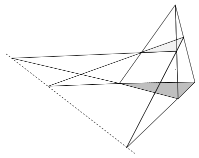
Chapitre 10
De la relativité générale à la relativité restreinte et à la mécanique quantique

Michel Mizony

* Institut Girard Desargues (CNRS UMR 5028), Université Lyon 1



“ Je vous ai dit plus d'une fois que je suis un partisan acharné non pas des équations différentielles, mais bien du principe de relativité générale (i.e. du principe de covariance), dont la force heuristique nous est indispensable. Or en dépit de bien des recherches, je n'ai pas réussi à satisfaire le principe de relativité générale autrement que grâce à des équations différentielles ; peut-être quelqu'un découvrira-t-il une autre possibilité, s'il cherche avec assez de persévérance.”

A. Einstein dans la conclusion de sa lettre à Pauli du 2 Mai 1948.

Introduction

Ce chapitre voudrait lancer des pistes pour montrer comment la théorie cadre de la relativité générale fournit des éléments essentiels à la compréhension de la relativité restreinte et de la théorie cadre de la mécanique quantique. Nous avons déjà bien mis en évidence le fait que la relativité générale est un cadre géométrique très large qu'il faut compléter pour obtenir une théorie de la gravitation (en introduisant une jauge, celle dite des coordonnées harmoniques).

Continuons notre débroussaillage en considérant dans une première partie l'espace-temps de Minkowski, du point de vue de la relativité générale. Les deux pistes principales qui se dégagent de l'étude de l'espace-temps plat de la relativité restreinte sont les suivantes :

i) La covariance qui exprime que les lois de la physique sont indépendantes de l'observateur, doit non pas tant se traduire par des propriétés de la variété espace-temps, mais fondamentalement par des propriétés sur les observateurs.

ii) L'espace-temps de la relativité restreinte possède une nature "quantique" d'après la relativité générale.

Dans une deuxième partie nous reviendrons sur les axiomes de la relativité générale ; nous montrerons qu'il existe une covariance d'échelle et que les géodésiques ont forcément une nature fractale. Puis, de cette covariance et et de la fractalité des géodésiques nous indiquerons comment obtenir des éléments fondamentaux de la théorie cadre de la mécanique quantique.

§1 Formes "quantiques" de la métrique de Minkowski

Prenons la métrique η de la relativité restreinte ; écrite en coordonnées polaires, on a :

$$(1) \quad ds^2 = d\tau^2 - dR^2 - R^2 d\omega^2,$$

et posons le changement de coordonnées :

(2) $R = r + f(r+t)$ et $\tau = t + f(r+t)$; où f est une fonction quelconque dérivable,

alors la métrique η s'écrit dans cette nouvelle carte :

$$(3) \quad ds^2 = (1+2f')dt^2 - (1+2f')dr^2 - (r+f)^2 d\omega^2.$$

Cette métrique (3) est plate (tenseur de Riemann nul) par covariance. Prenons maintenant f de la forme $f(r+t) = \hbar sin\nu(r+t)$ où $\hbar$ est la constante de Planck et où ν est une constante ; ou tout autre fonction "quantique" f dérivable et bornée par une constante que l'on notera $\hbar$; la borne $\hbar$ pouvant aussi être une autre constante de longueur, comme par exemple le rayon gravitationnel d'un nucléon. Cette forme (3) définit, sur un ouvert de l'espace de départ, la métrique plate de la relativité restreinte.

Reprenons maintenant cette métrique (3), définie a priori sur un ouvert de l'espace $\mathbb{R}^4$ muni de sa carte (t, r, ω) en coordonnées polaires. Cette métrique η_f, définie par sa forme (3) est plate puisque son 4-tenseur de Riemann est identiquement nul. Notons $\mathcal{U}_f = (\mathbb{R}^4, \eta_f)$ cette variété espace-temps qui est donc équipée d'une métrique plate définie en dehors d'un tube aux dimensions de Planck. Il est important de souligner que, même si les métriques η et η_f sont mathématiquement localement équivalentes, elles ne le sont pas globalement. En effet les variétés $(\mathbb{R}^4, \eta)$ et $(\mathbb{R}^4, \eta_f)$ ne sont pas difféomorphes. Les deux espace-temps plats $(\mathbb{R}^4, \eta)$ et $(\mathbb{R}^4, \eta_f)$ sont donc différents, sauf si $f \equiv 0$.

Autrement dit, il existe de nombreuses métriques sur l'espace temps plat vérifiant les équations d'Einstein dans le vide, et même vérifiant la nullité du quatre-tenseur de Riemann.

Quelques remarques : i) Cette métrique η_f est définie de partout sauf pour r petit, du fait du comportement de $r + f$ en $r = 0$. En effet pour que la métrique se prolonge sur $\mathbb{R}^4$, il faudrait que $C(r, t) = r + f$ s'annule en 0, que $C'(0, t) = \sqrt{1 + 2f'(0, t)}$, etc. ce qui n'est pas le cas. Le tube, aux dimensions de Planck, sur lequel la métrique n'est pas définie est un voisinage de la trajectoire de l'observateur choisi pour écrire la métrique. N'est-ce pas une voie permettant de retrouver le rôle de l'observateur si important en mécanique quantique ?

ii) Nous avons défini les métriques dans des cartes à symétrie sphérique, on peut faire plus généralement ce même genre de transformation en écrivant les métriques η et η_f dans un système de coordonnées cartésiennes.

iii) Les géodésiques lumineuses radiales ne dépendent pas de la fonction "quantique" f, car d'après (2), r-t est indépendant de f. Autrement dit, les univers $(\mathbb{R}^4, \eta)$ et $(\mathbb{R}^4, \eta_f)$ semblent équivalents du point de vue de l'électromagnétisme.

iv) Pour l'ordre de dérivation de la fonction quantique f, la résolution de $R_{\mu\nu} = 0$, présuppose que les coefficients de la métrique soient de classe $\mathcal{C}^2$, donc que f soit de classe $\mathcal{C}^3$. En fait nous avons seulement supposé que f soit de classe $\mathcal{C}^1$, et alors les coefficients η_{oo} et η_{11}, de classe $\mathcal{C}^0$. En particulier, si la fonction f est telle que f' soit un fractal de dimension 2, par exemple si f est de classe $\mathcal{C}^{3/2}$, alors le temps propre de l'observateur à l'origine des coordonnées, est fractal ; des géodésiques ont une structure fractale (cf. Ord [1], Nottale [2]). Tout un programme, qui permet déjà d'entrevoir un lien entre relativité générale et mécanique quantique, sans recours à une quelconque quantification.

Comment, dans un tel univers "quantique" $(\mathbb{R}^4, \eta_f)$ de l'espace de Minkowski, pouvons-nous exprimer le principe de covariance ? Sachant que ce principe est étroitement lié à la notion d'observateur, il nous faut poser une définition.

Définition d'un observateur quantique : Pour l'univers $(\mathbb{R}^4, \eta_f)$, nous appellerons observateur quantique le tube T_f de $\mathbb{R}^4$:
$T_f = \{(t, r, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times S^1 / r \leq \hbar = ||f||\} \cup \{(t, o, o, o) \in \mathbb{R}^4\}$,

en particulier l'adhérence du complémentaire de T_f est le domaine de définition de la métrique η_f ; Par exigence de covariance, on appellera également observateur quantique toute image de ce tube obtenu par un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de la variété $\mathbb{R}^4$.

On remarquera que cette définition généralise bien la notion d'observateur classique. En effet, lorsque $f \equiv 0$, le tube T_f se réduit à la trajectoire de l'observateur fixe à l'origine des coordonnées spatiales ; et la métrique η_f est bien définie sur toute la variété puisque égale à la métrique η.

Il apparaît une dissymétrie entre d'une part le fait que l'on s'autorise n'importe quel changement de coordonnées de classe $\mathcal{C}^1$ et en ce sens tous les points de la variété sont équivalents et d'autre part le fait que la métrique η_f n'est pas définie de partout (des points sont plus équivalents que d'autres !). Ce paradoxe n'est qu'apparent car la métrique η_f est transportée par les difféormorphismes de $\mathbb{R}^4$. Il n'en reste pas moins que la notation $(\mathbb{R}^4, \eta_f)$ est ambiguë et formellement non-covariante. Il n'y a qu'un moyen pour se sortir de ce qui semble être une impasse, il consiste à se donner un observateur préalablement à toute forme de métrique. On est amené à poser la définition suivante :

Définition d'un modèle d'univers $\mathcal{U}$: C'est la donnée d'une variété V (de dimension 4) de classe $\mathcal{C}^1$, d'une classe d'équivalence d'observateurs sur cette variété, i.e. de tubes difféomorphes, et d'une métrique lorentzienne g_T définie sur l'adhérence du complémentaire d'un observateur T. A chaque choix d'un observateur T correspond une réalisation concrète (V, g_T) de l'univers $\mathcal{U}$.

Dans l'exemple donné ci-dessus, $(\mathbb{R}^4, \eta_f)$ est une réalisation concrète de l'univers $\mathcal{M}$ de Minkowski, un observateur "quantique" T_f ayant été préalablement défini. Le principe de covariance est ainsi clairement transcrit.

A travers cet exemple de l'espace plat de Minkowski, traité du point de vue de la relativité générale, nous venons de mettre en évidence, grâce à l' exigence de covariance, le rôle fondamental de la notion d'observateur : on ne peut parler d'une métrique sur une variété qu'après s'être donné un observateur, cet observateur fut-il classique ou "quantique".

Décidément la relativité générale s'avère être un cadre géométrique extrêmement vaste et ouvert qui permet de dire que la relativité restreinte est quantique et plus généralement que la gravitation est quantique. Pourquoi chercher à quantifier ce qui l'est déjà !

Evidemment ceci est très vite dit et de nature purement épistémologique si l'on n'essaie pas de retrouver des résultats de nature quantique. On en a déjà un, indépendant de la nature classique ou quantique de l'observateur choisi : la jauge harmonique est équivalente au fait que le graviton est de spin 2 ou 0, ce fait est bien connu.

Considérons maintenant pour le modèle $(\mathbb{R}^4, \eta_f)$ les champs de vecteurs :

$du^\sharp = (Fdt)^\sharp = \frac{1}{F}\frac{\partial}{\partial t}$, que l'on note " $^-$ ", et $d\delta^\sharp = (Ldr)^\sharp = \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial r}$, que l'on note " $\tilde{}$ ", alors on a la relation de (non-)commutation :

$$[du^\sharp, d\delta^\sharp] = [^-, \tilde{}\,] = -\frac{\bar{L}}{L} \times \tilde{} + \frac{\tilde{F}}{F} \times {}^- = \frac{F'}{F^2L}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\dot{L}}{L^2F}\frac{\partial}{\partial r} \; .$$

Donc pour $F^2 = L^2 = (1 + 2f')$, on a :

$$(4) \quad [du^\sharp, d\delta^\sharp] = \frac{\dot{f}'}{(1+2f')^2}(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r}) \; ;$$

Il apparaît une différence essentielle entre le choix d'un observateur "quantique" et classique. Dans le premier cas les opérateurs $du^\sharp$ et $d\delta^\sharp$ ne commutent pas, dans le second cas, ils commutent. Reste à comprendre cette relation de noncommutation (4) entre les opérateurs $du^\sharp$ et $d\delta^\sharp$ qui peut exister sur l'espace de Minkowski (en l'absence de champ gravitationnel) et donc à en déduire des propriétés que devrait vérifier une fonction f.

Pour continuer à avancer dans ce schéma quantique il faudrait par exemple traiter complètement le problème du champ gravitationnel émis par un proton ou un noyau d'atome isolé dans le vide, plus exactement dans l'espace $(\mathbb{R}^4, \eta_f)$. Peut-on trouver des fonctions "quantiques" f, telles que l'on obtienne les trajectoires stables souhaitées. Posons le problème et faisons un tout petit pas.

Plaçons donc un proton à l'origine des coordonnées ; dans les coordonnées annexes "lisses" R et τ, le calcul du champ émis par une boule chargée est classique et les solutions "statiques" les plus simples de la forme $ds^2 = F^2(R)d\tau^2 - L^2(R)dR^2 - C^2(R)d\omega^2$, sont les suivantes :

$FL = C'$ et $F^2 = 1 - \frac{2M}{C} + \frac{\nu^2}{C^2}$; la constante M est la masse du proton et la constante ν s'interprète à l'aide de la charge électrique e de la boule : $c^4\nu^2 = Ge^2$ où c est la vitesse de la lumière et G la constante de Newton si $\lim_{R\to\infty} \frac{C(R)}{R} = 1$. Il reste à déterminer la fonction $C(R)$, ce qui se fait avec les équations de la jauge harmonique qui se réduisent à : $\frac{d}{dC}((C^2 - 2MC + \nu^2)\frac{dR}{dC}) = 2R$. Cette équation, qui se réduit à l'équation de Legendre, admet comme solution générale :

$$(5) \qquad R = C - M + A\left(\frac{C - M}{2\sqrt{M^2 - \nu^2}} Log\left(\frac{C - M + \sqrt{M^2 - \nu^2}}{C - M - \sqrt{M^2 - \nu^2}}\right) - 1\right)$$

où A est une constante arbitraire. Pour que la fonction soit définie à l'extérieur de la boule de rayon R_o il faut que $C(R_o) > M + \sqrt{M^2 - \nu^2}$, ce qui n'est pas une contrainte dans la mesure où ce champ émis par le proton est un champ faible. Il ne reste plus qu'à passer au système de coordonnées (t, r, ω), relativement à l'observateur quantique fixé.

Il nous faut s'arrêter un instant et, avant de faire un pas supplémentaire, nettoyer ses chaussures comme le dit J. M. Souriau. Il est évident que dans le système de coordonnées (τ, R) les orbites circulaires ou elliptiques sont stables (en particulier les orbites d'un électron considéré comme particule d'épreuve). Mais la notion de stabilité d'une orbite n'est pas covariante, pour les mêmes raisons que la notion de boule sphérique n'est pas covariante. Pour s'en convaincre il suffit de rappeler que si une orbite est un cercle pour un observateur, c'est une ellipse pour un autre observateur en déplacement uniformément accéléré par rapport au premier, et ... n'importe quoi par rapport à un troisième observateur quelconque. Ceci n'est qu'une forme du paradoxe de Mach, paradoxe qui découle simplement du fait que la forme d'un objet n'est pas défini intrinsèquement. Ainsi pour pouvoir parler de manière covariante de la forme d'une orbite et de sa stabilité éventuelle, il faut se fixer une fois pour toute un observateur privilégié. Avec l'introduction de $\mathbb{R}^4$ quantique que nous venons de faire, cet observateur privilégié se trouve centré à l'origine des coordonnées du type espace.

Ainsi, pour examiner le champ gravitationnel créé par un proton dans un univers vide et statique, il faut non seulement se fixer l'univers de base $\mathbb{R}^4$, mais en plus un observateur (ici il est quantique, précisé par une fonction $f = f(r + t)$). Tous les concepts seront définis dans le cadre de ce modèle d'univers (variété munie d'un observateur privilégié et d'une métrique associée) et pourront alors être utilisés de manière covariante. Par exemple le recours à la forme "lisse" de la métrique de Minkowski sera vu comme un moyen de calcul efficace, c'est ce que nous venons de faire pour trouver des solutions vérifiant la jauge harmonique : les solutions possibles sont de la forme :

$$(6) \qquad r + f(r+t) = C - M + A\left(\frac{C-M}{2\sqrt{M^2-\nu^2}} Log\left(\frac{C-M+\sqrt{M^2-\nu^2}}{C-M-\sqrt{M^2-\nu^2}}\right) - 1\right).$$

Nous avons vu, au chapitre 5, que la constante A dépendait d'une hypothèse de recollement et de propriétés internes à la boule (ici au proton). Peut-on aller rapidement plus loin ? Je l'espère, mais les difficultés semblent cependant énormes, surtout si l'on veut étudier la trajectoire suivi par un électron qui émet un champ en interaction avec celui du proton.

Quel est le champ gravitationnel émis par un proton dans le cadre de la relativité générale ? Par cet exemple, il est bien mis en évidence qu'il dépend d'une fonction arbitraire f (traduisant le choix d'un observateur) et d'une constante A (traduisant des propriétés internes au proton). La prise en compte des forces à courtes portée (donc du cadre théorique de la mécanique quantique s'avère être une nécessité.

En tout cas il est évident que relativité et mécanique quantique ne sont pas incompatibles, comme cela est trop souvent affirmé de manière péremptoire, mais complémentaires comme l'ont déjà souligné, à leur manière, G.N. Ord ou L. Nottale et sans doute d'autres.

Et si le cadre théorique de la mécanique quantique pouvait être vu comme une conséquence du cadre théorique de la relativité générale ?

II- **De la relativité générale à la mécanique quantique.**

Dans un premier temps nous allons examiner certains axiomes de la relativité générale, en particulier celui des géodésiques qui sont suivies par les corps en chute libre. Après avoir montré que les corps en chute libre devraient suivre des trajectoires fractales, nous étudierons des résultats de L. Nottale qui présentés d'une manière nouvelle permettent de compléter l'axiomatique de la relativité générale au moyen d'une part d'une covariance d'échelle et d'autre part de la nature fractale que devraient avoir les "géodésiques" qui seront des solutions différentiables nulle part des équations des géodésiques transformées par un principe de correspondance. En clair relativité générale et mécanique quantique font bon ménage, même s'il reste de nombreux problèmes à résoudre.

II-1 **Sur les axiomes de la relativité générale**

Un premier axiome de la relativité générale. Soit une répartition de masse-énergie dans un univers. D'après la théorie de la relativité générale, le champ gravitationnel est traduit par une variété lorentzienne (V, g) de classe $\mathcal{C}^1$, V étant de dimension 4. La métrique g est $\mathcal{C}^0 - \mathcal{C}^2$ par morceaux et vérifie les équations d'Einstein (en tout point où g est de classe $\mathcal{C}^2$).

Un deuxième axiome en relativité générale est important, c'est celui qui stipule que les corps en chute libre suivent des trajectoires qui sont des géodésiques de (V,g).

Un troisième axiome dont nous regarderons la traduction usuelle est celui traduisant le fait qu'en tout point $x \in V$ on peut effacer la gravitation et qui s'énonce par l'existence d'un repère localement inertiel ; i.e. il existe une carte telle que la métrique g est celle de Minkowski en ce point x et la connexion s'annule en ce point si la métrique est au moins de classe $\mathcal{C}^1$ en ce point ; (en particulier l'espace tangent T_xV en ce point est l'espace-temps de la relativité restreinte, autrement dit dans un tel repère la "physique de laboratoire" est valable au point x).

Pour le moment tout est abstrait, parfaitement géométrisé.
Pour pouvoir dire des choses sur une trajectoire $p \rightarrow x(p)$, il faut pouvoir la repérer et donc se donner un observateur. Cela revient à se donner une carte et un point fixe d'espace dans cette carte U de V. Nous identifierons U à un ouvert de $\mathbb{R}^4$, et donc pour $x \in U$ nous noterons $x = (x^\mu)$ ses coordonnées, pour $\mu = 0, 1, 2, 3$; nous supposerons toujours que la composante x^0 est la composante du genre temps (ce qui n'est pas une restriction, mais une commodité d'écriture) et pour un point fixe d'espace de cette carte, x^0 est le temps propre de l'observateur fixé. Si maintenant nous voulons écrire dans cette carte U les composantes $g_{\mu\nu}$ de la métrique g, il faut en plus se donner un système d'unités : une unité de temps et une unité de distance (ou même si l'on veut corser inutilement la situation, trois unités de distances sur une base de la partie espace de l'espace tangent à l'observateur fixé !). Un système d'unités étant fixé au point-évènement x de U, les concepts de transport parallèle et de dérivation covariante permettent en fait de garder le même système d'unités sur toute la carte ; sans doute n'est-il pas inutile de rappeler que le concept de dérivation covariante est intimement lié à celui de conservation d'un système d'unités.

En résumé un **observateur** sera la donnée d'une **carte**, d'un **point fixe d'espace** et d'un **système d'unités**. Notons (u) ce système d'unités et $g_{\mu\nu}(u)$ la métrique de cet observateur fixé.

Premier problème : Dans les axiomes de la relativité générale, rien n'est dit sur le comportement de la métrique par changement de système d'unités $(u) \to (u')$. En fait il est implicitement admis une invariance par changement de système d'unités, ou comme le dit L. Nottale par changement d'échelle, sous prétexte d'homogénéité des dimensions. Sous ce même prétexte, une invariance n'étant pas forcément covariante, posons :

Axiome i) : Il existe une covariance d'échelle.
Autrement dit, l'opération qui consite à faire un changement de système d'unités est covariante.

Il nous faut donc établir une loi de covariance d'échelle ; il serait souhaitable que cette covariance redonne approximativement aux grandes échelles l'invariance implicitement admise avec une approximation d'autant plus grande que les unités sont grandes.

Examinons maintenant l'axiome des géodésiques. Soit donc $p \to x(p) = (x^\mu(p))$ la trajectoire d'une géodésique écrite dans la carte U, i.e. pour un observateur fixé muni de sa valise d'instruments de mesure (en termes plus académiques de son système (u) d'unités !). On a donc une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans la carte $U \in V$.
Dans ces notations la traduction usuelle de l'axiome des trajectoires suivies par les corps en chute libre consiste à dire que l'application $p \to x(p) = (x^\mu(p))$ est solution des équations différentielles des géodésiques qui s'écrivent :

$$\frac{d^2x^\mu}{dp^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(u)\frac{dx^\nu}{dp}\frac{dx^\lambda}{dp} = 0,$$

où $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(u)$ est la connexion associée à la métrique $g_{\mu\nu}(u)$.
Remarquons que ces équations n'ont un sens que pour des cartes sur lesquelles la métrique est au moins de classe $\mathcal{C}^1$. Remarquons aussi qu'il est implicitement supposé que les géodésiques sont de classe $\mathcal{C}^2$.
Utilisons maintenant le troisième axiome ci-dessus : en tout point il existe un repère localement inertiel (la gravitation est effacée dans une telle carte), autrement dit l'espace tangent en ce point est l'espace de Minkowski de la relativité restreinte. On admet donc localement la dualité (espace,temps)-(impulsion,énergie), via la transformation de Fourier qui fait intervenir explicitement une constante identifiée usuellement à la constante de Planck. Ce troisième axiome suppose donc des relations dites "d'incertitude" que sont les inégalités d'Heisenberg. Non seulement on admet cette dualité (espace, temps)-(impulsion, énergie), par transformation de Fourier, mais on l'utilise explicitement dès que l'on écrit les équations d'Einstein, puisque le deuxième membre $G\frac{8\pi}{c^2}T_{\mu\nu}$ fait intervenir le tenseur ... impulsion-énergie ! A ce propos, rappelons que ce tenseur n'a de sens physique (i.e. n'est interprétable) que dans un repère localement inertiel.

Conséquence : **La relativité générale admet trois constantes physiques, c, G et h, et les inégalités d'Heisenberg**.
Remarquons que ces trois constantes forment une base d'unités.
Faut-il prendre pour constante de Planck h ou $\hbar = \frac{h}{2\pi}$? La notation pratique $\hbar$ fait intervenir la constante de normalisation 2π qui provient de la transformation de Fourier définie sur un espace à courbure nulle. Or en relativité générale l'espace-temps est courbe,

donc 2π, rapport d'un périmètre sur un rayon n'a plus de sens. Par ailleurs si l'on considère une particule de masse nulle, son énergie est donnée par les formules $E = h\nu$ ou $E = \hbar\omega$, où ν est une fréquence (l'inverse d'un temps) et où ω est une fréquence de rotation. Seule la première formule garde un sens dans le cadre de la relativité générale. Aussi dans toute la suite, nous prendrons h et non pas $\hbar$, comme constante de Planck, $I\!\Lambda = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}}$ comme longueur de Planck, $I\!T = \sqrt{\frac{Gh}{c^5}}$ comme temps de Planck, $I\!E = \sqrt{\frac{hc^5}{G}}$ comme énergie de Planck et $I\!M = \sqrt{\frac{hc}{G}}$ comme la masse de Planck.
Remarque : Dans la mesure où, pour établir les modèles d'univers avec rayonnement, on suppose que celui-ci vérifie la loi de corps noir, il est également implicitement admis, dans la mise en oeuvre de la relativité générale, l'existence d'une quatrième constante. Cette constante est celle de Boltzmann ; à partir de cette constante k de Boltzmann, il est évident que l'on peut construire une quatrième unité, indépendante des précédentes. On obtient alors une unité de température ou une unité d'entropie ou encore une unité d'information, ces unités qualifiant un "ordre" ou "désordre" attaché à chaque point de la variété espace-temps.

Revenons maintenant à la trajectoire $p \to (x^\mu(p))$ du point de vue de l'observateur fixé par la carte U et son système d'unités (u). Si cette trajectoire est différentiable, et représente une particule en chute libre, elle admet et un vecteur vitesse $\frac{dx^i}{dp}$ et une énergie $E = mc^2$ ou $E = h\nu$; or $x^0(p)$ est le temps propre de l'observateur, donc si $p \to x^0(p)$ est différentiable, on peut attribuer à la particule d'épreuve et une position et une impulsion aussi précise que l'on veut pour l'observateur fixé ; ceci est absurde du fait des inega-

lités d'Heisenberg. Ainsi soit $p \to (x^i(p))$ n'est pas différentiable, soit $p \to x^0(p)$ n'est pas différentiable. Ceci peut se résumer en disant que $p \to x(p) = (x^\mu(p))$ est différentiable en aucun point, autrement dit la trajectoire de la particule d'épreuve est une courbe fractale.
Signalons que dans un contexte légèrement différent il existe un théorème plus précis sur la nature fractale d'une trajectoire, c'est le théorème d'Abbott et Wise (1981) qui stipule qu'en vertu des inegalités d'Heisenberg, une trajectoire $x^0 \to (x^i(x^0))$ est localement un fractal de dimension de Hausdorff 2. Plus précisément il dit : Pour $(x,t) \in \mathbb{R}^4$, soit $\Psi(x,t)$ une fonction d'onde associée à une particule, alors les inegalités d'Heisenberg impliquent que $t \to \Psi(x,t)$ est un fractal de dimension de Hausdorff 2.

Il y a donc une sérieuse difficulté ; La trajectoire suivie par un corps en chute libre doit-elle être supposée de classe $\mathcal{C}^2$ ou simplement fractale (i.e. continue et non différentiable en tout point) ? Les conséquences de l'une ou l'autre des hypothèses sur la nature lisse ou non des trajectoires ne sont pas négligeables. Par exemple si les trajectoires sont supposées de classe $\mathcal{C}^2$ alors il y a unicité locale d'une géodésique entre deux points et ces géodésiques peuvent être calculées à l'aide des équations (1) ; si elles sont supposées fractales alors il existe une infinité de trajectoires entre deux points ; on retrouve une propriété qualitative des trajectoires de Feynman, mais surtout se pose le problème de se donner un moyen de les calculer, les équations (1) n'ayant plus de sens.

En résumé, la traduction axiomatique usuelle (implicite) mène à une contradiction.

Nous sommes placés devant l'obligation d'affaiblir la traduction mathématique d'un ou de plusieurs des axiomes généraux de la relativité générale. Faut-il abandonner les inegalités d'Heisenberg et donc affaiblir le troisième axiome sur les repères inertiels (et donc la physique de laboratoire n'est plus conservée localement), ce qui permettrait de conserver la traduction usuelle de l'axiome concernant les corps en chute libre ? Ou faut-il garder la physique de laboratoire (l'existence de repère localement inertiel) et affaiblir la traduction mathématique de l'axiome des corps en chute libre, ce qui nécessitera de chercher les solutions fractales des équations différentielles (1) ? Je choisis d'explorer cette dernière voie pour différentes raisons en posant :

Axiome ii) : Les trajectoires des particules d'épreuve (corps en chute libre) sont des courbes fractales solutions en un sens à bien définir des équations différentielles des géodésiques (1).

Explications de ce choix : Ces explications sont essentiellement basées sur la prise en compte du rôle de l'observateur dans la relativité générale.

i) Il est évident que la nature fractale des trajectoires ne peut se manifester que lorsque l'observateur choisi a un système d'unités (une résolution) de l'ordre de grandeur des unités de Planck, du fait des inégalités d'Heisenberg. Aussi, à grande échelle (i.e. aux unités humaines ou astronomiques), il est légitime de conserver les équations (1), et d'en chercher les géodésiques de classe $\mathcal{C}^2$

ii) Le tenseur $T_{\mu\nu}$ nécessite le concept de repère localement inertiel, car c'est seulement dans un tel repère que l'on peut traduire le contenu énergétique en un tenseur (cf. S. Weinberg p.127).

iii) Une analogie entre relativité générale et mécanique quantique :
La théorie de la relativité générale permet d'étudier la trajectoire d'une particule d'épreuve (c'est une géodésique) dans un champ décrivant son environnement gravitationnel (champ traduit par une métrique solution des équations d'Einstein, associé à un deuxième membre classique).
Pour la mécanique quantique, la particule est quantique (inégalités d'Heisenberg) et l'appareil de mesure, décrivant l'environnement de la particule étudiée, est classique.
Le rapprochement qui s'impose donc entre ces deux théories est le suivant, compte tenu du fait qu'un observateur est une trajectoire (point fixe d'espace dans une carte) et un système d'unités (plus précisément une résolution) :

L'environnement d'une particule est décrit par les équations d' Einstein (classique) et la trajectoire est décrite par une géodésique (quantique), et ceci pour tout observateur (covariance générale) et tout système d'unités (covariance d'échelle sur les résolutions).

iv) Enfin les progrès récents en théorie des fractals permettent d'envisager l'étude de solutions fractales de l'équation des géodésiques.

Une conséquence immédiate de l'axiomatique choisie est le fait que la covariance d'échelle doit être non triviale, puisqu'on conserve le concept de repère localement inertiel et donc les inégalités d'Heisenberg ; aussi on ne pourra pas considérer des résolutions plus petites que la résolution de Planck.

Où en sommes-nous maintenant ?

a) Nous avons à chercher des solutions $p \to x(p) = (x^\mu(p))$, continues et différentiables nulle part des équations

$$\frac{d^2x^\mu}{dp^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(u)\frac{dx^\nu}{dp}\frac{dx^\lambda}{dp} = 0.$$

Vaste problème.

b) Comment trouver la loi de covariance d'échelle ? De l'analogie possible entre la relativité générale et la mécanique quantique, la variété (V,g) représente l'environnement classique de la trajectoire de la particule test étudiée qui sera donc vue comme quantique (à travers sa trajectoire fractale). La métrique g ainsi que les équations d'Einstein traduisant l'environnement classique garderont de bonnes propriétés de régularité ; en particulier la métrique sera toujours considérée $\mathcal{C}^0 - \mathcal{C}^2$ par morceaux, le tenseur impulsion-énergie sera $\mathcal{C}^0$ par morceaux, etc... En conséquence la covariance d'échelle, bien que non-triviale, sera lisse pour conserver la régularité de la métrique ; en effet l'application $g_{\mu\nu}(u) \to g_{\mu\nu}(ku)$ doit être de classe $\mathcal{C}^2$, pour tout changement de résolution par un facteur d'échelle k. Ainsi nous pouvons préciser l'axiome i) :

Axiome i) bis : Il existe une covariance d'échelle non triviale et de classe $\mathcal{C}^2$.

Partant du fait que la relativité générale est un cadre géométrique théorique qu'il faut compléter pour obtenir une théorie de la gravitation, partant du fait que l'aspect fractal des trajectoires se manifeste pour des unités de l'ordre de grandeur des unités de Planck et que la nature non triviale de la covariance d'échelle doit se manifester aux échelles de Planck, nous ferons appel à des éléments provenant de la mécanique quantique pour compléter la relativité générale lorsque cela sera nécessaire. De plus du fait de l'existence en tout point d'un repère localement inertiel, il suffit d'étudier cette complétion dans l'espace-temps de la relativité restreinte. Les résultats trouvés localement pourront toujours se transporter par covariance.

II- **Des résultats pour avancer.** (une relecture de résultats de L. Nottale).

Nous savons qu'en mécanique quantique il existe des principes (ou des recettes) qui fonctionnent très bien. Parmi ceux-ci, nous allons nous intéresser aux suivants :

a) Le principe d'incertitude (inégalités d'Heisenberg).

b) Le principe de correspondance.

c) Le principe de renormalisation.

Nous avons vu que le principe d'incertitude est une conséquence de la relativité générale (via le concept de repère inertiel et donc la dualité de Fourier entre l'espace-temps et l'impulsion-énergie). Le principe de correspondance va provenir de l'axiome ii) grâce à un lemme (du genre lemme d'Ito concernant le mouvement brownien) et le principe de renormalisation sera relié à la covariance d'échelle. C'est ce que nous allons essayer d'établir.

Notons qu'un certains nombre de concepts utilisés en mécanique quantique comme le spin par exemple ou les inégalités d'Heisenberg sont en fait des concepts relativistes car provenant directement de la relativité restreinte. Pour se convaincre que le spin est un concept provenant de la relativité restreinte, il suffit de considérer les représentations (unitaires et irréductibles) du groupe de Poincaré (des invariants de l'espace de Minkowski), ces représentations sont paramétrées par masse et spin. Les deux principes b) et c) ci-dessus ont-ils également des liens avec la relativité ? Nous le savons déjà car, par exemple, l'espace de Hilbert des états d'une particule libre est l'espace d'une représentation du groupe de Poincaré, ou encore les équations des ondes relativistes s'obtiennent simplement à partir de représentations de ce même groupe, cf. le chapitre 21 de l'ouvrage de Barut et Raczka [1].

II-1 **La loi de covariance d'échelle.**

L'ensemble des changements d'échelle, par exemple l'ensemble des changements d'échelle de résolution temporelle, forme un groupe ; c'est cette loi de groupe qu'il faut trouver pour préciser l'axiome i) bis. Pour cela nous allons utiliser un théorème mathématique très simple qui dit qu'il existe un paramètre additif pour tout groupe continu à un paramètre, différentiable et simplement connexe.

Soient a_1 et a_2 deux transformations d'échelle, i.e. deux nombres réels positifs exprimant des changements d'échelle de temps, et soit a la transformation d'échelle composée de a_1 et de a_2. Comme la loi de composition de transformations d'échelle n'est pas triviale (axiome i)bis), $a \neq a_1 a_2$. Notons $a = a_1 \top a_2$ ($\top$ se lit "truc").

Par l'application logarithme, posons $\alpha = ln(a)$, $\alpha_i = ln(a_i)$ et notons $\tilde{\top}$ la loi image de la loi $\top$. On a $\alpha \neq \alpha_1 \alpha_2$ et donc $\tilde{\top} \neq +$, la loi d'addition usuelle des nombres réels.

Or, à un isomorphisme près, il n'existe qu'un seule autre loi de groupe différentiable entre les réels d'un intervalle borné $[-k,\ k]$, c'est la loi d'addition hyperbolique qui s'écrit :

$$\alpha_1 \tilde{\top}_k\ \alpha_2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{1 + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{k^2}}.$$

Nous avons ainsi simplement montré le résultat suivant :

Théorème : Il existe une constante positive k telle que la loi de composition des transformations d'échelle soit isomorphe à la loi :

$$ln(a) = ln(a_1 \top_k a_2) = \frac{ln(a_1) + ln(a_2)}{1 + \frac{ln(a_1)ln(a_2)}{k^2}}.$$

Remarque : Il est bien connu que la loi de composition des vitesses ne peut prendre que deux formes, celle de l'addition galiléenne et celle de l'addition relativiste qui fait intervenir une constante en l'occurence la vitesse c de la lumière. Nous avons ici le même genre de résultat. Cf. C. Comte $ 6) par exemple. Et de même que la vitesse de la lumière ne peut être déterminée que par des mesures, de même, la constante k intervenant dans la loi d'échelle devra être interprétée comme une constante mesurée de la physique. Il est évident que la valeur de k est liée à celle de la constante de Planck.

Corollaire : les assertions suivantes sont équivalentes :

i) La constante k est égale à $k = ln(\mathit{\Pi}) = ln(\sqrt{\frac{Gh}{c^5}})$

ii) Le plus petit temps propre mesurable est le temps de Planck.

En effet, prenons deux systèmes d'unités de temps u_1 et u_0 ; soit a la dilatation $a = \frac{u_1}{u_0}$, alors à u_1 fixée, a est maximum (i.e. k=ln(a)) ssi u_0 est minimum (i.e. u_0 est l'unité de temps de Planck $\mathit{\Pi}$).

Remarques : i) Nous retrouvons directement le résultat de L. Nottale sur la loi de covariance d'échelle qu'il propose et justifie excellement à coup d'arguments heuristiques. De plus ce résultat n'est qu'une simple conséquence des axiomes de la relativité générale.

ii) Cette loi de covariance d'échelle est mathématiquement non triviale à toute les échelles (contrairement à ce que laisse supposer

L. Nottale) ; cependant elle ne diverge de l'invariance usuellement implicitement prise qu'aux très petites résolutions.

iii) Pour les changements d'échelle d'unités de distance, on a la même loi d'échelle en utilisant l'équation $l = ct$.

iv) Il reste à formuler le principe de covariance générale, généralisée avec la covariance d'échelle, ceci est laissé au lecteur ; cependant il convient de signaler que le groupe de Lie de dimension 11, contenant le groupe de Poincaré et ce groupe "hyperbolique" de dilatations va constituer le groupe d'invariants cinématiques associé à la relativité restreinte covariante par changement d'échelle.

Définition : Nous appellerons Relativité d'Echelle, la Relativité Générale traduite avec une covariance d'échelle non triviale, et avec l'axiome des géodésiques affaibli (les trajectoires des corps d'épreuves sont des fractales).

A partir d'ici il s'agit de considérations encore mal formulées.

II-2 **Débroussaillage sur les trajectoires.**
Soit une trajectoire d'une particule test, dans son "temps propre" p, i.e. un paramétrage, on a :

$$\begin{array}{ccc} p & \longmapsto & (x^{\mu}(p)) \\ & f = (f_{\mu}) & \\ I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \end{array}$$

De même il sera intéressant de regarder cette même trajectoire du point de vue d'un observateur préalablement fixé, avec son temps propre x^0,et les fonctions composantes g_i associées :

Quelle est la nature fractale de chacune de ces applications, et quelles sont les dimensions fractales mises en jeu ? (dimension de

$$\begin{array}{ccc} x^0 & \longmapsto & (x^i(x^0)) \\ & g = (g_i) & \\ J \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

Hausdorff, celle de boite ou dimension de Minkowski-Bouligand, dimension de différentiabilité, dimension de Hölder, etc... ?).

A la lecture du travail de L. Nottale, il semble que l'obtention du principe de correspondance suppose que, dans le cas non-relativiste, les fonctions g_i soient 1/2-Höldériennes en un sens fort, et que dans le cas relativiste, celui qui nous intéresse, les fonctions f_μ soient 1/2-Höldériennes en un sens fort, si la particule d'épreuve considérée est de masse non-nulle.

Introduisons une définition qui permettrait, me semble-t-il, de présenter des résultats de L. Nottale.

Définition d'une fonction fortement 1/2-Höldérienne : soit $p \to f(p)$ une application continue de $I \in \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; la fonction f sera appelée fortement 1/2-Höldérienne si elle vérifie les conditions suivantes :

i) f est 1/2-Hölderienne en tout p, c'est à dire :

Il existe deux constantes c_1 et c_2 telles que pour h petit,
$c_2\sqrt{|h|} \ \leq \ |f(p+h) - f(p)| \ \leq \ c_1\sqrt{|h|}$
ii) f admet un "1/2 développement limité" à droite et à gauche à l'ordre 2, plus précisément il existe $h \to \xi_\pm(p,h) \in L^2(\mathbb{R}, dh)$ et $b_\pm \in \mathbb{R}$ telles que pour $h > 0$:

$$f(p \pm h) - f(p) = \pm\xi_\pm(p,h)\sqrt{h} \pm b_\pm(p)h + h\epsilon(h)$$

On dira que f possède des "dérivées" (vitesses avant et arrière) $b_\pm(p)$, et nous noterons $\frac{d_\pm}{dp}f$, ces fonctions $b_\pm$.

Remarques : De telles fonctions fortement 1/2-Hölderiennes existent. Par exemple celles associées à un mouvement brownien ; elles vérifient de plus que $h \to \xi_{\pm}(p,h)$ sont des gaussiennes mutuellement indépendantes, en particulier $\xi_{\pm}(p,h) \in L^2(\mathrm{I\!R}, dh)$ et $< \xi_{\pm}, \xi_{\pm} >= 2D$, où D est le coefficient de diffusion.

De telles fonctions sont des fractals 1/2-différentiables, i.e. de dimension fractale de différentiabilté 2, donc de dimension de Hausdorff ≥ 2.
Dans un travail récent, F. Ben Adda et J. Cresson (cf. [9]) prennent des conditions similaires pour traduire mathématiquement les intuitions de L. Nottale ; elles sont légèrement plus fortes, en particulier ils supposent que les fonctions $h \to \xi^2_{\pm}(p,h)$ admettent une limite à droite $a_{\pm}(p)$ en 0, ce qui leur permet de donner un sens à l'équation des géodésiques.

Il me semble qu'avec cette définition, nous pourrions donner une reformulation de résultats de L. Nottale.
Et il restera le gros problème mathématique de donner un sens à la résolution des équations différentielles (équations des géodésiques) dans l'espace des fonctions continues (dérivables nulle part) et fortement 1/2-Hölderiennes.
Vaste chantier !

Sur la particule d'épreuve et ses quatre traductions axiomatiques.
Nous avons déjà remarqué au chapitre 5, que l'axiome des géodésiques ne pouvait s'appliquer en tout rigueur qu'à une particule de masse nulle, et même plus précisément qu'à une particule qui n'altère pas le champ gravitationnel étudié. Une telle particule d'épreuve

idéale se réduit donc à un point mathématique dont on va étudier la cinématique. Dans ce cadre alors on peut supposer que la trajectoire de ce point idéalisé est de classe $\mathcal{C}^2$; mais on n'étudie que la cinématique créée par le champ gravitationnel étudié.
C'est une première manière de traduire ce que peut être une particule d'épreuve. Une deuxième, à l'opposé, serait de considérer le champ gravitationnel créé par notre répartition étudiée et par la particule d'épreuve de masse m ; inutile de dire que l'on obtient un système trop difficile à étudier.
Le réalisme qui prévaut est de considérer que la particule d'épreuve de masse m ne modifie pas le champ gravitationnel étudié. C'est ce que nous avons fait dans les chapitres précédents. Autrement dit on considère que cette particule a une énergie négligeable. Cependant l'habitude fait qu'il est supposé (implicitement) que la trajectoire suivie est de classe $\mathcal{C}^2$; autrement dit cette particule est considérée comme un point cinématique. C'est cet aspect que je remet en cause.
D'où une quatrième traduction axiomatique du concept de particule d'épreuve : on va considérer que son énergie est négligeable vis à vis de la répartition de masses dont on étudie le champ, mais qu'elle est soumise aux inégalités d'Heisenberg (en particulier on ne pourra avoir une précision absolue à la fois sur sa vitesse et sa position). Ainsi la trajectoire suivie par une particule d'épreuve sera une géodésique fractale (de classe $\mathcal{C}^{1/2}$) dans ce champ décrivant son environnement gravitationnel (c'est l'aspect corpusculaire de notre particule d'épreuve), et la particule d'épreuve sera représentée par l'ensemble des géodésiques fractales (c'est l'aspect ondulatoire de notre particule).
Cette définition axiomatique ne remet pas en cause l'étude de l'avan-

ce du périhélie de Mercure par exemple ; en effet les incertitudes de mesures sont nettement supérieures à celles provenant des inégalités d'Heisenberg. Ainsi la trajectoire cinématique (de classe $\mathcal{C}^2$) suivie par Mercure est adéquat pour étudier l'avance de son périhélie. Il n'en sera plus de même si notre particule d'épreuve est une particule élémentaire.

Sur la longueur et le temps de Planck.

Nous avons pris $I\!\Lambda = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}}$ comme longueur de Planck ; et il est usuellement admis que la longueur de Planck vaut $\sqrt{\frac{Gh}{c^3}}$ ou $\sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$ et qu'elle est la plus petite longueur mesurable.

Bien sûr on ne sait pas quelle est la plus petite longueur mesurable expérimentalement et donc si cette longueur $I\!\Lambda$ est bien la bonne, tellement $10^{-33}cm$ est petit.

Bien que $I\!\Lambda$ s'exprime simplement à l'aide de c, G et h, il y a un arbitraire dans cette définition. Si l'on suppose que cette longueur infime est de la forme $\alpha\ \sqrt{\frac{Gh}{c^3}}$, où α est un nombre sans dimension, alors la valeur de α doit découler d'un principe physique. La valeur $\alpha = 1$, celle que l'on a prise provient du principe de simplicité ! Voici le principe le plus courant.

A toute particule de masse m, on peut associer deux longueurs ; d'une part sa longueur Compton $\lambda_c = \frac{\hbar}{m\ c}$, d'autre part son rayon de Schwarzschild $r = \frac{G}{m\ c^2}$; La longueur de Planck est la longueur Compton d'une particule telle que celle-ci soit égale à son rayon de Schwarzschild ; on obtient $\sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$ comme longueur de Planck (et cette particule à la masse de Planck).

Cette définition a l'avantage de reposer sur un principe bien identifié, mais a l'inconvénient d'identifier deux distances de nature très différente : on identifie une longueur d'onde avec un "rayon

périmétrique" de courbure ! Certains auteurs prennent la longueur Compton (d'une particule) lorsqu'elle est égale à deux fois le rayon de Schwarzschild.
Bref, si la constante de Planck ne pose aucun problème quand à sa définition ($E = h\nu$), il y a de l'arbitraire dans la définition de la longueur de Planck.
Voici une autre piste possible, en partant de la remarque sur les formes d'énergie associées aux constantes fondamentales.

On a les formules $E = h\ \nu$, $E = c^2\ m$, $E = k\ T$, mais a-t-on une formule similaire associée à la constante de Newton G ?

Pour les modèles d'univers nous avons une constante, il s'agit de la densité d'énergie comobile du fluide cosmique : $\rho = \frac{3H^2\Omega}{8\pi G}$, et donc pour un volume comobile V on a la formule : $E = \frac{3H^2\Omega c^2}{8\pi G}V$. En remarquant que $H^2\Omega$ est une constante (cf. chapitre 8), on peut prendre comme constante fondamentale de la gravitation à la place de celle de Newton : $\tilde{G} = \frac{3H^2\Omega c^2}{8\pi G}$ et donc une formule similaire aux autres formes d'énergie : $E = \tilde{G}\ V$.
L'équation aux dimensions nous dit que $\tilde{G}$ s'exprime en gramme par centimètre et par seconde au carré et sa valeur est de l'ordre de 10^{-11} dans ce système d'unités (on ne peut être précis sachant l'incertitude d'un ordre de grandeur sur l'évaluation de l'invariant cosmologique $H^2\ \Omega$). A partir des constantes $h,\ c^2,\ \tilde{G}$, on construit facilement une constante de longueur $\frac{h\ c}{\tilde{G}}^{1/4}$, dont la valeur est de l'ordre du millimètre !
Je pousse le bouchon un peu loin, mais je voulais souligner l'arbitraire dans la définition de la longueur de Planck.
Le principe de l'identification entre la longueur de Compton et le rayon de Schwarzschild ne me plaisant pas, il me semble qu'il faut

rechercher ailleurs un principe physique pouvant mener au concept de longueur de Planck ; mais n'est-ce-pas une utopie, ou pire un non-sens ? D'aucun affirme que la relativité générale et le principe de Mach sont incompatibles, et pourtant qualitativement les expériences de Foucault (avec le pendule ou le gyroscope) montrent la pertinence de ce principe, qui de fait est compatible avec la théorie d'Einstein (cf. chapitre 4). Ne faut-il pas chercher à établir l'aspect quantitatif de ce principe qui a un rapport étroit avec le concept de masse inertielle et donc avec une des bases communes à toutes les théories de la gravitation, à savoir l'égalité entre les masses inertielle et gravitationnelle.
La compréhension de l'égalité $m_I = m_G$ doit fournir celle de la longueur de Planck. C'est une intime conviction, mais comme tout scientifique, je peux me tromper.

Conclusion

Dans la revue "Nature", Einstein distingue en 1921 quelques questions importantes attendant une solution :

> "Les champs électriques et gravitationnels ont-ils des caractéristiques réellement si différentes qu'il n'y ait aucune unité formelle à laquelle ils puissent être réduits ? Les champs gravitationnels jouent-ils un rôle dans la constitution de la matière et à l'intérieur du noyau atomique, le continuum doit-il être de façon appréciable, considéré comme non-euclidien ?".

Certes nous n'avons pas répondu aux interrogations d'Einstein (notamment celle en exergue) ; mais nous avons d'une part établi le

bien fondé de celles-ci, d'autre part indiqué quelques pistes, si modestes soient-elles, pour avancer dans leurs résolutions.
En tout cas nous avons définitivement établi le fait que, contrairement à ce que l'on croit, relativité et mécanique quantique font bon ménage et qu'il y a une piste sérieuse pour dire que la gravitation, dans le cadre Einsteinien, est déjà quantique, via la nature fractale des trajectoires suivies par les corps d'épreuves.

Bibliographie.

[1] G.N. Ord : Fractal space-time : a geometric analogue of relativistic quantum mechanics ; J. Phys. A, Vol 16 pp. 1869-1884, (1983).
[2] L. Nottale : Fractals and the quantum theory of spacetime ; Inter. J. of Modern Physics A, Vol 4 n^o119 pp. 5047-5117, (1989).
[3] L. Nottale : Fractal space-time and microphysics ; World Scientific (1993).
[4] L.F. Abbott and M.B. Wise : Dimension of a quantum mechanical path ; Am. J. Phys. Vol. 49 (1981).
[5] Claude Comte : sur quels principes peut-on édifier une mécanique vraiment rationnelle ? preprint, équipe REHSEIS, université Paris VII, 1990.
[6] P.R. Holland : The quantum theory of motion ; Cambridge uni. press, 1993.
[7] E. Nelson : Quantum fluctuations ; Princeton univ. Press, 1985.
[8] Barut et Raczka
[9] F. Ben Adda et J. Cresson : Quantum derivates and Schrödinger's equation ; à paraitre dans Letters in Math. Phys., (2002).