Université Claude Bernard Lyon 1
Mesure et intégration

Licence de mathématiques 3$^{\text{e}}$ année
Année 2020–2021

Contrôle terminal
– le mercredi 6 janvier 2021 –
– éléments de correction –

Exercices de base

Exercice # 1. (2 p.) Soit $a > 0$. Calculer

$$L_a := \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-x/n}}{(1+x)^a}\, dx.$$

(Le résultat final doit être un nombre explicite dans $\overline{\mathbb{R}}$, pas une intégrale.)

Éléments de correction. Le fait que $a > 0$ ne joue aucun rôle. Appliquer le théorème de convergence monotone. Via un changement affine de variables dans une intégrale généralisée, nous obtenons

$$L_a = \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^a}\, dx = \int_1^\infty \frac{1}{y^a}\, dy = \begin{cases} \infty, & \text{si } a \le 1 \\ \dfrac{1}{a-1}, & \text{si } a > 1 \end{cases}. \qquad \square$$

Exercice # 2. (2 p.) Pour $x \in \mathbb{R}$, soit

$$F(x) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}\, dt.$$

Montrer que F est continue.

Éléments de correction. Si $[a, b] \subset \mathbb{R}$, nous avons la majoration

$$\left|\frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}\right| \le \frac{|tx|}{|t|(1+t^2)} \le \max_{y\in[a,b]} |y| \frac{1}{1+t^2},\ \forall\, x \in [a, b],\ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Nous concluons en utilisant le fait que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \pi < \infty. \qquad \square$$

Exercice # 3. (1 p.) Montrer que la fonction F de l'exercice 2 est dérivable.

Éléments de correction. Nous avons la majoration

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}\right]\right| = \left|\frac{\cos(tx)}{1+t^2}\right| \le \frac{1}{1+t^2},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in \mathbb{R},$$

et nous concluons comme ci-dessus. $\square$

Exercice # 4. (3 p.) Soit $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x^2 < y < x\}$.

a) Dessiner D dans le plan xOy.

b) Calculer $\displaystyle\int_D \frac{y}{x}\, dxdy$.

Éléments de correction.

a) D est l'ouvert borné délimité par la première bissectrice et la parabole $y = x^2$.

b) Sans entrer dans les détails du calcul de chaque intégrale, le théorème de Tonelli local donne

$$\int_D \frac{y}{x}\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x \frac{y}{x}\,dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x - x^3)\,dx = \frac{1}{8}. \qquad \square$$

Exercice # 5. (2 p.) Soit $\Delta := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 < t < x\}$.

Montrer que

$$\int_\Delta \frac{\cos t}{1+x^3}\,dxdt = \int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x^3}\,dx.$$

Éléments de correction. Si le théorème de Fubini local s'applique, alors (sans entrer dans les détails des calculs)

$$\int_\Delta \frac{\cos t}{1+x^3}\,dxdt = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^3} \left(\int_0^x \cos t\,dt \right) dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x^3}\,dx.$$

Pour justifier l'utilisation du théorème de Fubini local, nous utilisons le théorème de Tonelli local pour obtenir (sans entrer dans les détails)

$$\int_\Delta \left| \frac{\cos t}{1+x^3} \right| dxdt \le \int_\Delta \frac{1}{1+x^3}\,dxdt = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^3} \left(\int_0^x dt \right) dx = \int_0^\infty \frac{x}{1+x^3}\,dx < \infty.$$

La dernière inégalité se justifie par une étude d'intégrale généralisée, en notant que l'intégrande se prolonge par continuité en 0, et qu'à l'infini nous avons

$$\frac{x}{1+x^3} \sim_\infty \frac{1}{x^2}.$$

Nous concluons grâce au critère de Riemann à l'infini. $\square$

Exercice # 6. (2 p.) Calculer

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+|x|)^3}\,dx$$

(où $|x|$ désigne la norme euclidienne usuelle de $x \in \mathbb{R}^2$).

Éléments de correction. En passant en coordonnées polaires et en utilisant le théorème de Tonelli local, nous obtenons (sans entrer dans les détails)

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+|x|)^3}\,dx = \int_0^\infty \frac{r}{(1+r)^3} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) dr = 2\pi \int_0^\infty \frac{r}{(1+r)^3}\,dr,$$

la dernière intégrale pouvant être vue comme une intégrale généralisée.

Nous avons, après un changement affine de variables dans une intégrale généralisée,

$$\int_0^\infty \frac{r}{(1+r)^3}\,dr = \int_1^\infty \frac{s-1}{s^3}\,ds = \int_1^\infty \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} \right) ds = \frac{1}{2}.$$

Il s'ensuit que l'intégrale de l'énoncé vaut π. $\square$

Exercice # 7. (2 p.) Soit

$$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ f(x):=\exp\left(-|x_1|-\cdots-|x_n|\right),\ \forall\, x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Calculer $\widehat{f}$.

Éléments de correction. Commençons par montrer que $f\in\mathscr{L}^1$ (ce qui implique que l'intégrande dans la formule de $\widehat{f}$ est intégrable). Le théorème de Tonelli donne (sans entrer dans les détails)

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\,dx=\left(\int_{\mathbb{R}}e^{-|x_1|}\,dx_1\right)^n=2^n<\infty\,;$$

au passage, nous avons utilisé le fait que

$$\int_{\mathbb{R}}e^{-|t|}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|t|}\,dt=2\int_0^{\infty}e^{-t}\,dt=2.$$

Le théorème de Fubini, justifié par ce qui précède, donne

$$\widehat{f}(\xi)=\prod_{j=1}^n\int_{\mathbb{R}}e^{-\imath x_j\xi_j}e^{-|x_j|}\,dx_j=2^n\prod_{j=1}^n\frac{1}{1+(\xi_j)^2}=2^n\frac{1}{\displaystyle\prod_{j=1}^n(1+(\xi_j)^2)}.$$

Ici, nous avons utilisé

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}e^{-\imath t\zeta}e^{-|t|}\,dt&=\int_{-\infty}^0 e^{-\imath t\zeta+t}\,dt+\int_0^{\infty}e^{-\imath t\zeta-t}\,dt=\left[\frac{e^{-\imath t\zeta+t}}{1-\imath\zeta}\right]_{t=-\infty}^{t=0}+\left[\frac{e^{-\imath t\zeta-t}}{-1-\imath\zeta}\right]_{t=0}^{t=\infty}\\&=\frac{1}{1-\imath\zeta}+\frac{1}{1+\imath\zeta}=\frac{2}{1+\zeta^2},\ \forall\,\zeta\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$ □

Exercices

Exercice # 8. (3 p.)

a) Soit $x\in[0,\infty[$. Établir la monotonie de la suite $\left(n\left(e^{x/n}-1\right)\right)_{n\geq 1}$. (On pourra par exemple utiliser le développement en série de l'exponentielle.)

b) Calculer

$$\lim_{n\to\infty}n\int_0^{\infty}(e^{x/n}-1)e^{-2x}\,dx.$$

Éléments de correction.

a) Nous avons

$$n\left(e^{x/n}-1\right)=n\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}\frac{x^k}{n^k}=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}\frac{x^k}{n^{k-1}}.$$

Chaque terme de la série décroissant avec n, la suite de l'énoncé est décroissante.

b) Les intégrandes étant positives, et, de ce qui précède, décroissantes avec n, nous utilisons le théorème de convergence décroissante (exercice 6.36). La première intégrande est intégrable, car

$$\int_0^{\infty}(e^x-1)\,e^{-2x}\,dx=\int_0^{\infty}(e^{-x}-e^{-2x})\,dx=\frac{1}{2}.$$

Comme (sans entrer dans les détails)

$$\lim_{n\to\infty} n\left(e^{x/n}-1\right) = x,\ \forall\, x\in\mathbb{R},$$

nous obtenons que la limite de l'énoncé vaut

$$\int_0^\infty x\, e^{-2x}\, dx = \frac{1}{4},$$

la dernière égalité étant obtenue en traitant l'intégrale comme une intégrale généralisée et en faisant une intégration par parties. (Une autre façon de procéder consiste à faire un changement linéaire de variable, afin de se ramener à $\Gamma(2)$.) $\square$

Exercice # 9. (1 p.) Soit F la fonction de l'exercice 2, qui est dérivable (voir l'exercice 3). Calculer $\lim\limits_{x\to\infty} F'(x)$.

Éléments de correction. Soit

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(t) := \frac{1}{1+t^2},\ \forall\, t\in\mathbb{R},$$

qui est Lebesgue intégrable.

Nous avons

$$F'(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\, dt = \text{Re}\left[\int_{\mathbb{R}} e^{-\imath tx} f(t)\, dt\right] = \text{Re}\left[\widehat{f}(x)\right],\ \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Le lemme de Riemann-Lebesgue donne $\lim\limits_{x\to\infty} F'(x) = 0$. $\square$

Exercice # 10. (2 p.) Nous travaillons dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \nu_1)$. Soit

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{C},\ g(\xi) := \begin{cases} |\xi|^{-1/3}-1, & \text{si } 0<|\xi|\le 1\\ 0, & \text{si } |\xi|>1 \text{ ou } \xi=0\end{cases}.$$

a) Existe-t-il $f\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f}=g$?
b) Existe-t-il $f\in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f}=g$?

Éléments de correction.

a) Nous avons $\lim\limits_{\xi\to 0} g(\xi) = \infty$, et donc g n'est pas continue en 0. La réponse est donc non.

b) Notons que la « vraie » question est s'il existe $f\in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f}=[g]$ (la classe d'équivalence de g), et que la réponse est positive si et seulement si $g\in\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$.
Sans entrer dans les détails, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} [g(\xi)]^2\, dx = 2\int_0^1 [\xi^{-1/3}-1]^2\, dx < \infty,$$

la dernière inégalité se justifiant via le critère de Riemann et le fait que

$$[\xi^{-1/3}-1]^2 \sim_{0+} \frac{1}{\xi^{2/3}}.$$

$\square$

Problèmes

Problème # 1. (4 p.) Soit

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 < y < x\}.$$

Soit

$$f : E \to \mathbb{R},\ f(x, y) := \frac{\cos y}{x^a},\ \forall\, (x, y) \in E,$$

où $1 < a < 2$.

a) Donner un sens à et montrer l'égalité

$$\int_0^\infty \left(\int_{E_x} f(x, y)\, dy\right) dx = \int_0^\infty \left(\int_{E^y} f(x, y)\, dx\right) dy.$$

b) Montrer que f n'est pas intégrable sur E, et donc le théorème de Fubini ne s'applique pas.

Éléments de correction.

a) Notons les égalités d'intégrales généralisées

$$\int_{E_x} f(x, y)\, dy = \frac{\sin x}{x^a},\ \forall\, x > 0,\ \text{et}\ \int_{E^y} f(x, y)\, dx = \frac{1}{a-1}\frac{\cos y}{y^{a-1}},\ \forall\, y > 0.$$

Pour établir l'égalité de l'énoncé, montrons l'égalité d'intégrales généralisées

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^a}\, dx = \frac{1}{a-1}\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^{a-1}}\, dx.$$

Notons que chacune des intégrales généralisées converge. Par exemple pour la première, nous avons

$$\frac{\sin x}{x^a} \sim_{0+} \frac{1}{x^{a-1}},$$

et la convergence en 0 suit du critère de Riemann en 0 et de l'hypothèse $a < 2$, qui entraîne $a-1 < 1$. À l'infini, la convergence suit de la convergence des intégrales oscillantes de la forme $\displaystyle\int_A^\infty \sin x\, f(x)\, dx$, avec $f \in C^1$, $f \searrow$ et $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. (Raisonnement analogue pour la seconde intégrale généralisée.) Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a-1}\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^{a-1}}\, dx &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0+\\ M\to\infty}} \frac{1}{a-1}\int_\varepsilon^M \frac{\cos x}{x^{a-1}}\, dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0+\\ M\to\infty}} \frac{1}{a-1}\int_\varepsilon^M \frac{\sin' x}{x^{a-1}}\, dx \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0+\\ M\to\infty}} \left\{ \left[\frac{1}{a-1}\frac{\sin x}{x^{a-1}}\right]_{x=\varepsilon}^{x=M} + \int_\varepsilon^M \frac{\sin x}{x^a}\, dx \right\} \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0+\\ M\to\infty}} \left\{ \underbrace{\frac{1}{a-1}\frac{\sin M}{M^{a-1}}}_{\to 0,\ \text{car } a-1>0} - \underbrace{\frac{1}{a-1}\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon^{a-1}}}_{\to 0,\ \text{car } a-1<1} + \int_\varepsilon^M \frac{\sin x}{x^a}\, dx \right\} \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0+\\ M\to\infty}} \int_\varepsilon^M \frac{\sin x}{x^a}\, dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^a}\, dx.
\end{aligned}$$

b) Le théorème de Tonelli local donne (sans entrer dans les détails)

$$\int_E |f(x,y)|\,dxdy = \frac{1}{a-1}\int_0^\infty \frac{|\cos y|}{y^{a-1}}\,dy.$$

En traitant cette intégrale comme une intégrale généralisée, nous obtenons (sans entrer dans les détails), en utilisant successivement les inégalités $a-1>0$ et $a-1<1$,

$$\int_0^\infty \frac{|\cos y|}{y^{a-1}}\,dy = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N \int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} \frac{|\cos y|}{y^{a-1}}\,dy \geq \limsup_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N \int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} \frac{|\cos y|}{(2n\pi)^{a-1}}\,dy$$
$$= \limsup_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N \frac{2}{(2n\pi)^{a-1}} = \frac{2}{(2\pi)^{a-1}}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{a-1}} = \infty,$$

d'où la conclusion. □

Problème # 2. (4 p.) Nous travaillons dans $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}, \nu_n)$.

Rappelons la propriété suivante : si $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\, g(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \widehat{g}(x)\, dx. \tag{1}$$

a) Soit

$$g^\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ g^\varepsilon(x) := \exp\left(-\varepsilon|x_1| - \cdots - \varepsilon|x_n|\right),\ \forall\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, \varepsilon > 0.$$

Calculer $\widehat{g^\varepsilon}$.

b) Si $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$ est une fonction continue et bornée telle que $\widehat{f} \in \mathscr{L}^1$, montrer, à l'aide de (1) et a), la formule d'inversion

$$f(0) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\, d\xi.$$

Éléments de correction.

a) En reprenant les calculs de l'exercice 7, nous obtenons $g^\varepsilon \in \mathscr{L}^1$ et

$$\widehat{g^\varepsilon}(\xi) = \frac{(2\varepsilon)^n}{\prod_{j=1}^n (\varepsilon^2 + (\xi_j)^2)},\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, \varepsilon > 0.$$

b) Nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\, \exp\left(-\sum_{j=1}^n \varepsilon|\xi_j|\right) d\xi = (2\varepsilon)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)}{\prod_{j=1}^n (\varepsilon^2 + (x_j)^2)}\, dx.$$

En faisant, dans l'intégrale de droite, le changement linéaire de variables $x = \Phi(y) := \varepsilon y$, nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\, \exp\left(-\sum_{j=1}^n \varepsilon|\xi_j|\right) d\xi = 2^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\varepsilon y)}{\prod_{j=1}^n (1 + (y_j)^2)}\, dy.$$

Nous considérons cette égalité le long d'une suite $(\varepsilon_\ell) \subset]0,\infty[$ telle que $\varepsilon_\ell \to 0$, et passons à la limite, pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\, d\xi = 2^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(0)}{\prod_{j=1}^n (1+(y_j)^2)}\, dy = (2\pi)^n\, f(0),$$

qui est la formule d'inversion.

Le passage à la limite utilise les hypothèses f bornée et continue et $\widehat{f} \in \mathscr{L}^1$, et le fait que $g^1 \in \mathscr{L}^1$. Les dominations sont, à gauche,

$$\left| \widehat{f}(\xi)\, \exp\left(-\sum_{j=1}^n \varepsilon_\ell |\xi_j| \right) \right| \leq |\widehat{f}(\xi)|,\ \forall\, \ell,\ \forall\, \xi,$$

et, à droite,

$$\left| \frac{f(\varepsilon_\ell y)}{\prod_{j=1}^n (1+(y_j)^2)} \right| \leq \|f\|_{L^\infty} \frac{1}{\prod_{j=1}^n (1+(y_j)^2)} = \|f\|_{L^\infty}\, g^1(y),\ \forall\, \ell,\ \forall\, y. \qquad \square$$

Problème # 3. (4 p.) Soient $f, g :]0,\infty[\to [0,\infty[$ deux fonctions boréliennes. Montrer que

$$\int_{]0,\infty[^2} f(x+y)\, g(xy)\, |x-y|\, dxdy = 2\int_0^\infty f(x) \left(\int_0^{x^2/4} g(y)\, dy \right) dx.$$

Éléments de correction. L'intégrande h étant borélienne positive, nous avons

$$\int_{]0,\infty[^2} h = \int_A h + \int_B h + \int_C h,$$

où

$$A := \{(x,y)\,;\, 0 < x < y\},\ B := \{(x,y)\,;\, 0 < x = y\},\ C := \{(x,y)\,;\, 0 < y < x\}.$$

Comme $h = 0$ sur B, nous avons $\int_{]0,\infty[^2} h = \int_A h + \int_C h$. Nous calculons l'intégrale sur A. Par symétrie, le calcul sur C donne le même résultat, et donc finalement nous aurons $\int_{]0,\infty[^2} h = 2\int_A h$.

Posons, pour $(x,y) \in A$, $u := x+y$, $v := xy$, de sorte que $u > 0$, $v > 0$ et $u^2 > 4v$. Réciproquement, soit

$$(u,v) \in \Delta,\ \text{avec}\ \Delta := \{(u,v)\,;\, u > 0,\ v > 0,\ u^2 > 4v\}.$$

Alors le seul couple $(x,y) \in A$ tel que $x+y = u$ et $xy = v$ est donné par

$$x := \frac{u - \sqrt{u^2-4v}}{2},\, y := \frac{u + \sqrt{u^2-4v}}{2}.$$

Il s'ensuit que l'application

$$\Phi : \Delta \to A,\ \Phi(u,v) := \left(\frac{u - \sqrt{u^2-4v}}{2}, \frac{u + \sqrt{u^2-4v}}{2} \right),$$

est bijective, et il est assez immédiat que c'est un C^1-difféomorphisme tel que $|J_\Phi(u,v)| = \dfrac{1}{\sqrt{u^2-4v}}$.

En utilisant le théorème du changement de variables et le théorème de Tonelli local, nous obtenons (sans donner les détails)

$$\int_A f(x+y)\, g(xy)\, |x-y|\, dxdy = \int_\Delta f(u)\, g(v)\, dudv = \int_0^\infty f(u) \left(\int_0^{u^2/4} g(v)\, dv \right) du,$$

d'où la conclusion. $\square$