Introduction aux EDP 2009-2010 <u>Corrigé partiel du partiel</u>

<u>Exo 1.</u> a) On a $-E'' + E = \delta \iff -E(\varphi'') + E(\varphi) = \delta(\varphi)$,

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \iff -\int_{\mathbb{R}} E(x)\,\varphi''(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}} E(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(0), \forall \varphi \quad (1)$$

En intégrant par parties,

$$-\int E\varphi'' = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{x}\varphi''(x)dx - \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-x}\varphi''(x)dx =$$

$$\underbrace{-\frac{1}{2} e^{x}\varphi'(x)\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2} e^{-x}\varphi'(x)\Big|_{0}^{\infty}}_{=0}$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{x}\varphi'(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-x}\varphi'(x)\,dx =$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} e^{x}\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2} e^{-x}\varphi(x)\Big|_{0}^{\infty}}_{\varphi(0)}$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{x}\varphi(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-x}\varphi(x)\,dx, \text{ d'où}$$

$$-\int E\varphi'' = \varphi(0) - \int E\varphi. \quad (2)$$

$\square$

Clairement, (2) $\iff$ (1).

b) Si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, alors $E * f$ est solution de (E). Donc

$$u_f(x) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(y)\,e^{-|x-y|}\,dy$$ convient. $\square$

Exo 2. a) On a $B(x,R) \subset B(y, R+|x-y|) \Longrightarrow$ (car $u \geq 0$)

$$\int_{B(x,R)} u \leq \int_{B(y,R+|x-y|)} u \Longrightarrow \text{(formule de la moyenne)}$$

$$\omega_n R^n u(x) \leq \omega_n (R+|x-y|)^n u(y) \Rightarrow u(x) \leq \left(\frac{R+|x-y|}{R}\right)^n u(y). \square$$

b) u minorée $\Rightarrow \exists\, C$ telle que $u+C \geq 0$. On applique ce qui précède à la fonction harmonique positive $u+C \Longrightarrow$

$u(x)+C \leq \left(\frac{R+|x-y|}{R}\right)^n (u(y)+C)$, $\forall x, \forall y, \forall R$. En faisant $R \to \infty \Longrightarrow u(x) \leq u(y)$. Par symétrie, $u(y) \leq u(x)$. Donc $u = cste$. $\square$

Exo 3. a) $\mathcal{R}(x,y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x\cos\theta - y\sin\theta,$ $x\sin\theta + y\cos\theta)$. ($\theta \in \mathbb{R}$ paramètre).

b) Soit $v(x,y) = u(\mathcal{R}(x,y))$. On a

$v_x = \cos\theta\, u_x \circ \mathcal{R} + \sin\theta\, u_y \circ \mathcal{R}$, $v_y = -\sin\theta\, u_x \circ \mathcal{R} + \cos\theta\, u_y \circ \mathcal{R}$,

$v_{xx} = \cos^2\theta\, u_{xx} \circ \mathcal{R} + 2\sin\theta\cos\theta\, u_{xy} \circ \mathcal{R} + \sin^2\theta\, u_{yy} \circ \mathcal{R}$,

$v_{yy} = \sin^2\theta\, u_{xx} \circ \mathcal{R} - 2\sin\theta\cos\theta\, u_{xy} \circ \mathcal{R} + \cos^2\theta\, u_{yy} \circ \mathcal{R}$,

d'où $\Delta v = (\Delta u) \circ \mathcal{R}$, càd $\Delta(u \circ \mathcal{R}) = (\Delta u) \circ \mathcal{R}$. $\square$

c) Soit u solution. Alors $\Delta(u \circ \mathcal{R}) = f \circ \mathcal{R} = f$. On trouve facilement $u \circ \mathcal{R}$ encore solution du problème.

Par unicité, $u = u \circ \mathcal{R}$, $\forall \mathcal{R}$. Soit maintenant $g(r) := u(r,0)$, $r \in [0,1]$. Si $x \in \overline{B}$, alors, avec $r := |x|$, il existe une rotation $\mathcal{R}$ telle que $\mathcal{R}(r,0) = x$. On a $u(x) = u(\mathcal{R}(r,0)) = u(r,0) = g(r) = g(|x|)$, d'où u ne dépend que de $|x|$. $\square$