Mathématiques Générales première année
Introduction aux équations aux dérivées partielles
Année 2007-2008

Devoir maison no 3

On se propose de montrer que (pour $I =]-1, 1[$) l'inclusion $W^{1,p}(I) \hookrightarrow L^p(I)$ est compacte (ici, $1 \leq p < \infty$).

a) On suppose d'abord $1 < p < \infty$. Soit $(g_n) \subset L^p(I)$ une suite telle que $g_n \rightharpoonup g$. On pose $f_n(x) := \displaystyle\int_{-1}^{x} g_n(t)\, dt$, $f(x) := \displaystyle\int_{-1}^{x} g(t)\, dt$. Montrer que $f_n \to f$ dans $L^p(I)$.

b) On suppose $p = 1$. Soit $(g_n) \subset L^1(I)$ une suite telle que $g_n \overset{*}{\rightharpoonup} \mu \in \mathscr{M}(\overline{I})$. On pose $f_n(x) := \displaystyle\int_{-1}^{x} g_n(t)\, dt$, $f(x) := \mu([-1, x])$. Montrer que $f_n \to f$ dans $L^1(I)$.

c) Conclure.

d) Si $p > 1$, montrer que l'inclusion $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C([-1, 1])$ est compacte. (Penser à un critère célèbre de compacité.)

e) Retrouver, pour $p > 1$, la conclusion du devoir à partir de la dernière question.