Université Claude Bernard Lyon 1 | Licence de mathématiques 3^e année
Mesure et intégration | Année 2020–2021

DM1 corrigé

Exercices de routine

Exercice # 1. Soient A, B, C des parties de l'ensemble X. Si

$$A \cup C = B \cup C \text{ et } A \cap C = B \cap C,$$

montrer que $A = B$.

Solution (TT). On a que

$$A = \big((A \cup C) \setminus C\big) \cup (A \cap C) = \big((B \cup C) \setminus C\big) \cup (B \cap C) = B.$$

Justifions la première égalité. Pour montrer l'inclusion $\subseteq$, soit $x \in A$. Si $x \in C$, alors $x \in A \cap C$ et si $x \notin C$, alors $x \in (A \cup C) \setminus C$. Inversement, $A \cap C \subseteq A$ et $(A \cup C) \setminus C = A \setminus C \subseteq A$. □

Exercice # 2. Calculer

$$\limsup_n \left((-1)^n\, n^a + n^b\, \ln n\right),$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ sont des paramètres.

Solution (JK). On distingue les cas

$a > 0$ ou $b \geq 0$. Dans ce cas

$$\sup_{k \geq n} \left((-1)^k\, k^a + k^b\, \ln k\right) \geq \sup_{2k \geq n} \left((2k)^a + (2k)^b \ln(2k)\right) = +\infty$$

et donc

$$\limsup_n \left((-1)^n\, n^a + n^b\, \ln n\right) = +\infty.$$

$a = 0$ et $b < 0$. Maintenant $n^b\, \ln n$ est une suite qui tend vers 0; donc

$$\limsup_n \left((-1)^n\, n^0 + n^b\, \ln n\right) = \limsup_n (-1)^n + \lim_n n^b\, \ln n = 1.$$

$a < 0$ et $b < 0$. Maintenant $\left((-1)^n\, n^a + n^b\, \ln n\right)$ est une suite qui tend vers 0; donc

$$\limsup_n \left((-1)^n\, n^a + n^b\, \ln n\right) = \lim_n \left((-1)^n\, n^a + n^b\, \ln n\right) = 0.$$ □

Exercice # 3. Montrer que $\mathbb{N}[X]$ est dénombrable.

Solution (TT). On rappelle que $\mathbb{N}[X]$ dénote l'ensemble de polynômes en la variable X avec des coefficients dans $\mathbb{N}$. Soit

$$D_k := \{P \in \mathbb{N}[X]\,;\deg P \leq k\}.$$

L'application $\Phi\colon \mathbb{N}^{k+1} \to D_k$, définie par $\Phi(a_0, \ldots, a_k) := \sum_{i=0}^k a_i X^i$ est bijective et comme $\mathbb{N}^{k+1}$ est dénombrable, on conclut que D_k est dénombrable. Il ne reste qu'à obsérver que $\mathbb{N}[X] = \bigcup_k D_k$ et de se rappeler qu'une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable. □

Exercice # 4. Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$f^{-1}(]a, b[) \in \mathscr{T},\ \forall\, a, b \in \mathbb{Q} \text{ tels que } a < b.$$

Montrer que f est mesurable.

Solution (JK). Soit $\mathscr{A}$ la famille des intervalles ouverts $]a, b[$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{Q}$. Montrons que la tribu $\mathscr{T}(\mathscr{A})$ engendrée par $\mathscr{A}$ coïncide avec la tribu borélienne de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Comme tout nombre réel est limite d'une suite décroissante de nombres rationnels, il existe une suite $(\alpha_n) \subset \mathbb{Q} \cap]a, +\infty[$ décroissante t.q. $]a, +\infty[= \bigcup_n]\alpha_n, n[$. La classe monotone engendrée par $\mathscr{A}$ et donc aussi la tribu $\mathscr{T}(\mathscr{A})$ contient donc la famille $\mathscr{A}'$ des intervalles ouverts $]a, +\infty[$, avec $a \in \mathbb{R}$. D'après la proposition 2.16 b) (ii), la tribu engendrée par $\mathscr{A}'$ est la tribu borélienne. On a alors

$$\mathscr{B}_{\mathbb{R}} = \mathscr{T}(\mathscr{A}') \subset \mathscr{T}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{B}_{\mathbb{R}},$$

les inclusions étant la conséquence des inclusions $\mathscr{A}' \subset \mathscr{T}(\mathscr{A})$ et $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ (exercice 2.12).

Maintenant, l'énoncé est une application directe de la proposition 3.19. Selon cette proposition, l'hypothèse que $f^{-1}(]a, b[) \in \mathscr{T}$, $\forall\, a, b \in \mathbb{Q}$ tels que $a < b$ entraîne que $f^{-1}(A) \in \mathscr{T}$, $\forall\, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ et donc f est mesurable. □

Exercice # 5. Soit $(F_n)_{n \geq 1} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Soit

$$f : \mathbb{R} \to [0, \infty],\ f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + |x|^n) \times \operatorname{dist}(x, F_n),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que f est borélienne.

Solution (TT). On se rappelle du cours de topologie que, pour tout $F \subset \mathbb{R}$, la fonction $\operatorname{dist}(\cdot, F)$ est continue. En effet, si $F \neq \emptyset$,

$$|\operatorname{dist}(x, F) - \operatorname{dist}(y, F)| \leq |x - y| \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}$$

et $\operatorname{dist}(x, \emptyset) = \infty$ pour tout x. On note également que la fonction f est bien définie ($f(x)$ peut être fini ou infini) car tous les termes de la somme sont positifs.

On a donc que pour tout N la somme partielle jusqu'à N est une fonction continue : $\mathbb{R} \to [0, \infty]$ (comme la composition, le produit et la somme de fonctions continues) et f est borélienne, comme limite simple de fonctions continues. □

Exercice # 6. Expliquer, avec ses propres mots, les notions suivantes :

a) Espace mesuré.

b) Fonction mesurable.

c) L'intégrale de Lebesgue d'une fonction positive.

d) Fonction Lebesgue intégrable.

Quelles sont les pré-requis dont on a besoin pour définir rigoureusement ces notions ?

Solution (JK).

a) Un espace mesuré est un ensemble X muni d'une tribu $\mathscr{T}$ et d'une mesure μ. Une tribu est une famille $\mathscr{T}$ de parties de X, qui satisfait les conditions : i) $\emptyset \in \mathscr{T}$, ii) $\mathscr{T}$ est fermé sous l'opération de prendre le complémentaire, iii) $\mathscr{T}$ est fermé sous l'opération de prendre des unions dénombrables. Une mesure est une fonction $\mu : \mathscr{T} \to [0, +\infty]$, qui satisfait $\mu(\emptyset) = 0$ et qui est σ-additive, c.à.d. $\mu(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ pour une collection d'ensembles $A_n \in \mathscr{T}$ deux à deux disjoints.

b) Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Pour parler de la mesurabilité de f, X doit être muni d'une tribu $\mathscr{T}$. On peut donc définir la notion de fonction étagée : c'est une fonction $g : X \to \mathbb{R}$ qui est combinaison linéaire d'un nombre fini de fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables A_i, $g = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathscr{T}$. Maintenant f est mesurable si f est limite simple d'une suite de fonctions étagées. De plus, une fonction $f : X \to \mathbb{R}^n$ est mesurable si ses composantes f_i sont mesurables.

Il s'avère qu'une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si l'image réciproque d'un borélien est un membre de $\mathscr{T}$.

c) Soit $f : X \to [0, +\infty]$. Pour parler de l'intégrale de f (au sens de Lebesgue), l'ensemble X doit être muni d'une tribu $\mathscr{T}$ et d'une mesure μ, c.à.d. $(X, \mathscr{T}, \mu)$ doit être un espace mesuré, et f doit être mesurable.

Une fonction étagée *positive* est une fonction $g : X \to \mathbb{R}^+$ qui est combinaison linéaire positive d'un nombre fini de fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables A_i, $g = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ (avec $a_i \geq 0$). Pour une telle fonction g, l'intégrale est définie comme

$$\int g = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)\,;$$

il faut montrer que l'expression à droite ne dépend pas du choix de la combinaison linéaire positive (des a_i et A_i) pour exprimer g. Puis on définit l'intégrale de f par

$$\int f = \sup \left\{ \int g\,; g \leq f, g \text{ étagée positive} \right\}.$$

Il existe une formulation équivalente qui est plus intuitive : toute fonction positive mesurable f est limite simple d'une suite croissante (g_n) de fonctions étagées. On a alors

$$\int f = \lim_n \int g_n.$$

Dans ce cours, l'appellation « intégrale de Lebesgue » d'une fonction est réservée au cas où $X = \mathbb{R}^n$, $\mathscr{T} = \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ (la tribu boréliennne) et μ = la mesure de Lebesgue.

d) Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Une fonction $f : X \to [0, +\infty]$ (positive!) est intégrable si f est mesurable et son intégrale $\int f$ est finie. Une fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est intégrable si $f_+ = \max\{f, 0\}$ et $f - f_+$ sont intégrables (d'une manière équivalente, $|f|$ est intégrable).

On peut élargir l'ensemble des fonctions pour lesquelles une intégrale existe par le processus de complétion. On utilise la mesure μ pour définir qu'une partie $A \subset X$ est négligable si elle est incluse dans un $B \in \mathscr{T}$ de mesure nulle. La tribu complétée $\overline{\mathscr{T}}$ est la plus petite tribu qui contient $\mathscr{T}$ et tous les ensembles négligeables. On appelle donc une fonction $\overline{\mathscr{T}}$-mesurable si elle est mesurable par rapport à la tribu complétée. Il existe une unique mesure $\overline{\mu}$, qui prolonge μ sur $\overline{\mathscr{T}}$ et la définition de l'intégrale se fait alors comme plus haut, mais avec la tribu et la mesure complétée. Ça ne change pas grand-chose, car pour toute fonction f qui est $\overline{\mathscr{T}}$-mesurable on trouve une fonction g mesurable (par rapport à $\mathscr{T}$) t.q. $f = g$ presque partout et donc $\int f = \int g$.

Dans ce cours, l'appellation « fonction Lebesgue intégrable » est réservée au cas où $X = \mathbb{R}^n$, $\mathscr{T} = \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ le tribu borélien et μ = la mesure de Lebesgue ou les versions complétées.

□

Exercice # 7. Étudier l'existence et la finitude de

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^a}\, dx,$$

avec $a \in \mathbb{R}$ paramètre, au sens des intégrales généralisées et de Lebesgue.

Solution (TT). D'abord notons que l'intégrande est une fonction continue positive et donc l'intégrale de Lebesgue et l'intégrale généralisée coïncident. Nous avons que

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^a}\,dx = \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^a}\,dx + \int_1^\infty \frac{1-\cos x}{x^a}\,dx =: I_1 + I_2$$

et nous allons étudier les deux intégrales I_1 et I_2 séparément.

D'abord si $a > 1$, $I_2 \leq \int_1^\infty \frac{2}{x^a}\,dx < \infty$. D'autre part pour tout $k \geq 0$, $\cos x$ est négatif dans l'intervalle $[(4k+1)\pi/2, (4k+3)\pi/2]$ et on a :

$$I_2 \geq \sum_{k=0}^\infty \int_{(4k+1)\pi/2}^{(4k+3)\pi/2} \frac{1}{x^a}\,dx.$$

Si $a \leq 0$, cette somme est manifestement infinie. Pour $a \in (0,1]$, la fonction $1/x^a$ est décroissante et

$$\int_{(4k+1)\pi/2}^{(4k+3)\pi/2} \frac{1}{x^a}\,dx \geq \int_{(4k+3)\pi/2}^{(4k+5)\pi/2} \frac{1}{x^a}\,dx.$$

Il en suit que

$$\begin{aligned} I_2 &\geq \sum_{k=0}^\infty \int_{(4k+1)\pi/2}^{(4k+3)\pi/2} \frac{1}{x^a}\,dx \geq \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=0}^\infty \int_{(4k+1)\pi/2}^{(4k+3)\pi/2} \frac{1}{x^a}\,dx + \sum_{k=0}^\infty \int_{(4k+3)\pi/2}^{(4k+5)\pi/2} \frac{1}{x^a}\,dx\Big) \\ &\geq \frac{1}{2}\int_{3\pi/2}^\infty \frac{1}{x^a}\,dx = \infty. \end{aligned}$$

En conclusion $I_2 < \infty$ pour $a > 1$ et $I_2 = \infty$ pour $a \leq 1$.

Maintenant, considérons I_1 dans le cas où $a > 1$. En utilisant le développement limité de $\cos x$, on voit que $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = 1/2$. En particulier, $I_1 < \infty$ ssi $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^a}\,dx < \infty$. Cette dernière intégrale est finie ssi $a - 2 < 1$.

Enfin, on conclut que l'intégrale donnée existe pour tout a et elle est finie ssi I_1 et I_2 sont finies ssi $a \in (1,3)$. □

Exercice # 8. Soit

$$I := \int_0^1 \ln(1-x)\,dx$$

(intégrale généralisée). Calculer I :

a) À partir de la définition de l'intégrale généralisée.
b) En utilisant un développement en série entière.

Justifier par un calcul direct l'égalité des deux résultats obtenus.

Solution (JK).

a) Par définition de l'intégrale généralisée,

$$I := \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \ln(1-x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \ln y\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0}\,[y\ln y - y]_0^{1-\varepsilon} = -1.$$

b) On calcule l'intégrale comme une intégrale de Lebesgue (proposition 6.43). On développe $\ln(1-x)$ en série entière :

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n},\ \forall\, x \in [0,1[.$$

On observe que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ est une série de termes positifs sur $[0,1[$. D'après le théorème 6.34, on peut échanger la sommation avec l'intégrale dans l'expression

$$I := -\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n} dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right]_0^1 = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)};$$

pour la troisième égalité, nous avons identifié intégrale de Lebesgue et intégrale de Riemann (proposition 6.42).

En appliquant $\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n(n+2)}$ d'une manière iterative on obtient

$$\sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{2^k}{(1+2^k)}.$$

D'où $I = -\lim_k \sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{n(n+1)} = -1$. □

Exercice # 9. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx,$$

l'intégrale étant une intégrale de Riemann.

(Il peut être utile de considérer le développement en série de la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$, avec $|t| < 1$.)

Solution (TT). Comme l'intégrande est une fonction continue positive, on peut considérer l'intégrale comme une intégrale de Lebesgue. Soit $f_n(x) := \chi_{[0,n[}(x)(1 - x/n)^n$. Pour tout $x > 0$, on a :

$$f_n(x) = \chi_{[0,n[}(x) \exp(n \ln(1 - x/n)) = \chi_{[0,n[}(x) \exp(xg(x/n)),$$

où $g\colon\,]0,1[\to \mathbb{R}$ est définie par $g(t) := \frac{\ln(1-t)}{t}$. En calculant $g'(t)$ ou en considérant le développement en série de g, on voit que g est décroissante sur $]0,1[$. On a également $\lim_{t\to 0} g(t) = -1$.

Montrons que pour tout $x \geq 0$ et tout n, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. Si $x \geq n+1$ ou $x = 0$, alors $f_n(x) = f_{n+1}(x) = 0$. Si $x \in [n, n+1[$, alors $f_n(x) = 0$ et $f_{n+1}(x) > 0$. Enfin si $0 < x < n$, alors

$$f_n(x) = \exp(xg(x/n)) \leq \exp(xg(x/(n+1))) = f_{n+1}(x),$$

par la remarque d'avant. De plus, $\lim_n f_n(x) = \chi_{[0,\infty[}(x) \exp(-x)$. En appliquant le théorème de convergence monotone et en identifiant l'intégrale de Lebesgue avec une intégrale généralisée (proposition 6.43), on obtient que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx = \int_0^\infty \exp(-x)\, dx = \big[-\exp(-x)\big]_0^\infty = 1.$$ □

Exercice # 10. Soit

$$I_n := \int_0^\infty \frac{\cos(nx)}{1+x^n}\, dx,\ \forall\, n \geq 2$$

(intégrale de Lebesgue).

a) Montrer que I_n existe, $\forall\, n \geq 2$.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Solution (JK).

a) La fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{\cos(nx)}{1+x^n}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc intégrable au sens de Riemann sur $[0,b]$ pour tout $b > 0$. De plus, $|f(x)| \leq \dfrac{1}{1+x^n}$. D'après le critère de Riemann, l'intégrale généralisée converge absolument si $n \geq 2$, c.à.d. $\lim_{b\to+\infty} \int_0^b |f(x)|dx$ est finie. D'après la proposition 6.43, f est alors intégrable au sens de Lebesgue, $\forall\, n \geq 2$.

b) Comme l'intégrale généralisée de f converge absolument si $n \geq 2$, son intégrale de Lebesgue coïncide avec son intégrale généralisée, dans laquelle on peut effectuer une intégration par parties, en posant

$$u(x) = \frac{1}{1+x^n}, \quad v'(x) = \cos(nx), \quad \text{donc} \quad u'(x) = -\frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}, \quad v(x) = \frac{1}{n}\sin(nx).$$

Alors $I_n = \lim\limits_{b\to+\infty} \displaystyle\int_0^b \frac{\cos(nx)}{1+x^n}dx$ et

$$\int_0^b \frac{\cos(nx)}{1+x^n}dx = \frac{1}{n}\left[\frac{\sin(nx)}{1+x^n}\right]_0^b + \int_0^b \frac{x^{n-1}\sin(nx)}{(1+x^n)^2}dx$$

Pour $b > 1$, on a

$$\left|\int_0^b \frac{x^{n-1}\sin(nx)}{(1+x^n)^2}dx\right| \leq \int_0^1 x^{n-1}dx + \int_1^b \frac{1}{x^{n+1}}dx = \frac{1}{n} + \frac{1}{-nb^n} - \frac{1}{-n} \leq \frac{2}{n}.$$

De plus,

$$\left|\frac{1}{n}\left[\frac{\sin(nx)}{1+x^n}\right]_0^b\right| \leq \frac{1}{n}.$$

En faisant $b \to +\infty$, nous obtenons, de ce qui précède, $|I_n| \leq \dfrac{3}{n}$, $\forall\, n \geq 2$, d'où la conclusion. □

Exercices avancés

Exercice # 11. Soit $(x_j)_{j\geq 1} \subset \mathbb{R}$ une suite de réels. Pour chaque $t > 0$, soit

$$U_t := \cup_{j\geq 1}]x_j - t/2^j, x_j + t/2^j[.$$

Montrer que la fonction

$$f :]0,\infty[\to]0,\infty[, \; f(t) := \nu_1(U_t), \; \forall\, t > 0,$$

est continue et surjective.

Solution (PM). U_t est ouvert (union d'ouverts), donc borélien. Il s'ensuit que f est bien définie.

Par ailleurs, nous avons (via la sous-additivité de la mesure)

$$f(t) \leq \sum_{j\geq 1} \nu_1(]x_j - t/2^j, x_j + t/2^j[) = \sum_{j\geq 1} t/2^{j-1} = 2t < \infty$$

et (par monotonie de la mesure)

$$f(t) \geq \nu_1(]x_1 - t/2, x_1 + t/2[) = t > 0,$$

d'où

$$f :]0, \infty[\to]0, \infty[, \lim_{t\to 0} f(t) = 0 \text{ et } \lim_{t\to\infty} f(t) = \infty. \tag{1}$$

Si $0 < t < s$, alors $U_t \subset U_s$, d'où (par monotonie de la mesure) f est croissante.

Au vu de (1) et de la monotonie de f, pour montrer que f est surjective, il suffit de montrer que f est continue (car, dans ce cas, son image contient $]\lim_{t\to 0} f(t), \lim_{t\to\infty} f(t)[$).[1]

En utilisant la propriété $(\cup_{i\in I} A_i)\setminus(\cup_{i\in I} B_i) \subset \cup_{i\in I}(A_i\setminus B_i)$ et le fait que $\nu_1(U_t) < \infty$, nous obtenons, pour $0 < t < s$:

$$\begin{aligned} 0 \leq f(s) - f(t) &= \nu_1(U_s) - \nu_1(U_t) = \nu_1(U_s \setminus U_t) \\ &\leq \nu_1(\cup_{j\geq 1}(]x_j - s/2^j, x_j + s/2^j[\setminus]x_j - t/2^j, x_j + t/2^j[) \\ &\leq \sum_{j\geq 1} \nu_1(]x_j - s/2^j, x_j + s/2^j[\setminus]x_j - t/2^j, x_j + t/2^j[) \\ &= \sum_{j\geq 1} (s-t)/2^{j-1} = 2(s-t). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que f est 2-lipschitzienne, donc continue. □

Exercice # 12. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue mesurable bornée. Montrer qu'il existe $g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telles que :

a) g et h sont boréliennes.

b) $g = h$ ν_n-p. p.

c) $g(x) \leq f(x) \leq h(x), \forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

Solution (PM). Soient $k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ borélienne et $C \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ Lebesgue négligeable tels que $f = k$ dans $\mathbb{R}^n \setminus C$ (proposition 4.19 a)). Les fonctions

$$g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ g(x) := \begin{cases} k(x), & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus C \\ \inf f, & \text{si } x \in C \end{cases},\ h(x) := \begin{cases} k(x), & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus C \\ \sup f, & \text{si } x \in C \end{cases}$$

ont toutes les qualités requises (exercice 32 d), feuille 2). □

Exercice # 13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

1. f est bijective.
2. $f \in C^1$.
3. $f'(t) > 0, \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Soit $f_*\nu_1$ la mesure image de la mesure de Lebesgue ν_1 sur $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ par f. Rappelons que

$$f_*\nu_1(B) := \nu_1(f^{-1}(B)),\ \forall\, B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}.$$

Montrer que

$$f_*\nu_1(B) = \int_B (f^{-1})'(t)\, d\nu_1(t),\ \forall\, B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}.$$

(On pourra commencer par le cas où B est un intervalle compact.)

1. On peut se passer de la monotonie de f, à condition de montrer le résultat suivant : si $f :]0, \infty[\to]0, \infty[$ est continue, $\lim_{t\to 0} f(t) = 0$ et $\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$, alors f est surjective.

Solution (PM). $(f^{-1})'$ est continue (donc borélienne) et > 0. Soit

$$\mu(B) := \int_B (f^{-1})'(t)\, d\nu_1(t),\ \forall\, B \in \mathscr{B}_\mathbb{R}.$$

Alors μ est une mesure borélienne *à densité* (exercice 6.38).

Pour montrer que $f_*\nu_1 = \mu$, nous utilisons la proposition 4.23, avec

$$\mathscr{C} := \{A \subset \mathbb{R}\,;\, A \text{ est une union finie d'intervalles}\},$$

de sorte que $\mathscr{T}(\mathscr{C}) = \mathscr{B}_\mathbb{R}$ (par double inclusion, en notant que $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}_\mathbb{R}$ et que $\mathscr{C}$ contient les intervalles, qui engendrent $\mathscr{B}_\mathbb{R}$).

Rappelons que $\mathscr{C}$ est un clan et que tout élément de $\mathscr{C}$ est une union finie d'intervalles *disjoints* (exercice 1.35). En combinant ces propriétés avec la proposition 4.23, pour conclure à l'égalité $f_*\nu_1 = \mu$ il suffit de montrer que

$$f_*\nu_1(I) = \mu(I),\ \forall\, I \subset \mathbb{R} \text{ intervalle}, \tag{2}$$

$$\mathbb{R} = \cup_n I_n,\ \text{avec } I_n \text{ intervalle tel que } f_*\nu_1(I_n) < \infty,\ \forall\, n. \tag{3}$$

Preuve de (3). Soit $I_n := [-n, n]$, $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\mathbb{R} = \cup_{n\geq 1} I_n$, et

$$f_*\nu_1(I_n) = \nu_1(f^{-1}([-n, n])) = \nu_1([f^{-1}(-n), f^{-1}(n)]) = f^{-1}(n) - f^{-1}(-n) < \infty,\ \forall\, n.$$

Preuve de (2) *si I est un intervalle compact.* Si $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, alors, par changement de variable $x := f^{-1}(t)$ dans l'intégrale de Riemann, nous avons

$$\begin{aligned} f_*\nu_1([a, b]) = \nu_1([f^{-1}(a), f^{-1}(b)]) = f^{-1}(b) - f^{-1}(a) &= \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} dx \\ = \int_a^b (f^{-1})'(t)\, dt &= \int_{[a,b]} (f^{-1})'(t)\, d\nu_1(t), \end{aligned}$$

la dernière égalité découlant de la proposition 6.42.

Preuve de (2) *pour un intervalle quelconque I.* Tout intervalle est l'union d'une suite croissante d'intervalles compacts. Pour établir ce fait, il y a de nombreux cas à étudier ; faisons la preuve dans deux cas particuliers. Si $I = [a, \infty[$, alors $I = \cup_{n\geq 1}[a, a + n]$. Si $I = [a, b[$, alors $I = \cup_{n\geq n_0}[a, b - 1/n]$, où n_0 est tel que $b - 1/n_0 > a$.

Si $I_n \nearrow I$, avec chaque I_n compact, alors (théorème de la suite croissante),

$$f_*\nu_1(I) = \lim_n f_*\nu_1(I_n) = \lim_n \mu(I_n) = \mu(I). \qquad \square$$

Exercice # 14. Soit $\Phi : [a, b] \to [c, d]$ une fonction telle que :

1. $\Phi \in C^1$.
2. $\Phi'(t) \geq 0, \forall\, t \in [a, b]$.
3. $\Phi(a) = c$ et $\Phi(b) = d$.

Montrer que, pour toute fonction borélienne et Riemann intégrable $f : [c, d] \to [0, \infty[$, la fonction $f \circ \Phi\, \Phi'$ est borélienne, et que nous avons

$$\int_c^d f(x)\, dx = \int_{[a,b]} f(\Phi(t))\, \Phi'(t)\, d\nu_1(t) \tag{4}$$

(la première intégrale étant une intégrale de Riemann).

(On pourra commencer par étudier le cas des fonctions en escalier.)

Solution (PM). $f\circ\Phi$ est borélienne, comme composée de deux fonctions boréliennes [2] ; Φ' est continue, donc borélienne, ce qui montre que $f\circ\Phi\,\Phi'$ est borélienne.

Preuve de (4) *si f est une fonction en escalier.* Rappelons qu'une fonction en escalier (sur $[a,b]$) est une fonction de la forme $f=\sum_{j=1}^n c_j\chi_{I_j}$, où l'entier n dépend de f, et les intervalles I_j forment une partition de $[c,d]$: $[c,d]=\sqcup_{j=1}^n I_j$.

Si nous montrons que, pour tout intervalle $I\subset[c,d]$, nous avons

$$\int_c^d \chi_I(x)\,dx=\int_{[a,b]}\chi_I(\Phi(t))\,\Phi'(t)\,d\nu_1(t)\in\mathbb{R},$$

alors, par linéarité des intégrales (de Riemann et de Lebesgue), nous obtenons (4) pour des fonctions en escalier.

Notons que $\chi_I\circ\Phi=\chi_{\Phi^{-1}(I)}$. [3] Nous allons admettre les propriétés suivantes, évidentes sur un dessin (sous les hypothèses 1–3). $\Phi^{-1}(I)$ est un intervalle. Si I est d'extrémités $e\le f$ et $\Phi^{-1}(I)$ d'extrémités $g\le h$, alors $\Phi(g)=e$ et $\Phi(h)=f$.

Nous obtenons, d'une part, que $\int_c^d\chi_I(x)\,dx=f-e$, d'autre part (en utilisant le fait que la mesure de Lebesgue d'un point est nulle, et donc $\chi_{\Phi^{-1}(I)}=\chi_{[g,h]}$ ν_1-p. p.)

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]}\chi_I(\Phi(t))\,\Phi'(t)\,d\nu_1(t)&=\int_{[a,b]}\chi_{\Phi^{-1}(I)}(t)\,\Phi'(t)\,d\nu_1(t)=\int_{[a,b]}\chi_{[g,h]}(t)\,\Phi'(t)\,d\nu_1(t)\\&=\int_g^h\Phi'(t)\,dt=\Phi(h)-\Phi(g)=f-e,\end{aligned}$$

ce qui donne l'égalité désirée. Au passage, nous avons utilisé la proposition 6.42 et le théorème de Leibniz-Newton.

Preuve de (4) *si f est borélienne et Riemann intégrable.* Soient (f_j), (g_j) deux suites de fonctions en escalier telles que $f_j\le f\le g_j$, $\forall\,j$, et $\int_c^d(g_j-f_j)\to 0$. (L'existence de ces suites découle du fait que f est Riemann intégrable.) Notons que $\int_c^d f(x)\,dx=\lim_j\int_c^d f_j(x)\,dx=\lim_j\int_c^d g_j(x)\,dx$.

Notons également que f_j, f et g_j sont bornées. Par conséquent, $f_j\circ\Phi\,\Phi'$, $f\circ\Phi\,\Phi'$ et $g_j\circ\Phi\,\Phi'$ sont boréliennes et bornées, donc Lebesgue intégrables sur $[a,b]$. Par monotonie de l'intégrale, nous avons

$$\int_{[a,b]}f_j(\Phi(t))\,\Phi'(t)\,d\nu_1(t)\le\int_{[a,b]}f(\Phi(t))\,\Phi'(t)\,d\nu_1(t)\le\int_{[a,b]}g_j(\Phi(t))\,\Phi'(t)\,d\nu_1(t),$$

d'où, en utilisant l'étape précédente et en faisant $j\to\infty$ dans cette double inégalité,

$$\int_c^d f(x)\,dx\le\int_{[a,b]}f(\Phi(t))\,\Phi'(t)\,d\nu_1(t)\le\int_c^d f(x)\,dx,$$

ce qui implique (4) et complète la preuve. $\square$

Exercice # 15. Soit $(X,\mathscr{T},\mu)$ une espace mesuré, avec μ finie. Soit

$$\mathscr{F}:=\{f:X\to\mathbb{R}\,;\ f\text{ est mesurable}\}.$$

Soit

$$d(f,g):=\int_X\frac{|f-g|}{1+|f-g|}\,d\mu,\ \forall\,f,g\in\mathscr{F}.$$

Pour $(f_n)\subset\mathscr{F}$ et $f\in\mathscr{F}$, montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

2. Pour être complètement rigoureux, si $\widetilde{\ }$ désigne le prolongement par 0 en dehors du domaine de définition, alors $\widetilde{f\circ\Phi}=\widetilde{f}\circ\widetilde{\Phi}$ est borélienne (exercice 32, feuille 2 et proposition 3.21) et donc $f\circ\Phi$ l'est (définition 3.10). Il faudrait raisonner de même pour Φ'.

3. Ici, Φ n'est pas supposée bijective. Donc Φ^{-1} est l'image réciproque, et non pas la fonction réciproque.

(i) $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$.

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X\,;\, |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

Solution (PM). Remarques générales.

1. La fonction $h : [0, \infty[\to [0, \infty[$, $h(t) := \dfrac{t}{1+t}$ est continue, strictement croissante et < 1.
2. Si $f, g \in \mathscr{F}$, alors $f - g, |f - g|, h(|f - g|) \in \mathscr{F}$ (proposition 3.25, corollaire 3.31, corollaire 3.23), et $[|f - g| > \varepsilon] \in \mathscr{T}$ (théorème 3.5). Ceci permet de vérifier que toutes les intégrandes qui apparaissent dans la suite sont mesurables.
3. L'intégrande dans la définition de $d(f, g)$ est une fonction mesurable, positive et < 1, donc intégrable (car μ est finie).

« (i) $\Longrightarrow$ (ii) » En utilisant la monotonie des intégrales pour des intégrandes mesurables positives, et la monotonie de h, nous obtenons

$$d(f, g) = \int h(|f - g|) \geq \int h(|f - g|)\, \chi_{[|f-g|>\varepsilon]} \geq \int h(\varepsilon)\, \chi_{[|f-g|>\varepsilon]} = h(\varepsilon)\, \mu([|f - g| > \varepsilon]).$$

Si $d(f_n, f) \to 0$, nous obtenons de ce qui précède que $\mu([|f_n - f| > \varepsilon]) \to 0$, $\forall\, \varepsilon > 0$.

« (ii) $\Longrightarrow$ (i) » Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant la proposition 6.35, la monotonie de h et la monotonie de l'intégrale pour des intégrandes mesurables positives, nous avons

$$\begin{aligned} d(f_n, f) &= \int_{[|f_n-f|>\varepsilon]} h(|f_n - f|) + \int_{[|f_n-f|\leq\varepsilon]} h(|f_n - f|) \\ &\leq \int_{[|f_n-f|>\varepsilon]} 1 + \int_{[|f_n-f|\leq\varepsilon]} h(\varepsilon) = \mu([|f_n - f| > \varepsilon]) + h(\varepsilon)\, \mu([|f_n - f| \leq \varepsilon]) \\ &\leq \mu([|f_n - f| > \varepsilon]) + h(\varepsilon)\, \mu(X). \end{aligned} \tag{5}$$

En faisant $n \to \infty$ dans (5), nous obtenons

$$\limsup_n d(f_n, f) \leq h(\varepsilon)\, \mu(X),\ \forall\, \varepsilon > 0. \tag{6}$$

En faisant $\varepsilon \to 0$ dans (6), nous arrivons à $\limsup_n d(f_n, f) \leq 0$. Par ailleurs, nous avons $d(f_n, f) \geq 0$, $\forall\, n$, d'où $\liminf_n d(f_n, f) \geq 0$. De l'exercice 1.9 a), nous obtenons que $d(f_n, f) \to 0$. $\square$