Université Claude Bernard Lyon 1 | Licence de mathématiques 3e année
Mesure et intégration | Année 2020–2021

Épreuve de substitution
– le jeudi 11 février 2021 –
– durée 60 + 30 minutes –

Consignes

1. Le seul document accepté est le support complet de cours, sous forme papier. Il ne doit pas contenir d'ajouts concernant la correction des exercices.
2. Pas d'ordinateur, tablette, téléphone, calculatrice, montre connectée, ou autre objet connecté.
3. Pour chaque intégrale de la forme $\int_a^b f(x)\,dx$, préciser s'il s'agit d'une intégrale de Riemann, généralisée et/ou par rapport à la mesure de Lebesgue ; justifier son existence et préciser à quel type d'intégrale s'appliquent les résultats utilisés.

Sujet # 1

Exercice # 1. Soit $f(x) := \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que f est finie si et seulement si $x > 0$.
b) Montrer que f est continue sur $]0, \infty[$.
c) Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$. En déduire la valeur de $\lim_{x \searrow 0} x\, f(x)$.

Exercice # 2.

a) Montrer que l'intégrale généralisée $I := \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$ existe et que $I = 2\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$.
b) Calculer de deux façons différentes l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} \frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2y)}.$$

En déduire que $I = \pi^2/4$.

c) Déduire des questions précédentes et d'un développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ que

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \text{ et } \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice # 3. Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := e^{-|x|-y^2},\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Sujet # 2

Exercice # 1. Soit $I(\alpha) := \int_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2}\,dx, \alpha \geq 0$.

a) Montrer que la fonction $I : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Donner la formule de $I'(\alpha)$ si $\alpha > 0$.

c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Décomposer la fraction $\dfrac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}$ en éléments simples. En déduire la valeur de $I'(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.

d) Calculer $I(\alpha)$ pour $\alpha \geq 0$.

Exercice # 2. Pour $(x, y) \in [-1, 1]^2$, soit

$$f(x,y) := \begin{cases} (xy)/(x^2+y^2)^2, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

a) Montrer que les intégrales itérées de f existent et sont égales.
b) La fonction f est-elle λ_2-intégrable sur $[-1, 1]^2$?

Exercice # 3. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-x/n}}{1+x}\, dx.$$

Sujet #3

Exercice # 1. Soient $a, b > 0$ deux constantes. Déterminer, en fonction de a et b, la nature de l'intégrale

$$I := \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^a(1+x)^b}\, dx,$$

vue comme intégrale généralisée ou comme intégrale de Lebesgue.

Exercice # 2. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \sin x\, dx.$$