Chapitre 5

Schrödinger

L'opérateur de Schrödinger est donné par la formule $Su = \imath u_t + \Delta_x u$.

Groupes, semi-groupes

Commençons par quelques considérations générales. Considérons une équation autonome dépendant du temps : ça peut être une EDO autonome, L, $\Box$, S, etc.[1] Notons $S(t)(x)$ l'état à l'instant t de la solution valant x à l'instant $t = 0$. Sous hypothèse d'existence et unicité des solutions, on a $S(t+s)(x) = S(t)(S(s)(x))$, ou encore $S(t+s) = S(t)S(s)$; $(S(t))_{t\geq 0}$ est donc un semi-groupe agissant sur l'ensemble des x admissibles. Si le temps est reversible, alors $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe.

Quelques exemples.

1. L'équation des ondes s'écrit sous la forme d'un système du premier ordre : en posant $v = u_t$, on a $(u,v)_t = (v, \Delta_x u)$. Si on prend comme espace d'états $X = C^\infty(\mathbb{R}^n) \times C^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors on peut voir (à partir des formules de d'Alembert, Poisson, Kirchhoff et leurs généralisations aux dimensions supérieures) que la solution de (4.1) est C^∞. Si on désigne par $S(t)(f,g)$ le couple (u,u_t) à l'instant $t \in \mathbb{R}$, alors $S(t): X \to X$ et, par unicité et réversibilité du temps, $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe ; c'est le groupe des ondes.
2. Pour l'équation de la chaleur, on ne peut raisonner de cette façon, car il n'y pas unicité. Prenons $X = L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, ou $X = C_0(\mathbb{R}^n)$, et soit $S(t)f = P_{\sqrt{t}} * f \in X$, $f \in X$, où $P(x) = \dfrac{1}{(4\pi)^{n/2}} e^{-|x|^2/(4t)}$.[2] En notant que $\mathscr{F}_x(P_{\sqrt{t}})(\xi) = e^{-t|\xi|^2}$, on trouve $\mathscr{F}_x(P_{\sqrt{t}})\mathscr{F}(P_{\sqrt{s}}) = \mathscr{F}(P_{\sqrt{t+s}})$, d'où $P_{\sqrt{t}} * P_{\sqrt{s}} = P_{\sqrt{t+s}}$, ce qui implique $S(t+s) = S(t)S(s)$. $(S(t))_{t\geq 0}$ est le semi-groupe de la chaleur.
3. Pour S, il est à nouveau impossible d'invoquer l'unicité. En effet, on peut reprendre la construction de la fonction u dans la preuve de la Proposition 3.17 et modifier les coefficients c_j afin d'obtenir une solution non triviale de l'équation de Schrödinger avec donnée initiale nulle dans le demi-espace. Pour construire le groupe de Schrödinger, on procède comme pour l'équation de la chaleur. Si on reprend la preuve de la Proposition 1.5, on voit que, pour $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, la solution mild[3] de (1.10) est donnée par

$$u(\cdot,t) = \mathscr{F}_x^{-1}\left[(e^{-\imath t|\xi|^2}\widehat{f}(\xi)\right]. \tag{5.1}$$

Par le théorème de Plancherel, le membre de droite appartient à L^2 si $f \in L^2$. Ceci

1. Autonome : de la forme $\dot{x} = F(x)$.
2. Ce qui est suggéré par la solution mild de (1.1) donnée par le Théorème 1.1.
3. Par analogie avec l'équation de la chaleur.

suggère de procéder ainsi : on prend $X = L^2(\mathbb{R}^n)$ et on définit $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ par :

$$S(t)f = \mathscr{F}_x^{-1}\left[(e^{-\imath t|\xi|^2}\widehat{f}(\xi)\right] \in L^2(\mathbb{R}^n); \tag{5.2}$$

c'est le *groupe de Schrödinger*.

Une application immédiate du théorème de Plancherel donne le résultat suivant.

5.1 Proposition. *$(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe d'opérateurs unitaires dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Nous verrons plus tard que, si $f \in L^2$, alors $u(\cdot,t) = S(t)f$ est solution (dans un sens approprié) de (1.10).

Effets dispersifs

Dans cette partie, nous étudions la décroissance de $S(t)$ lorsque $t \to \pm\infty$.

5.2 Proposition.
Hypothèses. $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. $1 \le p \le 2$. $q = \dfrac{p}{p-1}$.
Conclusion. On a

$$\|S(t)f\|_{L^q} \le \frac{1}{(4\pi|t|)^{n(1/p-1/2)}}\|f\|_{L^p}. \tag{5.3}$$

Démonstration. On commence par le cas $p = 1$. La formule (1.12) donne (5.3) si $p = 1$ et $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Si $f \in L^1 \cap L^2$, alors il existe une suite $(f_j) \subset C_c^\infty$ telle que $f_j \to f$ à la fois dans L^1 et L^2. La convergence $f_j \to f$ dans L^2 donne $S(t)f_j \to S(t)f$ dans L^2 et donc, à une sous-suite près, $S(t)f_j \to S(t)f$ p. p. L'estimation (5.3) appliquée à f_j avec $p = 1$ donne, par passage à la limite p. p., (5.3) pour $p = 1$ et f.

Le cas $p = 2$ est donné par la Proposition 5.1. Le cas général s'obtient par le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin (Théorème 8.37) appliqué avec : $X = Y = \mathbb{R}^n$ (avec la mesure de Lebesgue), $p_0 = 1$, $p_1 = 2$, $q_0 = \infty$, $q_1 = 2$, $\theta = \dfrac{2-p}{p}$. □

Cas d'un domaine

A nouveau, la théorie de Hille-Yosida fournit des résultats d'existence, et le bon cadre n'est pas celui des fonctions C^k. Un exemple.

5.3 Théorème.
Hypothèses. $\Omega \in C^\infty$ *borné.* $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$. $\Delta^k f = 0$ *sur* $\partial\Omega$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
Conclusion. Le problème

$$\begin{cases} Su = 0 & \textit{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R} \\ u_{|t=0} = f & \textit{dans } \Omega \end{cases} \tag{5.4}$$

a une (et une seule) solution $u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$.