en dimension finie de montrer qu'une fonction bornée sur un compact atteint ses bornes, on peut l'utiliser pour démontrer le résultat suivant :

Exemple 7.3.11. Si $J: H \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, continue et coercive (i.e. $J(x) \rightarrow +\infty$ pour $\|x\| \rightarrow \infty$), alors il existe $x \in H$ tel que $J(x) = \min_H J$.

Esquisse de preuve. Si $J(x_n) \rightarrow m := \inf J$, alors la coercivité de J impose à la suite (x_n) d'être bornée. On peut donc supposer qu'elle converge faiblement vers $x \in H$. On montre ensuite que $J(x) \leq m$ en remarquant que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble de niveau $C = \{J \leq m + \varepsilon\}$ est un convexe fermé non vide, et donc stable par convergence faible : si $(x_n) \in C^{\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $x \in H$, alors $\|x - P_C(x)\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x - P_C(x), x_n - P_C(x) \rangle \leq 0$. \square

7.4 Bases hilbertiennes

7.4.1 Familles orthonormées

Définition 7.4.1. Une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de H est dite *orthonormée* (ou *système orthonormé*) si

$$\|u_i\| = 1, \quad \langle u_i, u_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j \in I.$$

Remarque 7.4.2. Pour toute partie finie $J \subset I$ et toutes familles $(\lambda_i), (\mu_i)$ de scalaires, on a alors

$$\left\langle \sum_{i \in J} \lambda_i u_i, \sum_{j \in J} \mu_j u_j \right\rangle = \sum_{i \in J} \lambda_i \bar{\mu}_i, \quad \left\| \sum_{i \in J} \lambda_i u_i \right\|^2 = \sum_{i \in J} |\lambda_i|^2.$$

Exemple 7.4.3. Dans ℓ^2 la « base canonique » (e_n) formée des suites ayant un seul élément non nul, égal à 1, forme un système orthonormé.

Exemple 7.4.4. Dans $L^2([0, T], \frac{dx}{T})$, la famille (u_n) donnée par

$$u_n(x) = e^{i \frac{2\pi}{T} nx} \quad \text{pour } n \in \mathbb{Z},$$

forme un système orthonormé (système trigonométrique).

La famille composée des fonctions (c_n) et (s_m) données pour $n, m \geq 1$ par

$$c_n(x) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right), \quad s_n(x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right),$$

et de la fonction constante égale à 1, forme aussi un système orthonormé.

Proposition 7.4.5. Si (u_1, \dots, u_N) est une famille orthonormée de H et $F = \text{vect}(u_1, \dots, u_N)$, alors la projection orthogonale sur F est donnée par

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^N \langle x, u_i \rangle u_i \quad \forall x \in H.$$

Démonstration. On a bien $y = \sum \langle x, u_i \rangle u_i \in F$ et $\langle y - x, u_i \rangle = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. □

Ainsi une base orthonormée d'un sev fournit une formule explicite de projection. Ceci est utilisé par exemple dans le procédé de Gram-Schmidt :

Exemple 7.4.6. *Gram-Schmidt.* Soit $(v_n)_{n \geq 1}$ une famille dénombrable ou finie d'éléments de H . Si (v_n) est libre, il existe une unique famille orthonormée $(u_n)_{n \geq 1}$ telle que pour tout $n \geq 1$ on ait

$$F_n = \text{vect}(u_1, \dots, u_n) = \text{vect}(v_1, \dots, v_n),$$

et $\langle u_n, v_n \rangle > 0$. (Sans cette dernière condition, u_n est unique modulo multiplication par un scalaire de module 1.) La famille u_n est définie grâce à la formule de récurrence

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{v_{n+1} - P_{F_n}(v_{n+1})}{\|v_{n+1} - P_{F_n}(v_{n+1})\|} = \\ &= \left(\|v_{n+1}\|^2 - \sum_{i=1}^n |\langle v_{n+1}, u_i \rangle|^2 \right)^{-1/2} \left(v_{n+1} - \sum_{i=1}^n \langle v_{n+1}, u_i \rangle u_i \right). \end{aligned}$$

Remarque 7.4.7. La famille (u_n) dépend de l'ordre des éléments de (v_n) .

Exemple 7.4.8. *Polynômes orthogonaux.* Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $w \geq 0$ sur I tel que tout polynôme soit intégrable pour la mesure $w(x) dx$. En appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la famille $v_n(x) = x^n$ dans $L^2(I, w(x) dx)$, on obtient alors une famille P_n de polynômes telle que

$$\deg P_n = n, \quad P_n \perp \mathbb{R}_{n-1}[X] \subset L^2(I, w dx) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Quitte à renormaliser, on peut supposer qu'il sont tous de coefficient dominant égal à un. On peut obtenir une formule de récurrence plus simple que celle du procédé de Gram-Schmidt. En effet le polynôme $xP_n(x)$ est de degré $n + 1$, et s'écrit donc sous la forme

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \sum_{i=0}^n \lambda_i P_i(x),$$

mais puisque P_n est orthogonal aux polynômes de degré $\leq n - 1$ on a $\langle xP_n, P_i \rangle = 0$ pour $i \leq n - 2$. Pour $n \geq 2$ on a donc

$$P_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)P_n(x) + \beta_n P_{n-1}(x), \quad \alpha_n = \frac{\langle xP_n - P_{n+1}, P_n \rangle}{\|P_n\|^2}, \quad \beta_n = \frac{\langle P_{n+1} - xP_n, P_{n-1} \rangle}{\|P_{n-1}\|^2}.$$

Les polynômes orthogonaux ont de nombreuses applications en analyse numérique, notamment à la méthode d'intégration approchée de Gauss, et aux problèmes d'approximation polynomiale. Certaines familles de polynômes orthogonaux ont eu un rôle historique important, notamment :

- les polynômes de Hermite qui correspondent à $w = e^{-x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$,
- les polynômes de Legendre qui correspondent à $w = 1$ sur $I =]-1, 1[$,
- les polynômes de Tchebychev qui correspondent à $w = (1 - x^2)^{-1/2}$ sur $I =]-1, 1[$.

Exemple 7.4.9. On se place dans le cadre de l'exemple précédent. Si on se donne une suite de fonctions φ_n telles que les dérivées de φ_n d'ordre 0 à $n - 1$ s'annulent aux extrémités de I , et que

$$Q_n = \frac{1}{w} \varphi_n^{(n)} = \frac{1}{w} \frac{d^n}{dx^n} \varphi_n,$$

est polynomiale de degré n , alors (Q_n) est une suite de polynômes orthogonaux pour le poids w . En effet, en intégrant n fois par parties et en prenant en compte l'hypothèse d'annulation des dérivées de φ_n aux extrémités de I , on a

$$\int_I Q_n P w dx = \int_I \varphi_n^{(n)} P dx = (-1)^n \int_I \varphi_n P^{(n)} dx \quad \forall P \in \mathbb{R}[X],$$

donc Q_n est bien orthogonal à tous les polynômes de degré $\leq n - 1$. On peut ainsi construire (à un coefficient renormalisateur près) les polynômes de Hermite à partir de $\varphi_n = \varphi = e^{-x^2}$, les polynômes de Legendre à partir de $\varphi_n = (1 - x^2)^n$, et les polynômes de Tchebychev à partir de $\varphi_n = (1 - x^2)^{n-1/2}$. (Référence : Rombaldi, Interpolation et Approximation.)

Une autre conséquence de la formule de projection sur $F = \text{vect}(u_i)$ engendré par une famille ortho-normée finie est que pour tout $x \in H$ on a

$$\sum_{i=1}^N |\langle x, u_i \rangle|^2 = \|P_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|P_F(x) - x\|^2 \leq \|x\|^2,$$

et on en déduit donc le

Corollaire 7.4.10. Inégalité de Bessel. Si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille orthonormée de H , alors pour tout $x \in H$ on a

$$\sum_{i \in J} |\langle x, u_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall J \subset I \text{ finie.}$$

En particulier, si $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite orthonormée de H , alors pour tout $x \in H$, la suite $(\xi_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ donnée par

$$\xi_n = \langle x, u_n \rangle \quad \forall n \geq 0,$$

est de carré sommable : $(\xi_n) \in \ell^2$.

Remarque 7.4.11. En appliquant ce résultat au système trigonométrique on en déduit une version L^2 du lemme de Riemann-Lebesgue : Pour toute fonction $f \in L^2(0, T)$ on a

$$\int_0^T f(x) e^{i \frac{2\pi}{T} nx} dx \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0.$$

Réciproquement, toute suite de scalaires de carré sommable permet de construire un élément de H :

Proposition 7.4.12. Si (u_n) est une suite orthonormée d'un Hilbert H , alors pour toute suite $(\xi_n) \in \ell^2$,

$$\sum_n \xi_n u_n \quad \text{converge dans } H.$$

Démonstration. De l'identité

$$\left\| \sum_{i=n}^m \xi_i u_i \right\|^2 = \sum_{i=n}^m |\xi_i|^2,$$

on déduit que la suite des sommes partielles est de Cauchy. □

7.4.2 Bases hilbertiennes

Définition 7.4.13. Soit H un Hilbert. Une suite orthonormée $(u_n)_{n \geq 0}$ de H est une *base hilbertienne* si $\text{vect } \{u_n\}$ est dense dans H .

Remarque 7.4.14. Attention : ce n'est pas une base au sens algébrique (combinaisons linéaires finies). En fait on peut montrer qu'aucun Hilbert ne dimension infinie ne peut admettre de base algébrique dénombrable (exercice).

Remarque 7.4.15. Pour montrer qu'une famille orthonormée est une base Hilbertienne il peut être pratique d'utiliser le critère

$$\overline{\text{vect } A} = H \quad \Leftrightarrow \quad (\overline{\text{vect } A})^\perp = A^\perp = \{0\},$$

pour toute partie $A \subset H$.

Théorème 7.4.16. Tout espace de Hilbert séparable (i.e. admettant une partie dénombrable dense) admet une base hilbertienne.

Démonstration. D'une suite dense, on extrait une suite libre qui engendre un sev dense, et à cette suite libre on applique le procédé de Gram-Schmidt pour obtenir une base hilbertienne. □

Exemple 7.4.17. Pour tout $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et μ mesure borélienne régulière sur Ω , l'espace $L^2(\mu)$ est séparable et admet donc une base hilbertienne dénombrable.

Théorème 7.4.18. Soit H un espace de Hilbert séparable et (u_n) une famille orthonormée. La suite (u_n) est une base hilbertienne si et seulement si

$$\forall x \in H, \quad x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, u_n \rangle u_n,$$

si et seulement si (identité de Parseval)

$$\forall x \in H, \quad \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, u_n \rangle|^2.$$

Démonstration. En notant $F_n = \text{vect}(u_0, \dots, u_n)$, on a pour tout $x \in H$,

$$\text{dist}^2(x, \text{vect}\{u_n\}) = \inf_N \text{dist}^2(x, F_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \|x - P_{F_N}(x)\|^2,$$

donc, d'après l'expression de P_{F_N} à l'aide de sa base orthonormée, on voit que $x \in \overline{\text{vect}\{u_n\}}$ si et seulement si

$$\left\| x - \sum_{n=0}^N \langle x, u_n \rangle u_n \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=0}^N |\langle x, u_n \rangle|^2 \longrightarrow 0,$$

lorsque $N \rightarrow \infty$. □

Remarque 7.4.19. L'identité de Parseval est équivalente à

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, u_n \rangle \overline{\langle y, u_n \rangle} \quad \forall x, y \in H.$$

En particulier, si (u_n) est une base hilbertienne, l'application

$$H \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}), \quad x \mapsto (\langle x, u_n \rangle)_{n \geq 0},$$

est une bijection isométrique (au sens où elle préserve le produit scalaire). Ainsi, tout espace de Hilbert séparable est isomorphe à ℓ^2 .

Exemple 7.4.20. Dans ℓ^2 , la « base canonique » est une base hilbertienne.

Exemple 7.4.21. Dans $L^2(]0, T[, \frac{dx}{T})$, le système trigonométrique $u_n(x) = e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$, $n \in \mathbb{Z}$, est une base hilbertienne. On peut déduire ce résultat de la densité des fonctions continues à support compact, et du théorème de Féjer, énoncé ci-après dans le cas $T = 2\pi$: si $f \in C_{2\pi\text{-per}}^0(\mathbb{R})$ et on note $S_k(f) = \sum_{n=-k}^k \langle f, u_n \rangle u_n$ alors $\sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k(f)$ converge uniformément vers f lorsque $N \rightarrow \infty$. Rappelons que ce théorème est une conséquence du calcul explicite pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_N(x-y) f(y) dy, \quad F_N(x) = \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin(x/2)},$$

et des propriétés d'approximation de l'unité du « noyau de Féjer » F_N (cf exemple 5.2.6, à adapter à la convolution sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$).

Exemple 7.4.22. Si I est un intervalle de \mathbb{R} et $w \geq 0$ un poids sur I vérifiant

$$\int_I e^{\alpha|x|} w(x) dx < \infty,$$

pour un certain $\alpha > 0$, alors d'après l'exemple 7.2.9 les polynômes sont denses dans $L^2(I, w(x) dx)$ et donc la suite des polynômes orthogonaux associée au poids w est une base hilbertienne. En particulier, les polynômes de Hermite, de Legendre et de Tchebychev sont des bases hilbertiennes pour les poids associés (cf. exemple 7.4.8).

Exemple 7.4.23. L'exemple précédent permet de construire explicitement une base hilbertienne de $L^2(I)$ dans le cas où I est non borné (dans le cas borné, on a le système trigonométrique). Par exemple, à partir des polynômes d'Hermite $(H_n)_{n \geq 0}$ associés à $w(x) = e^{-x^2}$ sur \mathbb{R} , obtient une base hilbertienne (u_n) de $L^2(\mathbb{R})$, définie par $u_n(x) = H_n(x)\sqrt{w(x)} = H_n(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$.