Mathématiques Générales première année
Introduction aux équations aux dérivées partielles
Année 2009-2010

Corrigé succint du devoir à la maison no 1
Groupe de Schrödinger

Exercice 1.

a) Calcul direct, en notant que $g^t \in L^1$.

b) On a

$$\|S(t)g\|_{L^2}^2 = \|\widehat{g^t}(./(2t))\|_{L^2}^2 = (2t)^n \|\widehat{g^t}\|_{L^2}^2 = (2t)^n (2\pi)^n \|g^t\|_{L^2}^2 = \|g\|_{L^2}^2.$$

c) $S(t)$ est une isométrie linéaire sur $(L^1 \cap L^2)(\mathbb{R}^n)$, à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Par densité de $(L^1 \cap L^2)(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, il résulte qu'il existe une unique extension continue de $S(t)$ à $L^2(\mathbb{R}^n)$. Celle-ci est une isométrie linéaire.

d) Si $a \in \mathbb{C}$ et Re $a > 0$, alors $\widehat{e^{-a|x|^2}}(\xi) = (\sqrt{\pi/a})^n e^{-|\xi|^2/4a}$. On trouve que $\widehat{\Phi_{\varepsilon,t}}(\xi) = e^{-|\xi|^2(\imath t+\varepsilon)}$. Comme $g \in L^1$, on a donc $\widehat{\Phi_{\varepsilon,t} * g}(\xi) = e^{-|\xi|^2(\imath t+\varepsilon)}\hat{g}(\xi)$.

Deuxième partie de la question : on a $\Phi_{\varepsilon,t} * g(x) = \displaystyle\int F(\varepsilon, y)\, dy$, où $F(\varepsilon, y) = g(y)\dfrac{1}{(\sqrt{4\pi(\varepsilon+\imath t)})^n} e^{-\dfrac{|x-y|^2}{4(\imath t+\varepsilon)}}$. D'une part, on a $F(\varepsilon, \cdot) \to \Phi_t(x - \cdot)g(\cdot)$ (simplement) quand $\varepsilon \to 0+$. D'autre part, on a la domination $|F(\varepsilon, \cdot)| \leq (4\pi t)^{-n/2}|g(\cdot)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$. La conclusion découle du théorème de convergence dominée.

e) On suppose $g \in (L^1 \cap L^2)(\mathbb{R}^n)$. De par la question précédente, on a $\widehat{\Phi_{\varepsilon,t} * g}(\cdot) = e^{-|\cdot|^2(\imath t+\varepsilon)}\hat{g}(\cdot)$. Come $\hat{g} \in L^2$, on trouve que $\widehat{\Phi_{\varepsilon,t} * g}(\cdot) \to e^{-\imath|\cdot|^2 t}\hat{g}(\cdot)$ dans L^2, quand $\varepsilon \to 0+$; cette conclusion s'obtient aisément par convergence dominée. En utilisant le théorème de Plancherel, on trouve que $\Phi_{\varepsilon,t} * g \to h$ dans L^2 quand $\varepsilon \to 0+$, où $h := \mathscr{F}^{-1}(e^{-\imath|\cdot|^2 t}\hat{g}(\cdot))$. La convergence dans L^2 impliquant, quitte à extraire une soussuite, la convergence presque partout, on trouve, à l'aide de la question précédente, que $h = S(t)g$ presque partout.

Conclusion provisoire : si $g \in L^1 \cap L^2$, alors (E) $\widehat{S(t)g} = e^{-\imath|\cdot|^2 t}\hat{g}(\cdot)$. Les deux membres de (E) étant continus pour la norme L^2, on trouve, grâce à la densité de $L^1 \cap L^2$ dans L^2, que (E) est valable pour tout $g \in L^2$. Par ailleurs, la formule trouvée reste encore valable si $t = 0$.

f) L'égalité équivaut à $\mathscr{F}(S(t)S(s)g) = \mathscr{F}(S(t+s)g)$, qui est une conséquence immédiate de la question précédente.

g) On a $S(t)^{-1} = S(-t)$, car $S(0)$ =id. Les autres propriétés du groupes sont évidentes. $S(t)$ est une isométrie inversible, c'est-à-dire un unitaire.

h) On a, pour $g \in L^1$, $\|S(t)g\|_{L^\infty} \leq \|\Phi_t\|_{L^\infty}\|g\|_{L^1}$. La conclusion suit de l'égalité $\|\Phi_t\|_{L^\infty} = (4\pi|t|)^{-n/2}$.

i) On applique le théorème de Riesz-Thorin avec $p_0 = 1$, $q_0 = \infty$, $p_1 = 2$, $q_1 = 2$, $M_0 = (4\pi|t|)^{-n/2}$, $M_1 = 1$, $\theta = \dfrac{2-p}{p}$.

Exercice 2.

b) Soit $M > 0$ tel que $\varphi(x,t) = 0$ si $|x| \geq M$ et $t \in \mathbb{R}$. On a $|\partial_t(e^{-\imath x\cdot\xi}\varphi(x,t))| \leq \|\partial_t\varphi\|_{L^\infty}\chi_{\overline{B}(0,M)}(x)$, cette dernière fonction étant intégrable en x. On trouve que

$$\partial_t\psi(\xi,t) = \partial_t\left(\int e^{-\imath x\cdot\xi}\varphi(x,t)\,dx\right) = \int e^{-\imath x\cdot\xi}\partial_t\varphi(x,t)\,dx = \mathscr{F}_x(\partial_t\varphi(\cdot,t))(\xi).$$

Par ailleurs, on a, grâce à la deuxième formule de Green,

$$\mathscr{F}_x(\Delta_x\varphi(\cdot,t))(\xi) = \int_{B(0,M)} e^{-\imath x\cdot\xi}\Delta_x\varphi(x,t)\,dx = \int_{B(0,M)} \Delta_x(e^{-\imath x\cdot\xi})\varphi(x,t)\,dx = -|\xi|^2\psi(\xi,t).$$

c) On a $\|u(\cdot,t)\|_{L^2} = \|g\|_{L^2} < \infty$ pour tout t. Soit $K \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ compact. Soit $T > 0$ tel que $|t| \leq T$ pour tout $(x,t) \in K$. On a alors

$$\|u\|^2_{L^2(K)} \leq \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n\times[-T,T])} = 2T\|g\|^2_{L^2} < \infty.$$

On trouve que $u \in L^2_{loc}$, d'où $u \in L^1_{loc}$.

d) On applique, à t fixé, l'identité de Parseval et la question b) pour obtenir

$$(1)\ \int u(x,t)(-\imath\varphi_t(x,t)+\Delta_x\varphi(x,t))\,dx = -\imath(2\pi)^{-n}\int e^{-\imath t|\xi|^2}\hat{g}(\xi)(\psi_t(-\xi,t)-\imath|\xi|^2\psi(-\xi,t))\,d\xi.$$

Par l'argument de la question c), on a $\psi, \psi_t \in L^2(\mathbb{R}^n \times [-T,T])$ pour tout T. Ceci permet (le vérifier) d'appliquer le théorème de Fubini et d'intégrer (1) par rapport à $t \in [-T,T]$, où T est choisi tel que $\varphi(x,t) = 0$ si $|t| \geq T$. On trouve

$$\int u(x,t)(-\imath\varphi_t(x,t)+\Delta_x\varphi(x,t))\,dx\,dt = -\imath(2\pi)^{-n}\int e^{-\imath t|\xi|^2}\hat{g}(\xi)(\psi_t(-\xi,t)-\imath|\xi|^2\psi(-\xi,t))\,d\xi\,dt,$$

d'où la conclusion.

e) Soit $T > 0$ comme dans la question précédente. On a alors

$$\begin{aligned}\int e^{-\imath t|\xi|^2}\hat{g}(\xi)(\psi_t(-\xi,t) - \imath|\xi|^2\psi(-\xi,t))\,d\xi\,dt &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{-T}^{T}\hat{g}(\xi)\partial_t(e^{-\imath t|\xi|^2}\psi(-\xi,t))\,dt\,d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\hat{g}(\xi)e^{-\imath t|\xi|^2}\psi(-\xi,t)\Big|_{t=-T}^{t=T}\,d\xi = 0.\end{aligned}$$

Donc u est solution faible de (S). Par ailleurs, pour $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ fixée, l'application $\mathbb{R} \ni t \mapsto S(t)g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ est continue. En effet, l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\imath|\cdot|^2}\hat{g} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ est continue (le vérifier avec le théorème de convergence dominée). Par le théorème de Plancherel et la question e) de l'exercice 1, on obtient la continuité de $t \mapsto S(t)g$. Par conséquent, $\|S(t)g - g\|_{L^2} = \|S(t)g - S(0)g\|_{L^2} \to 0$ quand $t \to 0$.