Opérations avec les ensembles. Image, image réciproque. Règles de calcul

Opérations avec les ensembles

a) Nous travaillons dans un ensemble fixé X. L'ensemble de toutes les parties de X est noté $\mathscr{P}(X)$.

b) Les parties (sous ensembles) de X sont notées A, B, etc. « A est une partie de X » s'écrit $A \subset X$ ou $X \supset A$.

c) $(A_i)_{i\in I}$ désigne une famille de parties de X, indexée par un ensemble *quelconque* (donc pas nécessairement fini ou dénombrable) d'*indices*.

d) Rappelons les opérations usuelles avec les ensembles.
   (i) (Union) $A \cup B := \{x \in X\,;\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
   Plus généralement, $\cup_{i\in I} A_i := \{x \in X\,;\, x \in A_i \text{ pour au moins un } i \in I\}$.
   (ii) (Intersection) $A \cap B := \{x \in X\,;\, x \in A \text{ et } x \in B\}$.
   Plus généralement, $\cap_{i\in I} A_i := \{x \in X\,;\, x \in A_i \text{ pour tous les } i \in I\}$.
   (iii) (Différence) $A \setminus B := \{x \in X\,;\, x \in A \text{ et } x \notin B\}$.
   (iv) (Différence symétrique)
   $$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{x \in X\,;\, [x \in A \text{ et } x \notin B] \text{ ou } [x \in B \text{ et } x \notin A]\}.$$
   (v) (Complémentaire) $A^c := X \setminus A = \{x \in X\,;\, x \notin A\}$.
   (vi) (Produit cartésien) Si X, Y sont des ensembles, alors $X \times Y := \{(x, y)\,;\, x \in X \text{ et } y \in Y\}$.
   Plus généralement, $X_1 \times \cdots X_k := \{(x_1, \ldots, x_k))\,;\, x_j \in X_j,\ \forall\, j \in [\![1, k]\!]\}$.

e) Rappelons les principales propriétés de ces opérations.
   (i) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
   Plus généralement, $(\cup_{i\in I} A_i) \cap C = \cup_{i\in I}(A_i \cap C)$ et $(\cup_{i\in I} A_i) \cap (\cup_{j\in J} C_j) = \cup_{i\in I, j\in J}(A_i \cap C_j)$.
   (ii) Les règles du point précédent restent valides si nous échangeons $\cup$ et $\cap$.
   (iii) $(A^c)^c = A$.
   (iv) Si $A \subset B$, alors $B^c \subset A^c$.
   (v) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
   Plus généralement, $(\cup_{i\in I} A_i)^c = \cap_{i\in I}(A_i)^c$.
   (vi) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
   Plus généralement, $(\cap_{i\in I} A_i)^c = \cup_{i\in I}(A_i)^c$.
   (vii) $A \setminus B = A \cap B^c$.
   (viii) $A \Delta B = A^c \Delta B^c$.

Image, image réciproque

a) (Image réciproque) Pour $A \subset Y$, $f^{-1}(A) := \{x \in X\,;\, f(x) \in A\}$.

b) (Image, ou encore image directe) Pour $B \subset X$, $f(B) := \{f(x)\,;\, x \in B\}$.

c) Rappelons les principales propriétés des images (directe et réciproque).
   (i) $f^{-1}(\cup_{i\in I} A_i) = \cup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$.
   (ii) $f^{-1}(\cap_{i\in I} A_i) = \cap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$.
   (iii) $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$.
   (iv) $f(\cup_{i\in I} A_i) = \cup_{i\in I} f(A_i)$.
   (v) $f(\cap_{i\in I} A_i) \subset \cap_{i\in I} f(A_i)$.