Le calcul formel
dans ma pratique d'enseignant et de chercheur

Michel Mizony

31 Octobre 1996

Les mathématiques redeviennent-elles
une discipline expérimentale?

Introduction :

L'objectif principal de mon exposé sera d'essayer de vous décrire comment, en tant qu'enseignant et chercheur, j'utilise le calcul formel; de fait le logiciel Maple V.3. En particulier, pour l'utilisation de tels logiciels, j'insisterai :
1- sur la nécessité du contrôle et de la vérification;
2- sur l'aller-retour permanent entre théorie et expérimentation;
3- sur l'intérêt de s'interroger sur les «boîtes noires».

L'essentiel du temps sera consacré à un exemple de travail en recherche, mais auparavant je donnerai deux exemples d'exercices enseignés en Deug 2ème année, à l'université Lyon 1.

Sur l'enseignement

Voir l'article «réflexions méthodologiques en Maple» dont les deux exemples sur la procédure factor (pré-définie dans Maple) et le tracé d'une courbe (ou la nécessité de vérifications) ont été présentés.

Une pratique de recherche

Au niveau de l'utilisation du calcul formel en recherche, je vais plus essayer de décrire les étapes d'une recherche que d'en tirer des conséquences. Il est possible, qu'emporté par ma passion du sujet traité, je fasse quelques digressions.
Suivons le plan suivant :
Plan des aller-retours étape expérimentale - théorie.

A Le problème des courbes de rotation des galaxies spirales

B $\longrightarrow$ première étape expérimentale

Le problème des n-corps alignés, premier algorithme

$\longleftarrow$ retour à la théorie

Mise au point de l'algorithme pour un disque de points

C $\longrightarrow$ deuxième étape expérimentale

La méthode marche pour un disque de 5000 points.

$\longleftarrow$ retour à la théorie

Pourquoi cette méthode fonctionne-t-elle? Étude des méthodes existantes.

D $\longrightarrow$ troisième étape expérimentale
Comparaison des quatre méthodes existantes; trois semblent coïncider.

$\longleftarrow$ retour à la théorie
Preuve de l'équivalence théorique de notre méthode et d'une existante, et de son inéquivalence avec la méthode la plus souvent employée.

E $\longrightarrow$ quatrième étape expérimentale
Élaboration du chemin de la preuve de l'équivalence avec la dernière méthode.

$\longleftarrow$ retour à la théorie
Achèvement de la preuve, rédaction d'un article, etc...

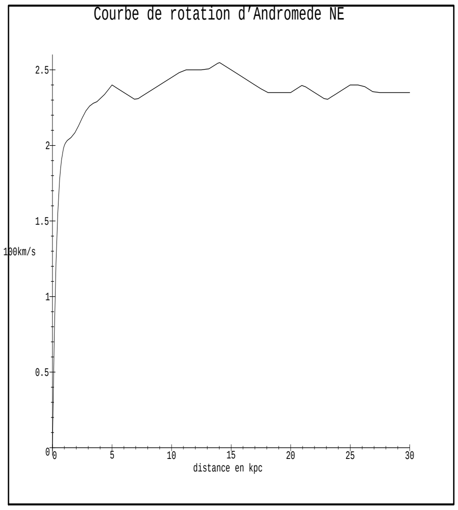
F $\longrightarrow$ cinquième étape expérimentale
Mise au point d'un programme «définitif» traitant 40000 points.

$\longleftarrow$ retour à la théorie
Perspectives et problèmes épistémologiques.

A Le problème.

Depuis une dizaine d'années je travaille sur des problèmes liés à la mise en œuvre de la relativité générale. Dans ce cadre se posent des problèmes dit de masse manquante. En tant que mathématicien à l'université Lyon 1 (I.G.D. CNRS UPRES-A 5028), ma recherche consiste à mieux poser ces questions de masse manquante aux trois niveaux suivants : a) à l'échelle de l'univers, b) au niveau des amas de galaxies et c) à celui des galaxies. C'est ce dernier problème, dit des courbes de rotation des galaxies spirales, que je vais présenter.

Que se passe-t-il ? Les astronomes observent essentiellement deux aspects des galaxies spirales : leur luminosité et leur courbe de vitesse de rotation autour du centre (par effet Dopler). Leurs observations, de plus en plus précises et portant sur un grand nombre de galaxies spirales, montrent deux aspects permanents : la courbe de luminosité en fonction de la distance radiale suit une décroissance exponentielle, la courbe des vitesses de rotation est du type «rigide» près du centre puis **plate** jusqu'aux confins du disque galactique (visible). Il s'agit donc, à partir de ces données, de reconstruire la répartition de matière dans une galaxie, en particulier la densité surfacique de son disque et sa masse totale (deux données qui ne sont pas directement observables). Il est usuellement admis que l'on ne peut pas rendre compte de la platitude de la courbe de rotation d'une galaxie sans faire appel à la présence d'un halo sphérique et massif de matière englobant la galaxie. Ce halo non observé pose ainsi un problème de masse manquante. Les méthodes existantes pour déduire la courbe de densité surfacique à partir de la courbe de rotation reposent sur l'évaluation d'intégrales doubles qui ne sont pas absolument convergentes et nécessitent soit la connaissance de la courbe de rotation jusqu'à l'infini, soit la connaissance de la fonction dérivée (par rapport à la distance radiale) de cette courbe, deux aspects impossibles à observer. Ces méthodes se font dans le cadre de la théorie de la gravitation de Newton, les corrections relativistes étant supposées faibles à juste titre devant les incertitudes provenant de ces méthodes.



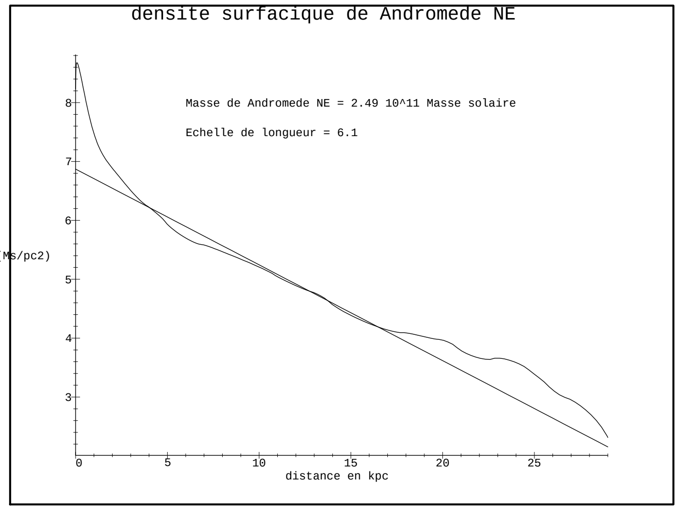


Figure 1: A gauche la courbe des vitesses de rotation observées pour la galaxie d'Andromède; les distances radiales sont exprimées en kiloparsecs (kpc), le parsec (pc) étant une unité astronomique valant environ 3,26 années-lumière. A droite la courbe de densité surfacique (qui s'exprime en *masses solaires par parsec*^{2} (Ms/pc^2); cette densité, obtenue par la méthode précise que nous avons mise au point, est tracée avec une échelle logarithmique et comparée à la droite approximant le logarithme de la densité lumineuse observée. Le suffixe NE précise simplement que j'ai utilisé les données dites Nord-Est de la Galaxie, j'aurais pu tout aussi bien prendre les données dites Sud-Ouest, qui, bien que légèrement différentes, aboutissent aux mêmes conclusions.

En collaboration avec deux collègues, J.B. Baillon mathématicien de l'université Lyon 1 et D. Méra astrophysicien de l'E.N.S. de Lyon, nous avons mis au point une nouvelle méthode permettant de trouver la répartition de masses à partir de la seule donnée de la courbe de rotation observée. J'ai utilisé le logiciel Maple pour élaborer et mettre au point cette méthode. Voici donc les étapes essentielles d'une recherche débutée en septembre 93.

B **Première étape expérimentale**

Supposons une galaxie spirale barrée, simplifiée à l'extrême, en la modélisant par $2n+1$ corps alignés placés de manière symétrique de part et d'autre du corps central, à des distances fixées, et tournant de manière rigide. Un premier programme basé sur l'équilibre des forces, nous conduit à résoudre un système linéaire de n équations à $n+1$ inconnues (la masse du corps central et celle de chacun des n corps d'un bras). Soit M la somme des masses alignées (c'est l'équation manquante) et w la vitesse de rotation angulaire. Après quelques essais et tâtonnements, nous avons résolu le système, avec comme variable w à M fixé. On obtient expérimentalement : pour chaque w il y a une solution, la famille (m_i); puis en imposant la contrainte du fait que chaque masse devait être positive, le résultat suivant se révèle : il existe w_{max} et w_{min} tels que pour $w \in [w_{min} w_{max}]$ toutes les masses soient positives. De plus l'écart relatif $\frac{w_{max}-w_{min}}{w_{min}}$ est très petit, fait surprenant a priori.

$\longleftarrow$ **Retour à la théorie**

Une vérification dans des livres et auprès de collègues mécaniciens montre que ce résultat semble inconnu. Certes le problème de la rotation rigide d'une ligne de corps massifs est de fait complètement irréaliste, du fait de l'instabilité d'un tel système, mais la méthode utilisée peut s'étendre sans difficulté majeure au problème d'un disque de corps massifs, dont la courbe de vitesse de rotation est donnée. D'où la mise au point théorique de la méthode.

La méthode :

Soit une galaxie spirale constituée d'un corps central de masse m_o et d'un disque de rayon R_g formé de n corps massifs x_i répartis avec une symétrie axiale ; A chaque point x_i nous associons sa masse (inconnue) m_i, sa distance au centre d_i, sa vitesse de rotation v_i et ses distances aux autres points d_{ij}.

A chaque point x_i associons le vecteur $\vec{d_{ij}} = x_j - x_i$; alors la force $\vec{F_i}$ agissant sur ce point x_i est:

$$\vec{F_i} = \sum_{j \neq i} G \frac{m_i m_j}{d_{ij}^3} \vec{d_{ij}},$$

où G est la constante de Newton.
Maintenant supposons que ces forces donnent naissance à la courbe de rotation (dans le cadre de la théorie de Newton de la gravitation), nous avons :

$$\vec{F_i} = m_i \frac{v_i^2}{d_i} \frac{x_i}{d_i}.$$

Alors l'équilibre des forces radiales entre les $n+1$ corps se traduit par l'ensemble des n équations :

$$\frac{v_i^2}{d_i} \frac{x_i}{d_i} = \sum_{j \neq i} G \frac{m_j}{d_{ij}^3} \vec{d_{ij}}.$$

Du fait de la symétrie du problème, la première équation se réduit à $\vec{0} = \vec{0}$.
Soit θ_{ij} l'angle formé par les deux vecteurs x_i et x_j, alors $d_{ij}^2 = d_i^2 + d_j^2 - 2 d_i d_j cos(\theta_{ij})$ ainsi les n équations linéaires se réduisent à :

$$\sum_{j \neq i} m_j F_{ij} = v_i^2 / d_i,$$

où $F_{ij} = G(d_i - d_j cos(\theta_{ij}))/d_{ij}^3$.
Dans le but de résoudre un tel système linéaire nous devons fixer une variable ; nous prendrons la suivante : $w = \frac{1}{M_g}$, où $M_g = \sum_i m_i$ est la masse de la galaxie. Ce choix repose sur le fait que nous pouvons normaliser les équations (1).
Soit $M_i = m_i / M_g$ alors nous avons à résoudre pour chaque w, les $n+1$ équations des $n+1$ inconnues M_i :
pour $i = 1, ..., n$

$$(1) \qquad \sum_{j \neq i} M_j F_{ij} = w \, v_i^2 / d_i \ ,$$

$$(2) \qquad \sum_i M_i = 1 \ ;$$

avec les contraintes :

$$(3) \qquad M_i \ \geq \ 0,$$

i.e. chaque masse est positive.
Les équations (1), (2) et (3) forment le point de départ de la programmation.

C **Deuxième moment expérimental**

Je programme alors cette méthode pour un disque formé de k rayons, ayant chacun n corps équirépartis, et j'effectue une série d'essais sur des courbes de rotation très diverses et fictives et, bien sûr, des tas de petits programmes de tests et de vérifications. Cela marche très bien, avec le même résultat que précédemment.

Ainsi ma conviction est faite que l'on peut rendre compte de n'importe quelle courbe de rotation, sans faire appel à un (hypothétique) halo massif. De plus la précision obtenue sur w permet d'obtenir la masse totale d'une galaxie avec une erreur de méthode négligeable (seule reste l'incertitude liée à celle des observations). Un premier test sur la Voie Lactée nous donne une masse d'environ 1.4 $10^{11} M_{\odot}$ (masses solaires).

$\longleftarrow$ **Retour à la théorie**

Mais des questions se posent, en particulier, pourquoi la méthode fonctionne-t-elle, i.e. pourquoi la matrice (F_{ij}) est-elle inversible ? Et pourquoi existe-t-il toujours w_{max} et w_{min} très proches. Nous sommes alors au printemps 94, je mettrai plus d'un an pour résoudre ces questions. J.-B. Baillon et moi-même menions chacun une programmation et échangions résultats et problèmes.

C'est à l'automne 94 qu'eut lieu la première prise de contact avec Dominique, astrophysicien de l'E.N.S., préparant une thèse sur le halo de la Voie Lactée. Je lui explique ce que j'ai trouvé, sa première réponse est de me dire que ma méthode est sûrement fausse puisque l'on sait bien qu'il faut un halo massif, qu'il existe des méthodes bien connues et qu'en aucun cas je ne pourrai obtenir une courbe de densité surfacique de matière ayant la décroissance exponentielle de la densité lumineuse observée. Vite un petit programme de plus, et la semaine suivante je lui montre que ma méthode permet de retrouver (numériquement sur des exemples) la décroissance exponentielle observée. La collaboration s'engage alors (timidement au début); je lui passe le principe de ma méthode, il me donne des références bibliographiques sur les méthodes connues. Une excellente présentation des trois méthodes existantes se trouvent dans l'ouvrage de Binney et Tremaine intitulé *Galactic Dynamics* [1]. Ces trois méthodes ont pour noms, la méthode des intégrales elliptiques (basée sur le disque vu comme réunion d'anneaux de matière), la méthode des transformations de Bessel (basée sur des propriétés asymptotiques du potentiel gravitationnel créé par le disque de matière) et enfin la méthode des sphéroïdes, la plus utilisée (basée sur le disque vu comme limite de sphères aplaties). Le point commun de ces trois méthodes est le fait que, partant d'une densité surfacique, la vitesse de rotation s'exprime par une intégrale double qui n'est pas absolument convergente. Ainsi ces trois méthodes (qui sont en fait des méthodes inverses car elles déduisent une courbe de rotation d'une densité surfacique supposée) ne permettent de trouver un résultat que dans des cas d'école (par connaissance de primitives par exemple).

D **Troisième étape expérimentale**

C'est la programmation des trois méthodes, la comparaison dans les rares cas particuliers où l'une de ces méthodes fournit un résultat avec ceux de la nôtre. Dominique de son côté programme les quatre méthodes (avec le logiciel numérique Matlab); nos conclusions sont identiques : notre méthode donne les mêmes résultats que la méthode des intégrales elliptiques et que celle des transformations de Bessel; les résultats sont différents de ceux prévus par la méthode la plus en vogue, celle des sphéroïdes. Le 7 avril 95, Dominique me propose d'écrire un article ensemble, il est enfin convaincu surtout par le fait que notre méthode est directe, s'applique dans tous les cas et est très précise. Il reste à établir les preuves mathématiques établissant l'équivalence théorique de trois des méthodes sur quatre, et à comprendre le pourquoi de la différence avec la dernière.

$\longleftarrow$ **Retour à la théorie**

Il nous apparaît très vite que notre méthode est une approximation riemannienne de l'intégrale double de la méthode des intégrales elliptiques, elle lui est donc théoriquement équivalente équivalente, ceci permet en particulier une amélioration de notre algorithme par une choix plus approprié de la disposition des points dans le disque. D'autre part, sous réserve de l'équivalence de cette dernière avec la méthode des transformations de Bessel), nous sommes assurés de l'inversibilité de la matrice; en effet les transformations de Bessel sont bijectives (comme les transformations de Fourier dont elles dérivent). Ainsi la matrice (F_{ij}) est inversible. Pour montrer l'équivalence entre la méthode des transformations de Bessel et celle des intégrales elliptiques, j'ai du permuter les intégrales et introduire des valeurs principales (les intégrales doubles n'étant pas absolument convergentes), puis transformer des fonctions de Bessel d'une part et des intégrales elliptiques d'autre part en séries hypergéométriques. Les fonctions hypergéométriques obtenues étant très différentes dans leur paramétrage, il restait à montrer l'égalité entre ces valeurs principales.

E **Quatrième étape expérimentale** Cette courte étape a eu pour but de trouver formellement un chemin de transformations successives entre fonctions hypergéométriques, chemin permettant de prouver l'égalité entre les intégrales. Vu le choix immense de transformations possibles, la programmation formelle de celles-ci à permis de trouver rapidement un chemin. A la main le travail aurait été très long. Le recours au calcul formel fut une aide très efficace à la recherche d'une preuve.

$\longleftarrow$ **Retour à la théorie**

Il ne restait plus qu'à écrire cette preuve pour achever la démonstration de l'équivalence théorique de notre méthode avec deux existantes. Puis l'utilisation de propriétés des fonctions hypergéométriques permettait d'évaluer la différence $w_{max} - w_{min}$ et ainsi de prouver pourquoi notre méthode est précise et donc efficace. La rédaction de l'article est achevée en juillet 95, envoyé à une revue, des propositions d'amélioration du contenu nous ont été faites, nous les avons incorporées et avons re-soumis l'article; à ce jour nous attendons encore la décision du «referee». Chacun donnons des exposés dans différents séminaires ou colloques, et chacun mettons au point des extensions du programme; par exemple, j'ai étudié les corrections relativistes qui sont faciles à incorporer dans le cadre de notre méthode, Dominique, quant à lui, étudiait l'effet d'un halo autour de la Voie Lactée, halo très peu massif (du tiers de la densité usuellement admise) pour tenir compte d'observations locales (au voisinage du Soleil) et des résultats récents concernant l'observation de micro-lentilles gravitationelles en direction du centre galactique et des nuages de Magellan. Il vient de soutenir sa thèse sur ce sujet. A ce propos, il est à signaler que notre méthode remet en cause des résultats «bien connus», il est difficile alors de convaincre les experts, mais Dominique a su le faire. Je vous dis tout cela, car la recherche n'est pas toujours ce que l'on croit, les préjugés y sont nombreux, les modes existent, des mythes sont fabriqués ; par exemple le mythe du trou noir a la vie dure. Pour être plus précis à ce sujet, de nombreuses personnes ont déjà montré que dans le cadre de la relativité générale l'effondrement gravitationnel d'une boule de matière ne peut conduire à la formation d' un trou noir. Pour les personnes intéressées voici la référence d'une preuve mathématique de ce fait, rédigée en français dans le journal de la Société Mathématique de France : N. STAVROULAKIS, *Mathématique et trous noirs* ; Gazette des mathématiciens, n^o31 pp119 -132 (1986).

F $\longrightarrow$ **Cinquième étape expérimentale**
C'est la mise au point d'un programme «définitif» avec Maple traitant 40000 points; avec un logiciel numérique Dominique traite 250000 points, la précision des résultats est la même. Toutes les recherches décrites précédemment ont donné lieu à l'élaboration de différents programmes avec de multiples tests et procédures de vérifications. La méthode étant bien au point il restait à extraire de toutes ces pages de fichiers, un programme qui optimise le temps de calcul et la place mémoire. Il est donc de moins en moins formel et de plus en plus numérique. Voici les résultats obtenus pour la Voie Lactée.

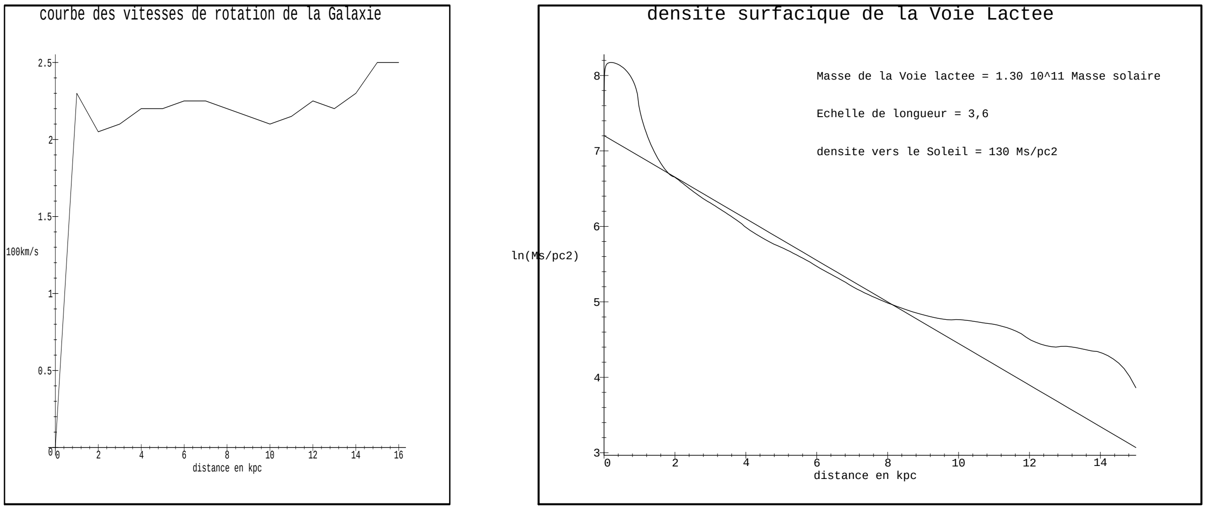


Figure 2: A gauche la courbe des vitesses de rotation observées pour notre galaxie; il y a des incertitudes concernant les confins de la Galaxie (taille et vitesses); le Soleil se trouve à une distance d'environ $8,5$ *kpc* du centre galactique. A droite la courbe de densité surfacique ; cette densité, à décroissance de type exponentielle, admet une échelle de longueur (un terme d'astrophysique relié à la pente de la droite tracée), d'environ $3,6$ kpc; cette échelle correspond à celle associée à la densité lumineuse observée, qui est de $3,5 \pm 0,3$. Sur cette courbe, ainsi que pour celle d'Andromède (figure 1), il apparaît que le rapport Masse sur Luminosité n'est pas constant; il y a une sous-estimation de la masse pour les faibles luminosités, ce qui constitue une des conséquences de notre travail. La densité surfacique obtenue au voisinage du Soleil d'environ $130Ms/pc^2$ est supérieure à celle obtenue par d'autres observations faites dans notre voisinage (elle est d'environ $90Ms/pc^2$). Il faut donc supposer qu'il existe de la matière non observée dans notre environnement ou (et) un très léger halo dans lequel baigne notre galaxie, en tout cas un halo très nettement plus ténu que celui vainement recherché. Exit donc une justification donnée pour la recherche de particules exotiques et autres objets

étranges.

Conclusion :
Après ces quelques considérations d'astrophysique, revenons pour terminer à l'objet essentiel de mon exposé. L'utilisation du calcul formel m'a permis de renouveler ma pratique de la recherche et de changer mon rapport aux mathématiques. Parmi les conséquences prévisibles de l'arrivée du calcul formel, outre le fait que pour moi les mathématiques (re)deviennent une science expérimentale, il est certain d'une part que l'enseignement de celles-ci sera amené à beaucoup évoluer et d'autre part, qu'au niveau conceptuel, il apparaît un axiome, l'«axiome de l'ordinateur», qui aurait un statut similaire à l'axiome du continu ou celui du choix. Mais c'est une autre histoire.

Un ajout à la conférence donnée :
G $\longrightarrow$ Sixième étape expérimentale :
Mise au point d'une version expurgée pour l'enseignement.
En Septembre 96, deux collègues m'ont demandé si je pouvais leur préparer une version de la méthode qui puisse être enseignée en Deug et en classes préparatoires. A ma surprise, j'ai pu raccourcir encore le programme à une page, programme qui donne des résultats corrects sur les ordinateurs utilisés pour l'enseignement. Ceci pose un problème didactique : c'est un produit fini, expurgé de tous les tâtonnements liés à l'élaboration du programme, de toutes les procédures de vérifications. Drôle d'image de la production de savoirs!