

## Feuille 2 de TD. Intégrales et limites. Intégrales à paramètre

**1.** Déterminer la limite simple des suites suivantes :

$$\frac{\cos nt}{(nt+1)(1+t^2)}, \quad t \geq 0; \quad \frac{1}{t^n + e^t}, \quad t \geq 0; \quad \frac{n \ln(1+t/n)}{(1+t^2)^2}, \quad t \geq 0.$$

**2.** Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\cos nt}{(nt+1)(1+t^2)} dt; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{1}{t^n + e^t} dt; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{n \ln(1+t/n)}{(1+t^2)^2} dt.$$

**3.** On considère la fonction  $F$  donnée par la formule

$$F(x) := \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + x^2}, \quad \forall x > 0.$$

- (i) Montrer que  $F$  est finie et continue.
- (ii) Montrer que  $F$  est dérivable et calculer  $F'$ .
- (iii) Calculer  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ .
- (iv) Calculer  $F(x)$  en fonction de fonctions connues et retrouver les résultats qui précédent.

**4.** On considère la fonction  $F$  donnée par la formule

$$F(x) := \int_0^\infty \frac{e^{-t} \sin tx}{1+t^4} dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- (i) Montrer que  $F$  est finie et continue.
- (ii) Montrer que  $F$  est indéfiniment dérivable.
- (iii) Calculer  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ .
- (iv) Montrer que  $F$  vérifie  $F^{(4)} + F = \frac{x}{1+x^2}$ .