Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 3^{e} année
Mesure et intégration — Année 2019–2020

Contrôle terminal
– le 7 janvier 2020 –
– durée 180 minutes –

Consignes. Pour chaque intégrale de la forme $\int_a^b f(x)\,dx$, préciser s'il s'agit d'une intégrale de Riemann, généralisée et/ou par rapport à la mesure de Lebesgue ; justifier son existence et préciser si les résultats utilisés concernent les intégrales de Riemann, généralisées ou par rapport à la mesure de Lebesgue. Lors de l'utilisation d'un résultat théorique, il faudra vérifier que ses hypothèses sont satisfaites.

Indication. Les exercices #1 – #3 sont standard. Les exercices #4 – #7 demandent plus de réflexion.

Question de cours #1 (2 p.) Soit $(X,\mathscr{T},\mu)$ un espace mesuré. Soient $f : X \to \mathbb{R}$ et $A \in \mathscr{T}$. Si l'intégrale $\int_X f\,d\mu$ existe, montrer que l'intégrale $\int_A f\,d\mu$ existe.

Question de cours #2 (3 p.) Montrer que $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m} = \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$.

Exercice #1 (2 p.) Soit $(X,\mathscr{T})$ un espace mesurable. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Soit $g : X \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } f(x) \notin \mathbb{Z} \\ 0, & \text{si } f(x) \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Montrer que g est mesurable.

Exercice #2 (3 p.) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Si f est Lebesgue intégrable, donner un sens à $\int_{\mathbb{R}} \exp(-n|\sin x|) f(x)\,dx$ (avec $n \in \mathbb{N}$) et calculer $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \exp(-n|\sin x|) f(x)\,dx$.

Indication pour l'exercice #3. Si $C \in C^1(]a,\infty[)$ et $\lim_{y\to\infty} C(y) = 0$, alors

$$C(y) = -\int_y^\infty C'(t)\,dt \text{ (intégrale généralisée)}, \ \forall\, y > a.$$

Exercice #3 (6 p.) Pour $y \geq 0$, soit $F(y) = \int_0^\infty \frac{\exp(-x^2 y)}{1+x^2}\,dx$.

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer $F(0)$ et déterminer $\lim_{y\to\infty} F(y)$.
3. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que F est, sur $\mathbb{R}_+^*$, solution d'une équation différentielle du premier ordre s'exprimant à l'aide du nombre $I = \int_0^\infty \exp(-x^2)\,dx$.
5. En déduire, sous forme intégrale, une expression de $F(y)$ valable pour $y > 0$.
6. En déduire la valeur de I.

Indications pour l'exercice #4.

(a) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$. Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $g(x)=xf(x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$. Si $f,g\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R},\mathscr{B}_{\mathbb{R}},\nu_1)$, alors $\widehat{f}\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $\widehat{g}=\imath\widehat{f}'$.

(b) Partir de l'égalité $(x+\imath)h(x)=f(x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

(c) Combien vaut $\lim_{\xi\to-\infty}\widehat{h}(\xi)$?

(d) Si $C\in C^1(]-\infty,a[)$ et $\lim_{y\to-\infty}C(y)=0$, alors

$$C(y)=\int_{-\infty}^{y}C'(t)\,dt \text{ (intégrale généralisée)}, \ \forall\, y<a.$$

Exercice #4 (5 p.) Soit $f\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R},\mathscr{B}_{\mathbb{R}},\nu_1)$. Soit $h:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $h(x)=\dfrac{1}{x+\imath}f(x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$. Montrer que

$$\widehat{h}(\xi)=-\imath\int_{-\infty}^{\xi}e^{t-\xi}\,\widehat{f}(t)\,dt,\ \forall\,\xi\in\mathbb{R}.$$

Indication pour l'exercice #5. Coordonnées polaires.

Exercice #5 (4 p.) Soit $\|\ \|$ une norme sur $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe une constante $C\in]0,\infty[$ telle que, pour toute fonction borélienne $f:[0,\infty[\to[0,\infty[$,

$$\int_{\mathbb{R}^2}f(\|x\|)\,dx=C\int_{\mathbb{R}^2}f(|x|)\,dx.$$

(Rappelons que $|\ |$ est la norme euclidienne standard.)

Exercice #6 (3 p.) Soit $g\in C^1([0,2\pi],\mathbb{R})$. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que $f(x)=g(x)$, $\forall\, x\in[0,2\pi[$. Montrer que

$$|c_n(f)|\le\frac{1}{\pi|n|}\int_0^{2\pi}|g'(t)|\,dt,\ \forall\, n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

Indications pour l'exercice #7.

(a) Si $K\subset\mathbb{R}$ est un compact, alors il existe une suite $(f_j)\subset C^\infty(\mathbb{R},[0,1])$ telle que $f_j\searrow\chi_K$.

(b) Pour la question 3, utiliser le théorème de la classe monotone.

(c) La question 3 est plus difficile, on peut l'admettre et traiter la question 4.

Exercice #7 (8 p.) Nous travaillons dans $(\mathbb{R},\mathscr{B}_{\mathbb{R}},\nu_1)$. Soit $\phi:[a,b]\to[c,d]$ une fonction de classe C^1 telle que $\phi(a)=c$ et $\phi(b)=d$. Nous nous proposons de montrer l'égalité

$$\int_c^d f(x)\,dx=\int_a^b f(\phi(y))\phi'(y)\,dy,\ \forall\, f:[c,d]\to\mathbb{R} \text{ borélienne et bornée.} \tag{1}$$

1. Prouver (1) si $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ est continue.
2. Prouver (1) si $f=\chi_K$, avec $K\subset[c,d]$ compact.
3. Soit

   $$\mathscr{A}=\{B\in\mathscr{B}_{[c,d]}\,;\, f=\chi_B \text{ satisfait (1)}\}.$$

   Montrer que $\mathscr{A}=\mathscr{B}_{[c,d]}$.
4. Prouver (1) si $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ est borélienne et bornée.