Chapitre 12

Problèmes épistémologiques
La modélisation mathématique
Le pluralisme théorique

Michel Mizony

* Institut Girard Desargues (CNRS UMR 5058), Université Lyon 1

Dans les chapitres précédents, nous avons mis en évidence plusieurs problèmes concernant la mise en oeuvre de la relativité générale. Après en avoir rapidement dressé une liste, nous examinerons certains de ceux-ci à la lumière du schéma de modélisation mathématique présenté en introduction. Nous traiterons enfin de la nécessité du “Pluralisme théorique” (expression de H. Poincaré), pluralisme souligné ici par l'équivalence entre la modélisation newton-lorentzienne (ou post-newtonienne) et celle d'Einstein de la gravitation. Nous justifierons ainsi l'intuition de Kant, bien présentée par Poincaré et actualisée aujourd'hui par le travail du philosophe G. G. Granger.

I Problèmes épistémologiques en quelques questions :

”Rayon” de courbure : pourquoi les mathématiciens ont-ils donné le nom de rayon de courbure à un concept qui a manifestement une signification périmétrique ? Cette confusion a fait et continue à faire des ravages.

Mythe du trou noir : C'est un concept mathématique qui n'a aucune pertinence physique ; comme par exemple en mécanique la notion de masse ponctuelle. Comme il a été vulgarisé et passionne (cela se vend bien), il existe toute une littérature du type mythe. Pourquoi et comment la Science (avec un S) a-t-elle produit ce mythe ?

S. Weinberg : Pourquoi ce physicien américain, qui a reçu un prix Nobel, a-t-il écrit un livre à double lecture sur la relativité générale ?

Observateur : Pourquoi ce concept clef est-il si rarement défini dans la littérature spécialisée ? est-ce un concept méta-physique ?

Relativité : les concepts de relativité Galiléenne et relativité Copernicienne ne coïncident pas, voir les remarques du physicien russe V. Fock. Cette distinction est importante pour faire la part entre ce qui est covariant et ce qui est invariant. Pourquoi est-il parfois oublié que les conditions aux limites ne sont pas covariantes, de même que le concept de forme d'un objet ?

Courbure de l'espace : la matière courbe-t-elle l'espace ? Autrement dit qu'elle est la réalité d'une métrique ? par exemple, tous les modèles d'univers obtenus par la relativité générale peuvent être décrits au moyen de la mécanique usuelle (avec une équation de Poisson très légèrement modifiée), dans ce cadre il n'y a plus de notion de courbure. La relativité générale n'est alors qu'une géométrisation de la théorie de Newton ! Deux modèles conceptuellement très différents d'une même "réalité" physique. Pourquoi le pluralisme théorique a-t-il du mal à être pris en compte ?

10 **équations à** 10 **inconnues** : Pourquoi oublie-t-on de dire que les inconnues sont des fonctions de **4 variables ?** C'est-à-dire il y a trop peu d'équations (les équations d'Einstein) par rapport au nombre d'inconnues (les coefficients de la métrique). Certes il y a des conditions aux limites qui permettent de déterminer des constantes d'intégration, mais elles ne suffisent pas. On peut également utiliser le concept mathématique de conditions de Cauchy, qui permet d'obtenir des théorèmes d'unicité de solutions. Hélas, ou heureusement ! même dans l'exemple de problèmes à symétrie sphérique, on est loin de l'unicité. La relativité générale n'est-elle pas un cadre géométrique qu'il faut compléter pour obtenir une théorie de la gravitation ?

Incomplétude : On en remet une couche au vu de l'importance du problème. Ce problème d'incomplétude a été bien mis en évidence par de nombreux scientifiques ; en particulier par A. Lichnérowicz dans sa thèse, par Y. Choquet Bruhat dans différents articles ou par V. Fock dans son livre. Par ailleurs signalons que dès 1920 ce problème était connu puisque des auteurs on fait l'ajout de conditions supplémentaires (par exemple la métrique devrait être de déterminant 1), avant que la condition dite de "coordonnées harmoniques" se répande. Pourquoi ces travaux ne sont pas pris en compte dans toute leur profondeur ?

Géodésiques : Pourquoi suppose-t-on que les trajectoires des corps en chute libre sont des courbes deux fois dérivables, cela ne repose sur aucun principe physique ?

Tests en laboratoire terrestre : Pourquoi l'expérience du pendule de Foucault reste-t-elle si massivement incomprise ?

Local-global : Le calcul tensoriel a permis d'obtenir nombre de théorèmes de nature locale (du fait de la nature locale du calcul tensoriel). La théorie des variétés mis au point après les années 1935-1945 a fourni les moyens d'obtenir des versions globales de ces théorèmes locaux (par exemple pour le théorème de Birkhoff). Pourquoi ce sont les versions locales de ces théorèmes qui restent toujours traduites en lois globales ?

Quantification : Dès que l'on utilise les équations d'Einstein, on admet un sens au tenseur impulsion-énergie (sur l'espace tangent de manière infinitésimale, si l'on veut être rigoureux) ; donc on admet la constante de Planck, le spin et les inégalités d'Heisenberg (par suite les trajectoires des corps en chute libre ne peuvent être que des géodésiques fractales). Pourquoi cherche-t-on à quantifier la gravitation (dans le cadre de la relativité générale) alors qu'elle est déjà quantique ?

Mécanique quantique : Que penser de la présupposée incompatibilité entre principe de relativité et mécanique quantique ?

Pluralisme théorique : Cette expression fut inventée par H. Poincaré pour signifier qu'il pouvait exister plusieurs modèles mathématiques conceptuellement différents (et pourtant équivalents) d'une théorie physique. Pourquoi notre esprit occidental refuse (inconsciemment ?) ce pluralisme en parlant souvent de paradoxe ?

Espace-temps : Ici aussi on en rajoute une couche. Pour E. Kant l'espace-temps est une production de l'esprit humain. Or nous avons deux modélisations équivalentes et conceptuellement différentes de la gravitation, ainsi donc le concept d'espace-temps est plat dans un modèle et courbe dans l'autre (c'est de fait un bel exemple de pluralisme théorique). Pourquoi n'accepte-t-on pas que le concept d'espace-temps est méta-scientifique (métaphysique) ?

II Schéma de modélisation

> Or la physique n'est la science exacte par excellence que d'être mathématisée.
> J-M. Lévy-Leblond

Ce schéma a pris corps lors de ce travail de recherche sur la relativité générale. En effet les théories de la gravitation (celle de Newton et celle d'Einstein) sont évidemment fortement empreintes de mathématiques ; mais il s'avère qu'il existe des dysfonctionnements dans la mise en oeuvre de la relativité générale. Et c'est l'étude de controverses à ce sujet qui m'a amené à proposer ce schéma.
Le travail de fond de tout relativiste est un travail de traduction : la partie "version" étant le passage des principes ou concepts physiques à leur traduction en termes mathématiques, le "thème" étant de cerner la signification physique de théorèmes mathématiques (intervertir les mots "thème" et "version" pour le relativiste physicien).

une théorie physique

$$
\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}\textbf{Partie}\text{ mathématique}\\ \textbf{axiomes}\text{ mathématiques}\end{array} \arrow[d, "\text{preuves}"] & & \begin{array}{c}\textbf{Partie}\text{ physique}\\ \textbf{principes}\text{ physiques}\end{array} \arrow[ll, dashed, "\text{version}"'] \arrow[d, "\text{expérimentations}"] \\
\textbf{théorèmes} \arrow[rr, dashed, "\text{thème}"] & & \textbf{lois}
\end{tikzcd}
$$

⟵ —— travail du mathématicien —— ⟶

⟵ — — —— travail du physicien —— ⟶

Une modélisation pourra être acceptée comme bien formalisée et fondée (validée) si le diagramme des quatre flèches suivant est " commutatif " (i.e. si la flèche des expérimentations (et ou observations) valide la composition des trois autres flèches) :

$$
\begin{tikzcd}
\textbf{axiomes} \arrow[d, "\text{preuves}"] & & \textbf{principes} \arrow[ll, dashed, "\text{traduction}"'] \arrow[d, "\text{expérimentations}"] \\
\textbf{théorèmes} \arrow[rr, dashed, "\text{traduction}"] & & \textbf{lois}
\end{tikzcd}
$$

Encore faut-il que les quatre flèches soient correctes : pas d'erreur mathématique dans la flèche des preuves, pas de biais dans la flèche verticale des observations (et, ou expérimentations, simulations), enfin pas d'erreur de traduction dans les deux flèches horizontales.

Ainsi pour examiner une modélisation, il faut s'assurer en particulier que les quatre flèches sont " valables ", or ces quatre flèches ont des statuts forts différents.

Il est évident qu'une modélisation ne s'établit pas d'un premier jet, qu'elle n'est qu'une forme synthétique concluant beaucoup d'efforts, de tâtonnements, d'aller-retour entre lois et principes, principes et axiomes, ..., efforts ponctués par de nombreuses observations et expérimentations.

Remarque 1 : Seul un travail pluridisciplinaire (par exemple entre mathématiciens et physiciens) peut valider ce programme de modélisation.

Remarque 2 : Il existe une dissymétrie ; le mathématicien pourra regarder trois flèches, la flèche " preuves ", la flèche " version " et la flèche " thème " ; alors que le physicien examinera les flèches “expérimentations-observations”, " thème " et " version ".

C’est en examinant les problèmes signalés ci-dessus , à l’aide de ce schéma, que je me suis aperçu que les difficultés se situaient principalement au niveau des flèches de traductions (non-sens, faux-amis, hypothèses ad hoc, ...).

Remarque 3 : Dans toute modélisation il y a des traductions, sources d’erreurs et d’incompréhension entre les partenaires de la pluridisciplinarité mise en jeu.

Le mot modélisation a été introduit vers 1975 dans les dictionnaires. Par exemple dans le Larousse on trouve cette définition :
Modélisation : *Modèle mathématique, représentation mathématique d’un phénomène physique, économique, humain, etc, réalisée afin de pouvoir mieux étudier celui-ci.*
Et dans le Petit Robert :
Modélisation :*Mise en équation d’un phénomène complexe permettant d’en prévoir les évolutions.*

Présentons maintenant le schéma pour :

LA RELATIVITE GENERALE

Axiomes mathématiques	$\underset{\text{version}}{\longleftarrow}$	**Principes physiques**
variété de dimension 4	$\longleftarrow$	continuum d'espace-temps
métrique sur la variété	$\longleftarrow$	distance entre évènements
métrique Lorentzienne	$\longleftarrow$	relativité restreinte localement
covariance :	$\longleftarrow$	lois indépendantes du repère
- variété de classe $\mathcal{C}^1$		
- calcul tensoriel		
géodésiques nulles	$\longleftarrow$	trajectoires lumineuses
équations d'Einstein :	$\longleftarrow$	principe de conservation :
- $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$		- équation d'ordre 2
- métrique de classe $\mathcal{C}^2$		- répartition d'énergie
par morceaux		de classe $\mathcal{C}^0$ par morceaux
$\kappa = 8\pi G/c^2$	$\longleftarrow$	approximation Newtonienne
métrique continue	$\longleftarrow$	repère d'inertie
géodésiques	$\longleftarrow$	trajectoires des corps d'épreuve
? (1) :	$\longleftarrow$	observateur :
- carte		- choix de coordonnées
- chemin		- trajectoire
- temps propre		- horloge
- ?		- ?
axiomes particuliers	$\longleftarrow$	problème particulier :
- variété		- modèle d'univers
- sur $T_{\mu\nu}$		- distribution d'énergie donnée
- sur la métrique		- symétries
- conditions aux limites (2)		- données initiales
calculs $\downarrow$ **preuves**		$\downarrow$ **observations**
de la métrique, de géodésiques (3)	$\overset{\text{thème}}{\longrightarrow}$	de trajectoires
de théorèmes	$\longrightarrow$	de lois

(1) quasiment jamais précisé sinon par des classes d'équivalence abstraites ;

(2) données "invariantes" mais non-covariantes ;

(3) calculs souvent difficiles.

Présentons maintenant le schéma pour l'étude d'un problème particulier, celui du champ émis par une boule sphérique dans un univers vide et statique (c'est une approximation de l'étude du champ émis par le soleil).

LA BOULE SPHERIQUE

Axiomes mathématiques	$\longleftarrow$	**Principes physiques**
	version	
Equations d'Einstein, + ...	$\longleftarrow$	principes de la R. G.
$\mathbb{R}^4$	$\longleftarrow$	espace-temps
métrique invariante par rotations	$\longleftarrow$	symétrie sphérique
propriétés de la métrique	$\longleftarrow$	propriétés de la boule
- de classe $\mathcal{C}^2$ sauf au bord		- rayon
- constantes d'intégration		- masse, charge
- indépendante du temps		- statique
tenseur impulsion-énergie	$\longleftarrow$	contenu de la boule
- ?		- masse ponctuelle ou
- $T_{\mu\nu}$ (densité, pression) précis		- fluide parfait ou
- T_{oo} précis		*- densité d'énergie ou
- ?		- ?
approximation Minkowskienne	$\longleftarrow$	influence nulle à l'infini
jauge harmonique	$\longleftarrow$	* vitesse de la lumière pour le champ gravitationnel
formalisme post-Newtonien	$\longleftarrow$	champ faible
etc ou autres axiomes	$\longleftarrow$	etc ou autres hypothèses
preuves $\downarrow$		$\downarrow$ **observations**
	thème	
géodésiques radiales	$\longrightarrow$	** décalage vers le rouge
géodésiques elliptiques	$\longrightarrow$	** avance du périhélie
géodésiques lumineuses	$\longrightarrow$	** déviation des rayons lumineux
géodésiques hyperboliques	$\longrightarrow$	** lentilles gravitationelles
théorème de Birkhoff	$\longrightarrow$	le champ émis est statique **? ? ?** ou il existe un observateur particulier
horizon de la métrique	$\longrightarrow$	trou noir **? ? ?** ou pas de concept de masse ponctuelle
période de rotation	$\longrightarrow$	loi de Kepler **? ? ?**

***** ce sont des hypothèses qui sont importantes ;
****** signifie que ces phénomènes sont observés ;
? ? ? signifie que les spécialistes ne sont pas d'accord entre eux.

Examinons de plus près ce dernier aspect :

Un exemple emblématique : le mythe du trou noir

"The essential result of this investigation is a clear understanding as to why the "Schwarzschild singularities" do not exist in physical reality. Although the theory given here treats only clusters whose particles move along circular paths it does not seem to be subject to reasonable doubt that more general cases will have analogous results. The "Schwarzschild singularity" does not appear for the reason that matter cannot be concentrated arbitrarily. And this is due to the fact that otherwise the constituting particles would reach the velocity of light." Einstein (1939)

Einstein dit sa conviction que le rayon de Schwarzschild est infranchissable (la conséquence est l'impossibilité de la formation d'un trou noir par effondrement gravitationnel). Or cette conviction est maintenant un résultat démontré. En effet, il existe de nombreuses démonstrations du fait qu'un effondrement gravitationnel d'un corps sphérique ne peut pas donner naissance à un trou noir dans le cadre de la relativité générale. Il est important de donner quelques références :

Outre l'article d'EINSTEIN et outre la preuve donnée au chapitre 4, citons N. STAVROULAKIS : Mathématique et trous noirs ; Gazette des mathématiciens ; J.V. NARLIKAR : The Schwarzschild solution : some conceptual difficulties, Found. Phys ; L. S. ABRAMS : Black holes : the legacy of Hilbert's error ; Can. J. Phys. ; et L. S. ABRAMS : The total space-time of a point-mass when Lambda < 0, and its consequences for the Lake-Roeder black-hole ; Physica.

Deux problèmes se posent : a) Pourquoi les démonstrations prouvant la formation de trous noirs, dans le cadre de la relativité générale, sont-elles erronées ? b) Des trous noirs ont-ils été observés, même indirectement ?

a) Il y a trois principales sources d'erreurs :

Je passe rapidement sur la première (dans la flèche verticale preuve) qui consiste à utiliser un changement de variable non bijectif, en oubliant des précautions à prendre.

La deuxième source d'erreur (dans la flèche de traduction "version") est épistémologiquement importante, la notion de rayon est traduite par rayon de courbure. En effet le "rayon de Schwarzschild" à une signification périmétrique et non celle d'un rayon. Il s'agit d'un "rayon de courbure" (concept qui a un sens précis en géométrie). Pour ma part j'utilise maintenant systématiquement dans mon enseignement l'expression rayon périmétrique de courbure à la place de la dénomination dangereuse, surtout en géométrie non euclidienne, de "rayon de courbure". Ce "rayon périmétrique de courbure" est défini comme le quotient d'un périmètre par π et non comme la distance au centre, ce qui, dans le cas d'un espace courbe, n'est pas la même chose.

La troisième source d'erreur (dans la flèche de traduction "thème") provient de l'utilisation globale du théorème de Birkhoff qui n'est valable que localement.

Un autre problème se pose : **le concept d'horizon d'un trou noir n'est pas covariant** au sens suivant : pour la solution de Schwarzschild il se situe à $r = 2M$, pour celle de Fock à $r = M$, etc. Et puis encore un autre : si le photon ne peut pas s'échapper d'un trou noir, comment le graviton pourrait-il le faire ? Ce qui signifie qu'un trou noir ne pourrait émettre qu'un champ gravitationnel nul !

b) Au niveau observationel, les candidats trous noirs se révèlent être des étoiles à neutrons. Il ne reste plus que les candidats trous noirs supermassifs qui se trouveraient au centre de galaxies pour rendre compte de rotations rapides. Or il existe d'autres explications possibles de cette rotation rapide sans faire appel à un trou noir. En particulier une qui est une simple application d'un ... théorème démontré par Einstein dans son article de 1939.

En résumé, le **schéma des erreurs** fondant ce mythe du trou noir :

$$\begin{tikzcd}
\textbf{rayon de courbure} \arrow[d] & & \textbf{distance radiale} \arrow[ll, dashed, "\text{erreur de traduction}"'] \arrow[d] \\
\text{changement de variable non bijectif} \arrow[d] & & \text{aucune observation certaine} \arrow[d] \\
\textbf{théorème local} \arrow[rr, dashed, "\text{erreur de traduction}"] & & \textbf{loi globale}
\end{tikzcd}$$

Bref, le concept de trou noir est un concept purement géométrique, qui n'a aucune pertinence dans le cadre de la relativité générale (vue comme théorie de la gravitation).

RELATIVITE et MECANIQUE QUANTIQUE

Axiomes mathématiques	$\longleftarrow$ version	**Principes physiques**
Equations d'Einstein, + ...	$\longleftarrow$	principes de la R. G.
$\mathbb{R}^4$	$\longleftarrow$	espace-temps
$T_{\mu\nu} = 0$	$\longleftarrow$	espace vide
métrique définie sur $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 - B(0, \hbar))$	$\longleftarrow$	observateur "quantique"
calculs $\downarrow$ **preuves**		$\downarrow$
énormément de métriques solutions	$\longrightarrow$	nombreuses mécaniques
relation d'anticommutation		quantiques possibles
métrique "quantique"	$\longleftarrow$	hypothèses supplémentaires (?)
(géodésiques fractales	$\longleftarrow$	trajectoires des corps)
$\downarrow$	?(♣)	$\downarrow$
théorèmes	$\longrightarrow$	des lois de la mécanique quantique
(inégalités d'Heisenberg	$\longrightarrow$	relations d'incertitude)

(♣) travail à achever !

La relativité générale est de fait un cadre théorique qui permet même le quantique ! Pourquoi chercher à quantifier ce qui est déjà quantique ?

Rappelons des aspects que l'on a vu : dès que l'on admet le cadre géométrique de la relativité générale, on admet la constante de Planck (pour écrire le tenseur impulsion-énergie on doit utiliser les équations $E = h\ \nu$, $E = c^2\ m$ et parfois $E = k\ T$), le spin et les inégalités d'Heisenberg (provenant de la dualité espace-temps, impulsion-énergie).

MODELE STANDARD DE L'UNIVERS et MODELE DE DE SITTER DE L'UNIVERS

Les différences entre le modèle standard de l'univers et celui (du type de De Sitter) que nous avons développé dans les chapitres 7 et 8, reposent fondamentalement sur la lecture "classique" du tenseur impulsion-énergie dans un repère non seulement comobile mais localement inertiel. Dans la mesure où il est plus pratique de travailler avec des coordonnées comobiles, pour éviter des confusions dans l'interprétation de ce tenseur, il vaudrait mieux dire que dans un repère comobile, il est interprétable en termes de co-densité et de co-pression, lesquelles prennent les noms usuels de densité et de pression uniquement dans les repères localement inertiels.

Nous allons illustrer des différences à l'aide de schémas de modélisation.

Modèle	standard	de l'univers
Axiomes mathématiques	$\longleftarrow$	**Principes** physiques
Equations d'Einstein+ ...	$\longleftarrow$	principes généraux
métrique isotrope	$\longleftarrow$	principe cosmologique
calculs $\downarrow$ preuves		décalage $\downarrow$ vers le rouge
Fibration de l'espace temps	$\longrightarrow$	choix de coordonnées comobiles
forme du $T_{\mu\nu}$	$\longrightarrow$	analogue à un fluide parfait
$\downarrow$		nouvelles $\downarrow$ hypothèses
$T_{\mu\nu}$ exprime une densité	$\longleftarrow$	temps propre = temps cosmique
et une pression		le fluide cosmique est parfait !
calculs $\downarrow$ preuves		
univers en expansion	$\longrightarrow$	observations $\downarrow$ OK
		observation $\downarrow$ rayonnement à $3^o K$
		nouvelle hypothèse
loi de corps noir	$\longleftarrow$	ce rayonnement est cosmologique
calculs $\downarrow$ preuves		
Big-bang	$\longrightarrow$	l'univers est plus jeune que
		certains objets galactiques !
il existe un horizon !		
instabilité /conditions initiales !		
		nouvelles $\downarrow$ hypothèses
modèles inflationnaires	$\longleftarrow$	expansion "quantique"
		au début de l'univers
calculs $\downarrow$		
	$\longrightarrow$	Ouf, le problème de l'horizon
		est moins grave
		observations $\downarrow$ expansion
		accélérée
		nouvelles $\downarrow$ hypothèses
réintroduction de Λ	$\longleftarrow$	énergie du vide
calculs $\downarrow$		
expansion accélérée	$\longrightarrow$	Ouf, l'univers a le même âge que
		certains objets galactiques !

Jusqu'où va-t-on continuer cette fuite en avant ?

Modèle	du type	De SITTER
Axiomes mathématiques	$\longleftarrow$	**Principes** physiques
Equations d'Einstein	$\longleftarrow$	principes généraux
+ ... + relativité restreinte		
sur l'espace tangent ?		
métrique isotrope	$\longleftarrow$	principe cosmologique
calculs $\downarrow$ preuves		décalage $\downarrow$ vers le rouge
Fibration de l'espace temps	$\longrightarrow$	choix de coordonnées comobiles
forme du $T_{\mu\nu}$	$\longrightarrow$	analogue à un fluide parfait
$\downarrow$		nouvelles $\downarrow$ hypothèses
$T_{\mu\nu}$ **exprime une COdensité**	$\longleftarrow$	temps propre = temps cosmique
et une COpression		le fluide cosmique est parfait !
calculs $\downarrow$		$\downarrow$ évaluations
		(densité de l'univers
		et de la constante de Hubble)
Les modèles du type De Sitter	$\longrightarrow$	l'univers est plus vieux que
preuves $\downarrow$		les plus vieux objets !
pas de problème d'horizon ! ♠		
stabilité /conditions initiales !		
plus de mystère pour		
la constante cosmologique ! !		
Halo d'attraction	$\longrightarrow$	Dynamique des amas, ...
autres $\downarrow$ preuves		
équivalence avec les	$\longrightarrow$	le rayonnement cosmologique
modèles newtoniens		est celui d'un corps noir ♠♠

♠ Plus fondamentalement, il existe une cinématique causale.
♠♠ Plus fondamentalement, du fait de l'équivalence entre les théories newtonienne et einsteinienne, on peut utiliser la thermodynamique ; en conséquence il existe une "pression" purement gravitationelle ou encore, le concept d'entropie acquiert un sens (et est constante pour un univers de matière !).

III Sur le Pluralisme Théorique.

(C'est une expression que l'on doit à H. Poincaré dans la lignée de concepts dus à E. Kant, simplement présentée par A. Calinon, et étayé aujourd'hui par le philosophe G.G. Granger).

Examinons les théories einsteinienne et newtonienne de la gravitation (plus précisément la théorie post-Newtonienne qui prend en compte la finitude de la vitesse de la lumière ce qui ne change pas les équations de la théorie Newtonienne proprement dite).

On a démontré que ces deux théories (la relativité générale d'Einstein, et la théorie de

Modélisations équivalentes de la **gravitation**

Théorie de la Relativité Générale	⟵ — — traduction	**principes** de la gravitation	— — ⟶ traduction	**Théorie** post-Newtonienne
↓		↓		↓
preuves		expérimentations		preuves
↓		↓		↓
théorèmes	traduction — — ⟶	**lois**	traduction ⟵ — —	**théorèmes**

Newton légèrement modifiée) sont mathématiquement équivalentes et observationellement équivalentes (et même en y regardant de près, c'est la théorie post-newtonienne qui est validée par l'observation et non pas la relativité générale) ; autrement dit, ces deux cadres théoriques sont mathématiquement équivalents et expérimentalement indiscernables (dès que l'on valide une des deux théories, on valide l'autre). Mais ces deux modélisations ne sont pas conceptuellement équivalentes ; en effet dans l'une l'espace-temps mathématique est plat, dans l'autre celui-ci possède une courbure non nulle. Ainsi, le concept d'espace-temps, plat pour l'une des théories de la gravitation, courbe dans l'autre, est un concept méta-scientifique, autrement dit l'espace-temps n'existe pas en soi (en tant qu'objet d'étude de la physique).

Nous avons donc là deux modélisations équivalentes et pourtant conceptuellement différentes d'un même corpus de la physique, la gravitation. Ce fait n'est pas unique, bien que peu connu il se produit également pour la mécanique quantique (cf. le livre de Holland). Il existe sûrement d'autres exemples de ce phénomène que Poincaré appelle le pluralisme théorique (cf. le livre de Boi). D'où cela provient-il ' Pour le comprendre le plus simple est de partir de ce que disait Auguste Calinon vers 1890 : cf. L. Boi à la page 404 :

" [...] L'espace dans lequel nous localisons les faits géométriques de l'Univers est indéterminé ; c'est là un fait fondamental. Il en résulte notamment que cet espace n'est en lui-même ni fini ni infini ; ce qui est fini ou infini, c'est uniquement telle ou telle représentation particulière et déterminée de notre Univers géométrique : ainsi nous pouvons représenter cet Univers par une figure euclidienne infinie ou par une figure de Riemann finie. [...]. Dans l'univers deux corps s'attirent en raison inverse du carré de la distance qui sépare les images de ces corps dans la représentation euclidienne de l'Univers, les rayons lumineux étant représentés par des lignes droites. Et cela reste encore une loi générale de l'Univers, mais exprimée au moyen de la représentation euclidienne : toutefois nous demeurons absolument libres d'exprimer la même loi au moyen d'une autre représentation géométrique de l'Univers ; c'est une simple transposition à faire, quelque chose comme une traduction d'une langue dans une autre avec un dictionnaire. [...] Ainsi la physique et l'astronomie que nous connaissons ont été rédigées dans la langue euclidienne, mais il doit être entendu que cela n'avait rien de nécessaire, le choix de cette langue se justifiant seulement par des raisons de simplicité et commodité,... "

Ainsi, les théories de la gravitation (celle de Newton, d'Einstein, la théorie post-Newtonienne, etc.) ne sont pas des théories de l'espace-temps, ce sont des théories du mouvement. Plus précisément ces théories ne peuvent rien nous apprendre sur le "réel espace-temps", elles servent à prédire des trajectoires, des mouvements. A propos du mouvement on pourra se reporter à G. Longo : " Il faut comprendre, pour saisir ce changement de perspective, que la géométrie n'est pas, ou n'est plus une 'science des figures' mais 'une science de l'espace' (Riemann). En fait, elle est une science du mouvement dans l'espace (Poincaré). Or on peut plus précisément se demander dans quel sens elle peut être une 'abstraction perceptive', qu'est-ce que cet 'invisible qui sous-tend le visible'. Je crois que aujourd'hui on peut considérer la géométrie, grâce aux percées des biologistes et des physiologistes, comme une science de l'action et de la prévision du mouvement dans l'espace : le segment, la courbe, le cercle ne sont pas la 'forme abstraite' (...) d'un objet matériel, ni des 'figures idéales' (...), mais plutôt la prévision d'un parcours. Et la prévision est déjà une abstraction ; la trajectoire prévue ou anticipée par le regard et le geste est abstraite. Voici ma thèse principale. "

Que disait Kant : il disait certes que l'espace, le temps sont des productions a priori de l'intuition : " Le temps n'est qu'une condition subjective de notre intuition, et il n'est rien en dehors du sujet. " ou encore " ... espace et temps sont les cadres a priori de toute description de notre expérience. " et plus généralement à propos de la géométrie : " la géométrie est une science qui détermine synthétiquement, et pourtant a priori, les propriétés de l'espace ... ".

Calinon et Poincaré, dans la lignée de Kant ont donc précisé le statut de l'espace, de l'espace-temps en relation avec l'expérience : " l'expérience ne peut décider entre Euclide et Lobatchevsky. Les expériences ne nous font connaître que les rapports des corps entre eux ; aucune d'elles ne porte, ni ne peut porter, sur les rapports des corps avec l'espace, ou sur les rapports mutuels des diverses parties de l'espace. " dit Poincaré qui a défini le pluralisme théorique, défini comme suit : " il existe plusieurs théories, conceptuellement différentes, mais mathématiquement et observationellement équivalentes (décrivant donc le même ensemble de phénomènes) ".

Que nous apporte G-G. Granger : citons p.29 : " Les sciences ne visent qu'à connaître des objets , en construisant des modèles abstraits de l'expérience, ... La validité de ces modèles est fondée à la fois sur leur cohérence et leur efficacité. En ce sens c'est bien le réel que représente et atteint la science ; mais seulement dans le réel ce que l'expérience nous donne comme communicable, par le moyen de systèmes symboliques, progressivement produits par le génie humain. " Puis page 35 : " Consécutivement, et même synchroniquement, on constate de nombreux cas où l'explication scientifique admet plusieurs modèles pour un même domaine phénoménal. Cette pluralité est-elle le signe que nous n'atteignons jamais que des apparences ? ". Puis il examine le problème de la représentation du domaine phénoménal, ce qui le conduit à poser : " Ce que nous appelons référentiel est donc un espace de représentation adéquat des phénomènes. " ; puis à affirmer : " La vérification scientifique, outre son sens trivial d'élimination des illusions et des erreurs immédiatement décelables, consiste donc en une mise à l'épreuve, le plus souvent très médiate, d'un parti pris de représentation de l'expérience. "

Cet espace de représentation est un objet mathématique ; pour la théorie de Newton, il s'agit de l'espace euclidien, pour la théorie de la relativité restreinte, de l'espace-temps plat de Minkowski, pour la relativité générale, d'une variété différentielle à quatre dimensions, pour la mécanique quantique, de l'espace des états (classes de vecteurs d'un espace de Hilbert). Il sert à définir ce que Granger (p.47) appelle des " énoncés indexés' " : tout phénomène mesurable est paramétré par un point de cet espace de repérage.

Remarque conclusive : Dans toute modélisation il y a un choix a priori de l'espace mathématique servant à repérer l'ensemble des phénomènes. Le pluralisme théorique est de fait la règle générale ; ce pluralisme peut s'énoncer en disant qu'il existe plusieurs modélisations équivalentes et conceptuellement différentes d'un même ensemble de phénomènes.

Comprendre la modélisation d'un point de vue méthodologique, à l'aide du type de schémas que je propose ici ou de tout autre schéma, ne peut faire l'impasse sur la nécessité de l'indexation des événements que l'on veut soumettre à un processus expérimental. Or le temps, l'espace jouent fréquemment un rôle de variables d'indexation ; c'est l'apport incontournable de G-G. Granger qui actualise l'intuition de Kant et justifie le pluralisme théorique de Poincaré. Au travers de cette grille de lecture, le temps étant cette variable d'indexation si souvent utilisée, je ne retiendrais du numéro hors série de La Recherche d'Avril 2001, intitulé " le temps ", que les interrogations d'Etienne Klein : " Le temps est-il une chose ? Est-ce une idée ? Est-ce un concept ? Est-ce plutôt un a priori de notre sensibilité, pour parler comme Kant ? N'est-ce qu'un mot ? N'existe-t-il que dans l'âme, comme le pensait saint Augustin ? Est-il un pur produit de la conscience, comme le croyait Husserl ? Qu'est-ce l'espace ? Qu'est-ce l'énergie ? ".

Toute modélisation introduit un espace, une distance, du fait des flèches de traduction, entre les concepts abstraits d'une théorie et la réalité empirique que ces concepts voudraient cerner. De fait de nombreux scientifiques ont souligné cet écart sans cependant aller jusqu'à affirmer le pluralisme théorique avec la force d'un Calinon ou d'un Poincaré.

"Les concepts physiques sont de libres créations de l'esprit humain, même s'ils ont l'air d'être déterminés uniquement par le monde extérieur. Nos efforts pour appréhender la réalité ressemblent à ceux de quelqu'un qui cherche à comprendre le mécanisme d'une montre fermée. Il voit le cadran et les aiguilles qui bougent, il entend même le tic-tac, mais il n'a aucun moyen d'ouvrir le boîtier. S'il est ingénieux, il se forme l'image d'un mécanisme qui serait responsable de tout ce qu'il observe, mais il ne pourra jamais être certain que son image est la seule capable d'expliquer ses observations. Il ne pourra jamais comparer son modèle avec le mécanisme réel, et ne peut même pas imaginer la possibilité que cette comparaison ait un sens." de A. Einstein et L.Infeld, dans The evolution of Physics, New-York, Simon and Shuster, 1938.

"Devant des théories disparates qui toutes rendent également compte d'un même ensemble de données expérimentales et conduisent à des prédictions identiques, le chercheur risque de se décourager et de passer à autre chose. Il peut aussi faire l'hypothèse qu'une et une seule de ces théories (ou une théorie qui reste à énoncer) décrit la réalité physique [...]. Croire à une réalité physique susceptible en dernier ressort d'être représentée par une théorie et une seule participe d'une hypothèse métaphysique défendue de nos jours par bien des scientifiques [...]. Il semble en tout état de cause que la physique en tant que telle a pour mission de présenter un éventail de possibilités ; à chacun de choisir celle qui lui paraît la plus réaliste en fonction de ses préférences métaphysiques !" de Alan Wallace Science et Bouddhisme, Calmann-Levy,1998, p.31-32

"Si cette conjecture est correcte nous nous trompons quand nous estimons que les notions d'espace, de temps, d'espace-temps, d'évènements et même de positions des choses sont des descriptions "fidèles" de traits de la réalité indépendante. Ces notions ne sont, peut-être, rien d'autre que de simples outils servant à la description des phénomènes, c'est-à-dire de la réalité empirique ou en d'autres termes de l'ensemble de l'expérience communicable." de Bernard d'Espagnat, "Une incertaine réalité" Gauthiers-Villars, 1985.

Pour aller plus loin, d'un point de vue de la philosophie des sciences, à propos de la nécessité de l'indexation (a priori) des évènements, on pourra évidemment partir des travaux de G.-G. Granger et de ceux de Poincaré sur ce qui est appelé le "conventionalisme", mais aussi de J. Petitot développant le concept du "synthétique a priori" qui peut être vu comme une actualisation de l'intuition de Kant (cf. "Idéalités mathématiques et Réalité objective. Approche transcendantale"). Mais ceci dépasse le cadre de ce travail.

Laissons le temps au temps, il fait son oeuvre et indexe nos événements.

Espace, temps, matière, énergie, mouvement Nous acceptons tous la dualité onde-corpuscule d'une particule de matière ou de la lumière et suivant notre "philosophie spontanée" on exprime cette dualité par les phrases suivantes :

Une particule est onde et corpuscule ;
Une particule est ni onde ni corpuscule ;
Une particule est onde ou corpuscule.

Evidemment au point où nous en sommes, ne pourrait-on pas avancer de manière similaire :

L'espace-temps est plat et courbe ;
L'espace-temps est ni plat ni courbe ;
L'espace-temps est plat ou courbe ?

Ce rapprochement mérite d'être posé, cependant il y a de fortes différences. En effet il ne serait pas difficile de construire d'autres modélisations de la gravitation équivalentes mathématiquement (et donc observationellement) à la relativité générale (complétée par une jauge) et la théorie post-newtonienne tout simplement en remplaçant le corps des réels sous-jacent à l'espace-temps de ces deux théories, par le corps des réels non-standard, ou encore par un ensemble discret, ... ; ainsi l'espace temps serait plat courbe, discret, non-standard, courbe et discret, plat et non-standard, etc. C'est une manière de souligner que l'on a un choix énorme d'espaces de représentation des phénomènes.

Passons maintenant à notre particule, à la lumière du travail de L. Nottale. Dans le cadre de la relativité d'échelle, l'aspect fractal apparaît sous la forme suivante : la trajectoire suivie par un corps d'épreuve est une courbe fractale de l'espace-temps de la relativité générale (ce qui traduit tout simplement que les géodésiques sont de classe $\mathcal{C}^{1/2}$). Comme il existe une infinité de géodésiques fractales entre deux points, rien empêche de dire que dans cette formalisation, l'aspect ondulatoire de notre particule d'épreuve est représentée par cette infinité de géodésiques (donnant les trajectoires possibles) ; de même l'aspect corpusculaire de notre particule va se manifester par la trajectoire fractale effectivement suivie (révélée par une mesure ?). De fait notre particule est un ensemble de trajectoires fractales et un fractal. Elle est du mouvement ; et, comme on le sait bien, elle est de l'énergie ($E = c^2\ m,\ E = h\ \nu$).

Le pluralisme théorique nous oblige à revenir aux concepts premiers de mouvement et d'énergie, c'est à dire de manifestations de changements.

VI Bibliographie

L. S. Abrams : Black holes : the legacy of Hilbert's error ; Can. J. Phys. Vol 67 pp. 919-926 (1989).

L. S. Abrams : The total space-time of a point-mass when $\Lambda < 0$, and its consequences for the Lake-Roeder black-hole ; Physica A 227, pp.131-140 (1996).

Arsac et Mizony : Que peut nous apprendre la gravitation sur l'espace-temps ; preprint de l'Institut G. Desargues Université Lyon 1, numéro 12, (1998).

L. BOI : Le problème mathématique de l'espace, une quête de l'intelligible ; Springer, (1995).

A. Calinon : Etude sur l'indétermination géométrique de l'univers ; in la Revue philosophique de la France et de l'étranger, Vol 36, pp. 595-607, (1893).

A. Einstein ; Annal Math. Vol. 40 pp922-936 (1939).

V. Fock : The theory of space, time and gravitation ; Pergamon Press, London (1964).

G. G. Granger : La vérification ; O. Jacob, (1992).

P. Holland : The quantum theory of motion ; Cambridge university press, (1993).

E. Kant : citations tirées des ouvrages de G-G. Granger, de L. Boi et de J-M. Lévy-Leblond.

E. KLEIN : in " le temps ", numéro hors série de La Recherche, (2001).

J.-M. Lévy-Leblond : La pierre de touche. La science à l'épreuve ; Gallimard (1996).

J.-M. Lévy-Leblond : L'esprit de sel ; Fayard, (1981).

G. LONGO : Géométrie, Mouvement, Espace : Cognition et Mathématiques ; in Intellecta, n^o 2, pp.195-218, (1997).

J.V. Narlikar : The Schwarzschild solution : some conceptual difficulties, Found. Phys. 18, numéro 6, pp.659 - 668, (1988).

J. Petitot : Idéalités mathématiques et Réalité objective. Approche transcendantale ; in : Hommage à Jean-Toussaint Desanti, éditions TER, pp. 213-282, (1991).

R. Poincaré : Les fondements de la géométrie ; in oeuvres, XI, Paris, (1956).

N. Stavroulakis : “Mathématique et trous noirs” ; Gazette des mathématiciens, numéro 31 pp 119 -132 (1986).

Annexe :

LES DEUX PRINCIPES DE RELATIVITE ET LA THEORIE D'EINSTEIN

par V. FOCK, université de Léningrad.

Texte paru dans ”Fluides et champ gravitationnel en relativité générale” Colloques internationaux du C.N.R.S. n^o 170, Paris (1969), pages 237 à 239.

”Les deux principes de relativité dont je veux parler sont connus depuis des siècles, mais ils sont souvent mal compris et surtout confondus. Ils ont été confondus par Galilée et par Einstein.

” Le premier principe concerne les *différentes manières de décrire un seul et même phénomène physique* (C'est V. Fock qui souligne), par exemple le mouvement du système solaire. L'équivalence mathématique du système de Ptolémée et du système de Copernic a été reconnue depuis très longtemps et a été utilisée pour défendre, au temps de Galilée, le système de Copernic devant le pape. On peut attacher à ce premier principe de relativité les noms de Ptolémée et de Copernic.

” Le deuxième principe de relativité concerne *l'existence de deux phénomènes identiques* dans deux systèmes physiques en mouvement réciproque. Ce principe a été formulé par Galilée lui-même avec une clarté qui ne peut être surpassée. Galilée parle d'un navire qui est d'abord immobile par rapport au rivage et qui acquiert ensuite un mouvement rectiligne et uniforme. Mais on peut parler de deux navires identiques en mouvement relatif. Galilée donne beaucoup d'exemples de phénomènes identiques, entre autres, la chute d'une goutte d'eau d'un récipient suspendu au plafond d'une cabine.

” Le deuxième principe est bien connu sous le nom de principe de relativité de Galilée.

” Ma thèse principale est que les deux principes de relativité - celui de Ptolémée-Copernic et celui de Galilée - sont deux principes différents.

” Cette différence subsiste pour toutes les généralisations des deux principes dans la physique moderne.

” Quelles sont ces généralisations ?

” Dans le langage moderne le principe de Ptolémée-Copernic se traduit par un formalisme mathématique de covariance, formalisme qui met en évidence la possibilité d'utiliser les variables arbitraires pour la description d'un phénomène donné. La forme covariante des équations est bien connue depuis Lagrange qui a donné ses équations mécaniques de deuxième espèce. Elle a été utilisée par Riemann dans ses études géométriques et enfin par Einstein dans sa théorie de gravitation.

" Le principe de Galilée concerne la relativité physique et l'identité des phénomènes. Ce principe doit être rapproché non pas à la notion de covariance, mais à celle de l'invariance. Il va sans dire que, pour l'existence de deux phénomènes identiques dans deux systèmes de référence, la covariance des équations est bien nécessaire. Mais elle n'est nullement suffisante. On ne doit pas oublier que **les conditions initiales ainsi que les conditions aux limites ne sont jamais covariantes, mais cependant elles interviennent dans la définition d'un phénomène physique**. Cela se rapporte même aux rotations des axes dans un espace euclidien. Par exemple, dans le problème d'électrostatique, les conditions à la surface d'un corps électrisé changent leur forme (puisque l'équation définissant la surface change de forme après la rotation des axes) et pour les réduire à leur forme primitive il faut tourner le corps avec les axes.

" En général, pour obtenir un phénomène identique dans un nouveau système de référence, les conditions physiques doivent être changées conformément à la transformation des coordonnées : *elles doivent être adaptées aux nouvelles coordonnées.* (Ainsi, la goutte d'eau de Galilée qui avait une vitesse initiale nulle dans le premier vaisseau doit être remplacée par une autre ayant la vitesse nulle dans le deuxième vaisseau).

" La possibilité d'une adaptation physique (si elle existe) conduit à une sorte d'invariance que l'on peut appeler *invariance physique*. C'est l'invariance de la forme mathématique de toutes les fonctions décrivant le phénomène physique (des composantes des tenseurs aussi) par rapport à une transformation combinée qui consiste en un changement de variables accompagné d'une adaptation physique correspondante à ce changement.

" Dans un espace-temps homogène (celui de Minkowski), l'invariance physique est possible pour une transformation de Lorentz des coordonnées galiléennes. Par contre, elle n'est pas possible dans le cas général d'un espace d'Einstein ; elle ne devient possible que dans le cas où l'espace peut être considéré comme euclidien à l'infini et où l'on peut introduire les coordonnées harmoniques. La position privilégiée des coordonnées harmoniques dans ce cas consiste, outre leur simplicité mathématique, justement dans le fait que dans ces coordonnées seulement la transformation admettant une adaptation physique est linéaire (celle de Lorentz). Pour obtenir cette adaptation on doit aussi appliquer la transformation de Lorentz aux constantes des mouvements et aux conditions initiales.

"...

" Pour revenir à notre thèse principale - la nécessité de distinguer les deux principes de relativité - on peut constater que le principe de Ptolémée-Copernic est applicable dans tous les cas, tandis que le principe de Galilée présuppose certaines conditions physiques très restrictives."

V. Fock