

Feuille 7 de TD. Analyse complexe (I)

1.

1. Mettre les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique : $(1 + i)^{10}$, $-1 + i\sqrt{3}$, 10.
2. Décrire les ensembles $\{z \in \mathbb{C} ; |z - \bar{z}| = 2\}$, $\{z \in \mathbb{C} ; |z - 2| = 1\}$, $\left\{ z + \frac{1}{z} ; |z| = 1 \right\}$.
3. Donner l'expression de la rotation de centre 1 et d'angle $\pi/4$.

2. Quelles sont les fonctions holomorphes parmi : $\sin z$, $\frac{1}{z}$, $\frac{x}{x^2 + y^2}$?

3.

1. Si f est holomorphe sur U et $\gamma \subset U$ est un lacet, montrer que $\int_{\gamma} f'(z) dz = 0$.
2. Montrer que si f est holomorphe sur U et si $\exp(f) = \text{Id}$, alors $f'(z) = \frac{1}{z}$.
3. Peut-on avoir $U = \mathbb{C}$ dans la question précédente ?
4. Prendre comme lacet le cercle unité et montrer qu'on ne peut pas avoir non plus $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

4. Calculer

1. $\int_0^1 z dz$.
2. $\int_{\mathcal{C}} z^n dz$, avec $n \in \mathbb{Z}$ et \mathcal{C} le cercle unité.
3. $\int_{\mathcal{C}} e^{z^3 e^{-z^2}} dz$.